

中外物理学精品书系

前沿系列·7

瞬变电磁场
——理论和计算

王长清 祝西里 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中外物理学精品书系 · 前沿系列 7

瞬变电磁场——理论和计算

王长清 北京大学信息科学技术学院教授。1960年北京大学物理学系本科毕业，1963年苏联基辅大学研究生毕业，并获数学–物理副博士学位。1986—1987年美国犹他大学访问学者。长期从事电磁场理论、计算电磁学及微波物理的教学和科研工作。已出版的著作有《电磁场计算中的时域有限差分法》、《近代解析应用数学基础》和《现代计算电磁学基础》。曾任中国生物医学工程学会生物电磁学专业委员会副主任委员和中国电子学会微波生物医学专业委员会主任委员，现为《微波学报》和《电波科学学报》编委。

祝西里 北京大学信息科学技术学院教授。1960年毕业于北京大学无线电电子学系。1985—1987年美国犹他大学访问学者。主要从事微波电子学、生物电磁学及计算电磁学方面的教学和科研工作。《电磁场计算中的时域有限差分法》一书的合著者。



ISBN 978-7-301-15920-0

定价：56.00元



中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 7

瞬变电磁场

——理论和计算

王长清 祝西里 编著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

瞬变电磁场：理论和计算/王长清，祝西里编著. —北京：北京大学出版社，2011.4

(中外物理学精品书系)

ISBN 978-7-301-15920-0

Ⅰ. ①瞬… Ⅱ. ①王…②祝… Ⅲ. ①暂态特性—电磁场—研究 Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 173718 号

书　　名：瞬变电磁场——理论和计算

著作责任者：王长清　祝西里　编著

责 任 编 辑：王剑飞

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-15920-0/TN·0053

出 版 发 行：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址：http://www.pup.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62765014

出版部 62754962

印　刷　者：北京中科印刷有限公司

经　销　者：新华书店

730 毫米×980 毫米　16 开本　22.5 印张　420 千字

2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷

定　　价：56.00 元

《中外物理学精品书系》
编 委 会

序　　言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了《中外物理学精品书系》，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，《中外物理学精品书系》力图完整呈现近现代世界和中国物理科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

《中外物理学精品书系》另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义"请进来"的同时，也将我国近现代物理的优秀成果"送出去"。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究

的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理学研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，《中外物理学精品书系》还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套《中外物理学精品书系》的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

《中外物理学精品书系》编委会　主任

中国科学院院士，北京大学教授

王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书系统、深入地阐述了瞬变电磁场的理论和相关的时域计算方法。全书约42万字，共10章。第一章简要地介绍了时域电磁场的基础理论。第二、三章着重讨论了非色散和色散媒质中瞬变电磁场的分析方法和传播规律，其中较详细地介绍了有关问题的索末菲理论和布里渊理论。第四章比较深入地讨论了传输和辐射系统中瞬变电磁场的分析方法。瞬变电磁场的数值计算问题是本书讨论的另一个重点。第五章首先讨论了频域数值解到时域的变换问题，其中包括频域方法的基本原理。第六至十章分别讨论了瞬变电磁场计算的各种直接时域方法，包括时域积分方程法、时域有限差分法、时域多分辨分析法、时域有限元法和时域有限体积法，这些内容反映了所述方法的最新发展。

本书可作为理工科院校中攻读硕士和博士学位的研究生学习电磁场理论和计算电磁学的教材或参考书，也可供从事应用数学、应用物理、电磁场工程以及相关领域研究的科技工作者参考。

前　言

时域电磁学是当今电磁学领域非常活跃并正在蓬勃发展中的一个前沿分支，它的主要研究对象是瞬变或非时谐电磁场的辐射、传输和散射等问题的分析和计算方法及其特点和规律. 由于科技发展历史的原因，传统的电磁场理论重点放在对时谐稳态电磁场的研究，其成果主要适用于单一频率或窄带电磁信号，其分析方法是隐去时间变量的频域方法，相比之下可称之为频域电磁学.

时域电磁学的兴起主要源于对核爆炸所产生的电磁脉冲对电子系统巨大破坏力的关注和电磁脉冲应用前景的吸引. 随着信息技术的发展，在通信和计算机等电子系统中超短脉冲或超宽带信号的应用越来越广泛. 为了开发设计高品质的宽带电磁系统，需要对系统的宽带特性有尽可能精细和准确的分析，甚至需要深入地了解其中所发生的瞬变过程. 为了满足这些需要，发展能对瞬变电磁场问题进行精确、高效分析和计算的方法成为迫切的需求.

时域电磁场问题的研究在早期的工作中主要发展的是解析方法，由于在时域求解麦克斯韦方程比在频域求解增加了一个时间变量，大大增加了求解的难度，通常还是采用积分变换的方法，这使得解析法只能解决少数相对简单的问题. 随着电子计算机的诞生和发展，研究重点转向了数值计算方法. 20 世纪 80 年代以来电磁场计算的直接时域方法越来越受到重视，并得到了迅速的发展. 另一方面，时域电磁学的影响也越来越广泛，已经在通信、雷达、计算机网络、电子工程、地物探测、电磁兼容和生物电磁学等领域发挥着重要作用.

基于以上原因，深感时域电磁学已是电磁场理论和计算电磁学教学中不可缺少的内容，于是萌生了写一本系统阐述瞬变电磁场理论分析和数值计算方法的书籍的想法，希望它能成为研究生相关课程的教材或参考书，并能弥补国内外已出版的相关书籍的不足.

本书内容包括瞬变电磁场的理论分析和数值计算方法两个方面. 虽然解析分析只能解决比较简单的问题，但掌握处理瞬态电磁场问题的解析方法和它所揭示的一般规律，对于一个高素质的电磁理论研究人员还是非常必要的. 本书首先概述了时域电磁场理论的基础知识，然后系统地讨论了在非色散和色散媒质中瞬变电磁场的辐射和传播问题的分析方法和规律. 对非色散媒质问题着重介绍了卡尼亚-德 · 霍普方法，得到了不同条件下的时域格林函数和偶极源的辐射特性. 对色散媒质问题则详细地介绍了索末菲理论和布里渊理论，深刻揭示了瞬变电磁场在色散媒质中的传播规律. 以上是前三章的主要内容，本书的第四章则

专门讨论传输和辐射系统中的瞬变电磁场，讨论了色散和非色散传输系统中瞬变电磁场的分析方法和传输规律，讨论了偶极子和线型天线瞬态辐射的分析方法和特点.

在计算机高度发展的当代，能解决实际遇到的复杂瞬变电磁场问题的还是数值计算方法，而这也是该领域当前发展的主要方向，作为教材自然也就应该把数值方法放到重要的位置.本书的第五章讨论频域数值解到时域的变换问题，为了叙述的系统性和完整性，对频域方法的基本原理也进行了适当的讨论，这些内容还是后面接着论述的直接时域方法的基础.从第六章开始往后都是讨论瞬态电磁场计算的直接时域方法，这些方法包括时域积分方程法、时域有限差分法、时域多分辨分析法、时域有限元法和时域有限体积法.其中的时域有限差分法发展最为成熟，应用也最广泛，理应作为讨论的重点，但是，已经有一些著作对该问题进行专门的论述，故本书只做必要的讨论，而对最新的发展给予足够的重视.鉴于其他几种时域方法在国内已出版的相关著作中还很少论及，本书则对它们的原理进行了较系统深入的讨论，以期读者能对这些正在迅速发展的新方法有较深刻的理解.

本书的写作是在北京大学教材建设基金的资助和北京大学出版社的支持下完成的.在写作过程中得到了我国电磁理论界的诸多朋友们以及我校信息科学技术学院的领导、老师和同学们的帮助、关心和鼓励，在此一并对他们表示衷心的感谢.我们要特别地对本书的责任编辑王剑飞表示由衷的感谢，没有她的努力本书不可能顺利地出版，她为本书的出版所付出的辛劳和作出的贡献远远超出了对责任编辑的要求.

此外，我们还想借本书出版的机会表达一点自己的心迹，虽然已退休多年，总有一种责任感在不断地驱使着自己，想尽量发挥点余热，为社会继续做点有益的事情，这就是写作本书的动力.此外，在现在的年龄还能完成这样繁重的工作也和我们的儿女海波、海云的理解和支持分不开，他们的优秀表现不仅消除了我们的后顾之忧，更在精神上给了我们很多慰藉和鼓舞.

由于本书所涉及的内容相当广泛，很多内容是当前国内外学者最新研究成果，而作者的学识有限，可能会有理解不当之处，在写作中也会有所疏漏，书中不妥甚至错误之处在所难免.恳请读者不吝指正，以便有机会再版时加以改正.

王长清　祝西里

于北京大学承泽园

2007 年 4 月

目　　录

绪　论

§0.1　时域电磁学的兴起和发展

时域电磁学(Time Domain Electromagnetics)是电磁学领域非常活跃并正在蓬勃发展中的一个前沿分支,它的主要研究对象是瞬变或非时谐电磁场的辐射、传输和散射等问题的分析和计算方法及其规律和特征.由于历史的原因,传统的电磁场理论重点放在对时谐稳态电磁场的研究,其成果主要适用于单一频率或窄带电磁信号,其研究分析方法是隐去时间变量的频域方法,相比之下可称为频域电磁学.

时域电磁学的兴起主要源于20世纪60年代对核爆炸所产生的电磁脉冲(NEMP)对电子系统巨大破坏力的关注.这种电磁脉冲有两个主要的特点:其一,它是在时间上短暂的单个脉冲,有比较陡峭的前沿,当它与系统作用时能在时间上展现其特性.其二,它有很宽的频谱,包含了从直流开始的很宽的频率分量.系统对单个脉冲的响应包含了宽频带的信息,与时谐稳态场的作用有巨大的差异.为了深入了解核电磁脉冲与各类电磁系统相互作用的机制和规律,人们从理论和实验等角度开展了多方面的研究,从而开启了瞬变电磁场研究的新方向.随着对瞬变电磁场研究的不断深入,人们不仅加深了对这种复杂现象所具特性的认识,更认识到可能的广泛应用.这些研究成果不仅直接有助于核电磁脉冲的防护和电磁脉冲武器的研究,在冲激雷达、遥感和雷达目标识别等的研究中也发挥了重要作用.

随着信息技术的发展,在通信和计算机等电子系统中,超短脉冲或超宽带信号的应用越来越普遍.为了开发设计高品质的宽带系统,需要对系统的宽带特性有尽可能精细和准确的了解,甚至需要深入了解其中所发生的瞬变过程.为了满足这些要求,需要发展精确的、高效的、能对瞬变电磁场进行分析和计算的方法.经典的频域方法已经不能适应这种需要,从而促进了直接时域方法的发展.

从本质上讲,在实践中所遇到的电磁波都是复杂的时变过程,时谐稳态电磁波只是电磁现象的一种特定的理想状态.为了深入探索电磁现象的普遍规律,自麦克斯韦电磁理论诞生以来,人们就没有停止过直接在时域研究各种复杂电磁过程的努力.在早期所开展的工作中,主要发展的是解析方法.由于在时域求解麦克斯韦方程比在频域求解增加了一个时间变量,大大增加了求解的难度.为了克服直接求解的困难,往往采用积分变换的方法,但在求逆变换时仍然存在各种限制,使得解析方法只能解决一些相对简单的问题.随着电子计算机的诞生和发

展,研究重点转向了时域电磁场分析计算的数值方法.自 20 世纪八九十年代以来,电磁场计算的直接时域方法越来越受到重视,并且得到了迅速的发展.与此同时,时域电磁学的影响也越来越广泛,已经在通信、计算机网络、电子工程、雷达、地物探测、电磁兼容和生物电磁学等领域发挥着重要作用.

§0.2 时域电磁场分析计算的主要方法

实践已经充分证明,麦克斯韦方程是宏观电磁场理论的可靠基础,电磁场理论的任务就是在各种复杂的实际条件下求解麦克斯韦方程,以便更深刻地理解各种复杂的电磁过程,并满足科学技术发展的各种需要.对时域电磁学而言,就是在各种需要的条件下求解包含时间变量的麦克斯韦方程.在所需条件下求得由麦克斯韦方程导出的各类数学方程的封闭形式的解析解,是人们所追求的解决问题的理想方法,它被称为解析法.解析法的优点是显然的,如果不考虑建立数学方程时对实际问题所作的近似处理,解析法所得到的解是精确的.一旦求得了解析解,则该解对其中所包含的某些参数是普适的,当参数改变时无需重新求解.同时,解对某些参数的依赖关系反映了一定的规律,从中可获得非常丰富的信息.遗憾的是,与求频域解相比,由于增加了时间变量使得直接求时域方程的解析解变得更加困难.实际上,求解时域电磁场问题的解析法主要是积分变换方法,即利用傅里叶变换或拉普拉斯变换,先在变换域求得解析解,然后再变换到时域.显然,这种方法会遇到双重困难,首先必须在变换域求得封闭形式的解析解,然后还得要求其逆变换不仅存在而且还得具有封闭解析式.可想而知,能得到这种解的问题一定非常有限,而且问题一般都比较简单.尽管如此,这方面的努力还是非常有价值的,因为这些解能深刻地揭示电磁场的运动规律,具有重要的科学价值.

由于求得时域电磁场问题的解析解的难度极大,甚至对比较复杂的问题根本就不可能获得解析解,使得数值近似方法变得更加重要.求解电磁场问题的数值方法首先在频域得到了长足发展,例如求解频域积分方程的矩量法和求解频域微分方程的有限元法等.原则上讲,频域方法也可以用来求时域解,即先在所感兴趣的频带内的足够多的频点上求得频域数值解,然后利用离散傅里叶逆变换或快速傅里叶变换求得所需的时域数值解.这种方法可称为频域-时域数值变换法.这种方法主要受到效率和精度等方面的限制.

求解时域电磁场问题最具发展前途的还是直接时域数值方法,这类方法的特点是在时域建立场的方程,并直接在时域求得方程的数值解.时域积分方程法、时域有限差分法、时域多分辨分析法、时域有限元法、时域有限体积法以及传输线模型法等这类方法已经被证明十分有效.下面对这些方法做些简单评述.

时域积分方程法 它是相对发展比较早的一种电磁场计算的直接时域方

法，但当时主要用简单求和的积分近似法，这使得电磁场计算不仅效率低且精度也难提高. 时域积分方程法的出发点是时域积分方程，这种方程可由频域积分方程经傅里叶逆变换获得，也可借助时域辅助势函数来表达. 现代对时域积分方程的求解方法是，对其空间变量部分采用矩量法方式进行离散，而对时间变量则采用差分法，且既能构成显式格式，也可以构造隐式格式，后者将是无条件稳定的. 时域积分方程法保留了积分方程法的所有优点，即由于方程已包含了边界条件而可缩小计算空间，而对由表面积分方程所描述的问题，计算空间仅限于积分表面，使计算空间相对较小.

时域有限差分法　时域有限差分法是在 Yee 氏网格中直接对时域麦克斯韦旋度方程进行差分近似的一种电磁场的数值计算方法. 它于 20 世纪 60 年代提出，直至 80 年代才比较成熟. 到现在不仅应用广泛，而且仍处于不断发展之中. 实践已经表明，时域有限差分法是已知各种电磁场的数值方法中运用范围最广的一种方法. 由于时域有限差分法直接从麦克斯韦方程出发，不需要任何导出方程，避免了使用更多复杂的数学工具，而且直接在时域中模拟电磁波的传播及其与物体相互作用的物理过程，使得它具有简单、直观和容易掌握等特点. 在时域有限差分法的差分格式中，被模拟空间电磁性质的参量是按空间网格给出的，因此只需在相应的空间网格点设置适当的参数，即可模拟各种复杂的电磁结构，而且媒质的非均匀性、各向异性、色散特性和非线性等均能很容易地被精确模拟. 在网格空间中电磁场分量是被交叉放置的，而且在计算中用差分代替微商，使得介质交界面上的边界条件自然得到满足，这就为模拟复杂电磁结构提供了极大的方便. 以上特点保证了时域有限差分法极广泛的适用性. 虽然时域有限差分法由于其微分方程特性而需要在计算空间的截断处设置必要的吸收边界条件，从而扩大了计算空间的范围，但由于它所需要的存储空间和 CPU 时间只与未知量个数成正比，具有所有数值方法中最小的复杂度，仍然有较高的计算效率. 尤其是，它非常适合于并行计算，这正好符合了当今计算机高速计算的发展趋势，使之有利于在解决大尺度极复杂电磁场问题中的应用. 时域有限差分法的主要缺点是对曲线或曲面模拟中阶梯近似引入的误差，而采用共形网格又过于复杂.

时域多分辨分析法　为了克服时域有限差分法的不足，20 世纪 90 年代把小波分析的多分辨分析概念引入到电磁场的计算中，形成了一种电磁场计算的时域多分辨分析法. 该方法将电磁场各分量用多分辨分析的尺度函数和小波函数进行展开，用伽辽金法对时域麦克斯韦方程进行离散，构成一种既与时域有限差分法有关，又具有更广泛更深刻意义的电磁场的时域计算格式. 时域多分辨分析法给出了一个全新的统一的理论构形，不仅将各种时域有限差分法与其他电磁场的分析方法联系起来，而且使电磁场问题的计算复杂度几乎可以降低一个数量级. 与传统的时域有限差分法相比，时域多分辨分析法之所以能降低对计算

机资源的需求，是因为在相同的精度水平上，后者所用的网格尺度可以更大些，只在需要的地方自动选择更高的分辨率. 事实上，从某种意义上讲，时域多分辨分析法是时域有限差分法的更一般化形式，后者只不过是前者将小波基函数换成矩形脉冲函数的一种特殊情况. 从应用方面看，时域多分辨分析法还有不少问题有待于进一步完善，目前还没有被广泛地应用，但其发展前景值得关注.

时域有限元法　这是一种从时域微分方程出发建立的有限元方法，其途径主要有两个：一条途径是直接从时域麦克斯韦方程组出发，另一条途径是以时域麦克斯韦方程导出的波动方程为基础. 对方程中空间变量的离散都采用伽辽金法，而展开函数则是频域有限元法中通用的基函数. 时间变量的离散也是采用差分法，可有显式和隐式两种格式. 由它所采用的基函数可知，在空间离散上时域有限元法与频域有限元法没有什么区别，因此保留了对空间精确模拟所具有的强大功能，这也正是发展时域有限元法的主要动力. 当然，时域有限元法仍然保留了具有较高计算复杂度的缺点，从而限定了这种方法的价值，使其主要体现在对复杂几何结构的精确模拟方面.

时域有限体积法　用于电磁场计算的时域有限体积法是在 20 世纪 80 年代末至 90 年代初逐步发展起来的. 有限体积法最早发源于流体力学，以守恒方程为出发点，故在引入电磁场问题时也是把麦克斯韦方程转化为守恒形式，以便可以对比地继承有限体积法在流体力学中的应用成果. 另一方面，也可以由积分形式的时域麦克斯韦方程出发来构造时域有限体积法的离散格式，使之与时域有限差分法建立起联系，并可视作时域有限差分法的直接发展. 和有限元法类似，时域有限体积法的网格具有很大灵活性，从而有很强的精确模拟复杂几何结构的能力. 所以可以说，时域有限体积法具备了有限元法和时域有限差分法二者所具有的优点.

传输线模型法　这种方法是用虚拟传输线构成空间网格，在其公共结点处形成场(电压或电流)的传输与反射，由此建立与麦克斯韦方程的等效关系. 另一方面，传输线模型法也可以用惠更斯原理来解释，场在传输线矩阵中的传播由一系列二次源产生. 在某些简单的情况下，传输线模型法与时域有限差分法有同样的表示. 因为传输线模型法需要反方向传播的信息，故需要更多的计算机资源. 虽然传输线模型法在某些方面比时域有限差分法有一定的优越性，但由于它缺乏直观性，运用起来有诸多不便，故始终没能得到广泛的应用. 因此，在本教材中不再对此进行深入讨论.

§0.3　在瞬变电磁场计算中直接时域法与频域法的比较

如上所述，在瞬变电磁场问题中如果能在时域直接获得解析解当然是最理想的，只是难度非常大，往往做不到. 如果能做到，则可避免变换方法的复杂过程

及所受到的种种限制. 实际上,不管是用哪种方法获得时域解析解都是极力追求的,永远是一种努力方向. 现在我们关心的问题是:如果需要用数值方法解决问题,那么在频域法和直接时域法中应选择哪一种? 下面对这两种方法加以简单的比较.

所谓瞬变电磁场问题,往往是指非时谐激发电流源在各种环境下所激发电磁场的求解. 当源位于无穷远时,就相当于入射场为非时谐平面波的情况. 为了对问题有更好的物理了解,或者为了实际的需要,往往要求得在时域上直接表示的解答. 当然也存在另一种情况,最终需要的是在宽频带上的信息,而求得时域解只是一个手段. 不管哪种情况,利用频域法或直接时域法都能达到目的,问题是哪种方法有更高的效率.

总体上说,当计算目的是获得时域响应时,时域方法往往有更高的效率. 这是因为时域方法只需一次计算就能获得全部时域信息;而用频域方法则需在所需频带内足够多的取样点上进行多次计算,才能获得足够多的数据,以便能利用离散傅里叶变换求得所需的时域解. 如果所需要的只是在脉冲信号作用下系统的峰值响应,则时域法比频域法更加有效得多,因为即使并不需要全部时域信息,频域法也必须由全部频域取样数据才能求得,而时域方法只需运算到峰值点出现即可停止. 当然,两者之间在效率上的差异并不能直接从计算次数上判断,因为时域法往往采用步进算法,其效率也和计算步数相关. 当计算目的仅为获得宽频带信息时,时域方法也可能在效率方面仍然占有优势,因为一次时域计算就可以获得宽频带的信息. 但是,对于不同波形的时域激励源系统的响应,用时域方法必须分别计算;而就频域方法而言,对于时不变线性系统,只要获得了它的频域响应函数,则系统对不同时域源的响应,只需通过卷积计算就可获得.

时域法对频域法的另一个优势,是时域法也适用于非线性系统和时变系统. 时域法也存在一个特有的稳定性问题,对显式算法而言,其稳定性是有条件的,即当空间离散尺度给定后,其时间步长就受到了限制,由于采用小的时间步长,就增加了计算步数,从而限制了计算效率. 隐式算法虽然是无条件稳定的,时间步可取得比较长,但每一时间步需要矩阵求逆,也会影响计算效率. 实际上,即使稳定条件得到了满足,由于各种误差的积累,也可能在计算的后期出现不稳定现象,需要进一步采取措施加以解决.

虽然瞬变电磁场计算的时域方法还存在着种种问题,但已经在一些重要方面显示出其优越性,这也正是它成为当前计算电磁学中很活跃的研究领域的重要原因.

第一章　时域电磁场的理论基础

宏观电磁场理论建立在坚实的科学实验和长期工程实践的基础之上，具有完美的理论体系和极为丰富的内容. 电磁场理论的任务是阐述电磁学的物理原理和用以求解各种电磁场问题的方法，给出各种条件下电磁场的运动规律及其工程应用前景. 本章将概述电磁场理论的最基本部分，作为后续各章所述内容的理论基础. 根据本书的需要，将以时域电磁场理论为要点进行论述.

§1.1　描述宏观电磁场的基本方程

一个多世纪前，麦克斯韦(Maxwell)集电磁学研究之大成，创立了描述宏观电磁场运动规律的方程组，从而奠定了宏观电磁场的理论基础. 一百多年来，无数科学实验和电磁场工程实践没有发现与之相违背的事例，这使人们坚定地相信，解决各种宏观电磁场问题，可以以麦克斯韦电磁场理论为依据. 现在通用的麦克斯韦方程组是由赫兹(Hertz)和亥维赛(Heaviside)对原方程经过简化整理而得到的. 针对不同的需要，麦克斯韦方程组可表示成不同的形式.

1.1.1　微分形式的麦克斯韦方程

在麦克斯韦方程组中，用于表示电磁场特性的主要有 4 个物理参量. 由于电磁场本质上为矢量场，所以这 4 个参量均为矢量，分别用 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示，其中：$\boldsymbol{E}$ 称为电场强度(单位为伏[特]/米，表示为 V/m)，$\boldsymbol{D}$ 称为电通量密度或电位移矢量(单位为库[仑]/米^2，表示为 C/m^2)，$\boldsymbol{H}$ 称为磁场强度(单位为安[培]/米，表示为 A/m)，$\boldsymbol{B}$ 称为磁通量密度或磁感应强度(单位为韦[伯]/米^2，表示为 Wb/m^2).

从本质上讲，宏观电磁场产生的根源是带电粒子在空间的分布及其运动而产生的电流. 电量的最基本单位是一个电子所带的电量，因此电量的变化是不连续的，其空间分布也是不连续的. 电磁场是分立的光子，也是不连续的. 宏观电磁场理论是在宏观尺度下才成立的一种电磁场理论，在宏观尺度下电量和场量的分立性质都可以忽略，在空间和时间上都认为是连续的.

在一般情况下，表征电磁场的各物理参量都是位矢 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数. 在满足宏观尺度的条件时，在媒质连续的空间中，可假定场是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的连续函数并具有连续导数. 作为电磁场的源或被电磁场所诱导产生的电荷密度 ρ(单位为库

[仑]/米^3,表示为 C/m^3)和电流密度 $\boldsymbol{J}$(单位是安[培]/米^2,表示为 A/m^2)也假定为$\boldsymbol{r}$ 和 t 的连续函数.在以上假定成立的情况下,麦克斯韦方程组具有如下的微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t), \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.1.4}$$

其中 ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 还应满足表征电荷守恒定律的连续性方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{1.1.5}$$

对于时变电磁场,以上 5 个方程中只有 3 个是独立的.例如,方程(1.1.3)和(1.1.4)可由方程(1.1.1)、(1.1.2)和(1.1.5)导出.对方程(1.1.1)求散度,可得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{B}. \tag{1.1.6}$$

由于$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$,对时间求积分,当取积分常数为零时,就得到方程(1.1.4).对方程(1.1.2)取散度,则得到

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{D} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0, \tag{1.1.7}$$

再利用方程(1.1.5),就可得到方程(1.1.3).

对于时变电磁场而言,习惯上认为麦克斯韦方程组中的两个旋度方程(1.1.1)和(1.1.2)是独立的,或称它们为基本方程.两个散度方程(1.1.3)和(1.1.4)称为辅助方程,但仍然代表电磁场必须满足的基本规律.由于静态电磁场不随时间变化,电场和磁场之间没有耦合.对静态电磁场而言,方程(1.1.3)和(1.1.4)不能由方程(1.1.1)和(1.1.2)导出.

以上所述独立方程和辅助方程不是绝对的.实际上也可以将方程(1.1.1)～(1.1.3)视为是独立的,而把方程(1.1.4)和(1.1.5)看做是辅助的.前面已分别利用方程(1.1.1)和(1.1.2)导出方程(1.1.4)和(1.1.7).很容易看出,再将方程(1.1.3)代入方程(1.1.7),即可得到方程(1.1.5).当然,方程(1.1.4)和(1.1.5)仍然是电磁场的基本规律,仍然必须得到满足.但是由于以上关系,在一般情况下独立方程得到满足时,辅助方程也能得到满足.

当用数学形式把电磁场的运动规律表示出来时,就暗含着对所涉及物理量的某种性态上的假定,以保证能够完成所需要的数学运算.在以后的讨论中,还要对这些物理量进行更多形式的数学运算,为了避免重复,特在此处一并说明.一般地,假定相关的物理量都是单值且有限的,而且有足够的连续性和可微性,

可以自由地交换积分和微分的顺序,只在媒质的不连续处才出现特殊情况.在遇到特殊情况时我们会进行特殊处理.

1.1.2 积分形式的麦克斯韦方程和电磁场的边界条件

微分形式的麦克斯韦方程组反映了电磁场的局域性质,只适用于媒质连续的区域.由于积分运算对被积函数的要求比微分对函数的要求低,假定在场量总是有限值的条件下场的积分总是存在的,这使得积分形式的麦克斯韦方程的适用范围得以扩大.下面讨论如何将微分形式的麦克斯韦方程转化为积分形式.

考虑空间中的一个有限区域,其体积为 V,表面为 S,A 为 S 的一部分,A 的边界为 C.对于 V 内有定义的矢量函数 $\boldsymbol{F}$,有如下的高斯(Gauss)定理和斯托克斯(Stokes)定理成立

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{1.1.8}$$

$$\int_A (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.1.9}$$

对方程(1.1.1)和(1.1.2)在 A 上进行积分,再利用方程(1.1.9),对方程(1.1.3)和(1.1.4)在 V 上进行积分,再利用方程(1.1.8),就可得到

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{1.1.10}$$

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_A \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_A \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \tag{1.1.11}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V, \tag{1.1.12}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \tag{1.1.13}$$

这就是积分形式的麦克斯韦方程组.

积分形式的麦克斯韦方程组是对电磁场的全域描述,即表示一个区域中电磁场的总体性质.严格地讲,只有在分布论的意义上微分形式和积分形式可以相互转换.因它们表达电磁场特性的角度不同,从而各有不同的作用.

由于积分形式的麦克斯韦方程组适用于媒质的不连续处,故可用以导出媒质不连续处场量应满足的关系,即电磁场的边界条件.这种边界条件是求解微分形式的麦克斯韦方程组所必须的.设有媒质 1 和媒质 2 构成的突变交界面,分别用下角标 1 和 2 表示相应媒质中的场量,$\boldsymbol{n}$ 表示交界面上由媒质 2 指向媒质 1 的法向单位矢量,则由方程(1.1.10)~(1.1.13)可导出交界面上场量应满足的边界条件

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0, \tag{1.1.14}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_s,\tag{1.1.15}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s,\tag{1.1.16}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0,\tag{1.1.17}$$

其中 $\boldsymbol{J}_s$ 为交界面上的面电流密度，ρ_s 为交界面上的面电荷密度.

为了使一些问题得到简化，常常把一些条件理想化. 例如，当导体的导电性能良好时，视其导电率近似为无限大，并称为理想导体. 如果用 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示导体外表面的场量，则对理想导体可得如下的边界条件：

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0,\tag{1.1.18}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s,\tag{1.1.19}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_s,\tag{1.1.20}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0.\tag{1.1.21}$$

如果求解区域是开放的，则需要给出电磁场在无穷远处需满足的条件. 基于场能的有限性要求，场必须满足辐射条件.

1.1.3　频域麦克斯韦方程

以上给出的微分和积分形式的麦克斯韦方程中，场量是时间的函数，方程中包含场量对时间的微商. 我们称这种形式的方程为时域麦克斯韦方程，它适用于随时间任意变化的场量. 由傅里叶(Fourier)变换理论可知，随时间任意变化的场量可视为时谐场的叠加. 通过傅里叶变换把时域场量用相应的频域量代替，相应的麦克斯韦方程称为频域麦克斯韦方程，这样的方程适用于任一单一频率的场量.

设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ 为任一场量，其傅里叶变换记做 $\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\omega)$，即有

$$\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\tag{1.1.22}$$

其逆变换为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{1.1.23}$$

若所有场量的傅里叶变换都存在，则把变换(1.1.22)用于方程(1.1.1)～(1.1.4)，可以得到

$$\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},\omega),\tag{1.1.24}$$

$$\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega)=-\mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},\omega)+\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega),\tag{1.1.25}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},\omega)=\hat{\rho}(\boldsymbol{r},\omega),\tag{1.1.26}$$

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},\omega)=0,\tag{1.1.27}$$

这就是频域麦克斯韦方程. 原则上讲，通过解该方程组获得频域场量后，可通过逆变换(1.1.23)获得相应的时域场量. 如果把频率 ω 视做参变量，则频域麦克斯韦方程比时域麦克斯韦方程要简单得多，减少了一个自变量 t，即其解域降低了一维，同时还少了一个微商. 在相当长的一段时期内，电磁场理论都是以求解频域麦克斯韦方程为重点. 为了明确表达，我们可把这种理论称做频域电磁场理论.

为了求得电磁场的时域解，最直接的当然是求解时域麦克斯韦方程，但是困难很大. 一种替代办法是先求解频域麦克斯韦方程，然后通过傅里叶逆变换而获得时域解. 但是，并不是所有频域解都能求得解析形式的傅里叶逆变换，只有少数简单的情况能够做到. 随着计算机技术的发展，麦克斯韦方程的数值求解已成为主要手段. 可以先求得频域方程的数值解，只要有覆盖所需频带的足够数据，就可以通过离散傅里叶逆变换得到近似的时域数值解. 目前，直接求解时域方程的数值方法已有了迅速的发展，并显示出更多的优越性. 所以，直接时域数值方法越来越受到更多的关注.

由于有些函数的傅里叶变换不存在，使其应用受到限制. 拉普拉斯(拉氏)变换有更广泛的适用性，故在电磁场理论中有时也使用拉氏变换把麦克斯韦方程或其导出方程变换到复频域进行求解，然后经逆变换而获得时域解. 对函数 $f(\boldsymbol{r},t)$ 的拉氏变换为

$$L[f(\boldsymbol{r},t)] = \int_0^\infty f(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

其中 $p=\sigma+\mathrm{i}\omega$，称为复频率. 只要假定在 $t=0$ 时函数值为零，在这一变换下麦克斯韦方程的两个旋度方程(1.1.1)和(1.1.2)成为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p) = -p\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},p),$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p) = p\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},p)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},p).$$

为了不引入新符号，这里只用变量本身表明场量所在的变量空间.

与式(1.1.24)和(1.1.25)相比较，不难发现复频域的方程与频域方程有简单的 $p\Leftrightarrow-\mathrm{i}\omega$ 对应关系. 根据这一对应关系，可以把方程和其解在两个域间方便地进行变换.

1.1.4 本构关系

观察麦克斯韦方程(1.1.1)～(1.1.5)，不难发现待求场量的个数多于方程的个数，这说明为了确定所有物理量还必须补充其他关系. 已知在真空中有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t),$$

其中 $\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\mathrm{F/m}$，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$.

在媒质中，电磁场与媒质发生相互作用，使 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 有较复杂的关系，这种关系称做本构关系. 在均匀各向同性媒质中

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P},$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}),$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为极化强度，$\boldsymbol{M}$ 为磁化强度. 对线性媒质而言有

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H},$$

其中 χ_e 为极化率，χ_m 为磁化率. 总起来可得

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{1.1.28}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{1.1.29}$$

其中

$$\varepsilon_r=1+\chi_e,\quad \varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0, \tag{1.1.30}$$

$$\mu_r=1+\chi_m,\quad \mu=\mu_r\mu_0. \tag{1.1.31}$$

ε 称为介电常数，ε_r 称为相对介电常数. μ 称为磁导率，μ_r 称为相对磁导率.

对各向异性媒质而言，介电常数和磁导率要用张量来表示，其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{1.1.32}$$

$$\boldsymbol{B}=\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}. \tag{1.1.33}$$

对于各向同性线性导电媒质存在关系

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}, \tag{1.1.34}$$

其中 σ 为电导率.

对于色散媒质，其介电常数和磁导率为频率的函数，本构关系可在频域表示为

$$\hat{\boldsymbol{D}}(\omega)=\hat{\varepsilon}(\omega)\hat{\boldsymbol{E}}(\omega), \tag{1.1.35}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\omega)=\hat{\mu}(\omega)\hat{\boldsymbol{H}}(\omega). \tag{1.1.36}$$

以上本构关系需要根据电磁场与带电粒子作用的理论来确定，在求解电磁场问题时要根据实际媒质的性质选用适当的本构关系.

§1.2　电磁场的波动方程

如上所述，对时变电磁场而言，在麦克斯韦方程组(1.1.1)～(1.1.4)中只有两个方程是独立的. 如果只考虑线性各向同性媒质，则在代入本构关系(1.1.28)和(1.1.29)后，方程(1.1.1)和(1.1.2)成为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.2.2}$$

当电流 $\boldsymbol{J}$ 为已知时,未知量只有 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$,未知场量和方程个数正好相等.方程(1.2.1)和(1.2.2)是耦合方程,可用消去法得到只含一个未知场量的方程.只含电场 $\boldsymbol{E}$ 和只含磁场 $\boldsymbol{H}$ 的两个方程分别为

$$\nabla\times\mu(\boldsymbol{r})^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.2.3}$$

$$\nabla\times\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{r})\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)+\mu(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=\nabla\times\varepsilon(\boldsymbol{r})^{-1}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.2.4}$$

由于它们是由基本方程导出的,其中的任何一个都是完整的.对于非均匀媒质中的电磁场,可以求解其中一个方程而获得,它们都可看做基本方程而等效于原来的麦克斯韦方程.在一般情况下,只需求解其中一个方程,另一个场量可由相应的麦克斯韦方程来决定.

事实上,由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 除了满足两个基本方程之外,还需满足两个辅助方程.而且,其 6 个分量不是彼此线性独立的,这使得在很多电磁场问题中只需求得任意两个分量,就能完全确定全部场量.

如果 ε 和 μ 与 $\boldsymbol{r}$ 无关,即媒质为均匀的,则可以分别将其与旋度算符交换位置,由方程(1.2.3)和(1.2.4)得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.2.5}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.2.6}$$

进一步利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla^2\boldsymbol{F}$,以及方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon}\rho,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0.$$

上面两个方程又可写做

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho(\boldsymbol{r},t), \tag{1.2.7}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t). \tag{1.2.8}$$

式(1.2.3),(1.2.5)和(1.2.7)为电场波动方程,而式(1.2.4),(1.2.6)和(1.2.8)则为磁场的波动方程,针对不同的问题可选用不同形式的方程.如果考虑的是不存在源的区域,可得齐次波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.2.9}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{1.2.10}$$

这时电场和磁场的波动方程具有相同的形式.

波动方程的求解与源的分布和形式以及解域的形状有很大的关系，一般讲直接求解有很大的困难.

求解波动方程的一种简化方式是把方程转化到频域，在频域它们具有较简单的形式. 频域方程可由频域麦克斯韦方程导出，也可以由波动方程经傅里叶变换直接得到.

对于非均匀各向同性媒质，相应于式(1.2.3)和(1.2.4)的频域波动方程为

$$\nabla\times\mu(\boldsymbol{r})^{-1}\,\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) - \omega^2\varepsilon(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{1.2.11}$$

$$\nabla\times\varepsilon(\boldsymbol{r})^{-1}\,\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) - \omega^2\mu(\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla\times\varepsilon(\boldsymbol{r})^{-1}\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega). \tag{1.2.12}$$

对于均匀各向同性媒质，则有

$$\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) - k^2\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{1.2.13}$$

$$\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) - k^2\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla\times\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{1.2.14}$$

或

$$\nabla^2\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) + k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\hat{\rho}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{1.2.15}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) + k^2\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) = -\nabla\times\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{1.2.16}$$

其中 $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$.

与时域波动方程相比，频域波动方程隐去了时间变量，变为亥姆霍兹(Helmholtz)型方程，这类方程的求解已相对简单.

§1.3　电磁场的标势和矢势

在电磁场理论的发展过程中，为了简化电磁场方程引入了一些辅助函数，用得较广的是标量势函数和矢量势函数，至今还被广泛的应用. 下面就各向同性均匀媒质问题加以讨论.

由矢量场的理论可知，任何矢量场的旋度都是无散的，从而必可把无散矢量场表示为另一矢量场的旋度场. 由麦克斯韦方程(1.1.4)可知，$\boldsymbol{B}$ 为无散场，从而可引入一矢量场 $\boldsymbol{A}$，而把 $\boldsymbol{B}$ 表示为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1.3.1}$$

把它代入到方程(1.1.1)，便有

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{1.3.2}$$

又因任意标量场的梯度都是无旋的，故无旋矢量场必可表示为一标量场的梯度场. 现在引入一标量场 ϕ，由式(1.3.2)可知，下式成立

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi. \tag{1.3.3}$$

所引入的辅助函数 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 分别称为电磁场的矢势和标势.

但是，由式(1.3.1)所定义的 $\boldsymbol{A}$ 不是唯一的，可在其上面加上任一标量函数的梯度. 所幸的是，这一点并不影响所决定的电磁场的唯一性. 我们重新定义矢势，引入一标量函数 ψ，令

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi. \tag{1.3.4}$$

把它代入式(1.3.1)，可得

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}'. \tag{1.3.5}$$

再把式(1.3.4)代入式(1.3.3)，只要令

$$\phi'=\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{1.3.6}$$

就得到

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}=-\nabla\phi' \tag{1.3.7}$$

由此可以看出，以 ϕ' 和 $\boldsymbol{A}'$ 作为标势和矢势与用 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 作为标势和矢势所表示的电磁场是一样的. 两种势函数是按式(1.3.4)和(1.3.6)进行变换，它们被称做规范变换. 电磁场在这种变换下的不变性称为规范不变性，函数 ψ 称为规范函数. 利用规范函数的任意性，可以灵活地调整 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 之间的关系，这为简化 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 所满足的方程提供了方便.

我们的目的是引入辅助函数标势和矢势，由它们来决定电磁场. 下面的工作是导出标势和矢势应该满足的方程. 前面在引入标势和矢势时已经使之满足了麦克斯韦方程的式(1.1.4)和(1.1.1)，可利用另外两个方程找到所需的关系. 为此把式(1.3.1)和(1.3.2)代入式(1.1.2)和(1.1.3)，并利用本构关系(1.1.28)和(1.1.29)，便可得到

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)+\boldsymbol{J},$$

$$\varepsilon\nabla\cdot\left(\nabla\phi+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=-\rho.$$

利用恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla^2\boldsymbol{F}$，以上两式又可改写为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right), \tag{1.3.8}$$

$$\nabla^2\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \tag{1.3.9}$$

显然，它们是 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 的耦合方程，比直接导出的电场和磁场的方程还要复杂. 但是，我们可以通过选择 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 之间的关系来简化这些方程. 另一方面，空间任一点的矢量场由其旋度和散度唯一地确定. 式(1.3.1)已经给出了 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，为了使 $\boldsymbol{A}$ 唯一地确定，还要给出其散度. 为了简化 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 的方程，$\boldsymbol{A}$ 的散度应该取下面的形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{1.3.10}$$

在这样的规定下，便可得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{J}, \tag{1.3.11}$$

$$\nabla^2\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{1.3.12}$$

式(1.3.10)称为洛伦兹(Lorentz)规范条件，在此条件下 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 独立地满足各自的方程，而且其形式也得到了简化. 这样，我们有了一种间接求解电磁场的方法，即先通过两个相对简单的波动方程求得 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ，然后通过下面的关系求得电场和磁场

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{1.3.13}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{1.3.14}$$

以上所有场量均是 $\boldsymbol{r}$ 和 t 的函数，所有运算都是在时域进行的，故以上是时域方法.

辅助函数的求解也可以在频域中进行，不难推知，方程(1.3.11)和(1.3.12)在频域的形式为

$$\nabla^2\hat{\boldsymbol{A}} + k^2\hat{\boldsymbol{A}} = -\mu\hat{\boldsymbol{J}}, \tag{1.3.15}$$

$$\nabla^2\hat{\phi} + k^2\hat{\phi} = -\frac{\hat{\rho}}{\varepsilon}. \tag{1.3.16}$$

洛伦兹规范条件成为

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}} = \mathrm{i}\omega\varepsilon\mu\hat{\phi}. \tag{1.3.17}$$

求得 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\hat{\phi}$ 后，即可由下式决定频域电磁场

$$\hat{\boldsymbol{E}} = -\nabla\hat{\phi} + \mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{A}}, \tag{1.3.18}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\hat{\boldsymbol{A}}. \tag{1.3.19}$$

在这里,标势 ϕ 和矢势 $\boldsymbol{A}$ 仅起到辅助求解电磁场的作用,在量子电动力学中它们具有更深刻的物理意义. 而且,在电磁场理论中电磁场的规范也不是唯一的.

在电磁场理论中,与上面讨论的电性源——电流和电荷相对应,也引入等效的磁性源,如磁流密度 $\boldsymbol{M}$ 和磁荷密度 ρ_m. 在只存在磁源时,麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.3.20}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t), \tag{1.3.21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=0, \tag{1.3.22}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\rho_m(\boldsymbol{r},t). \tag{1.3.23}$$

为求解以上方程方便也可引入相应的势函数 $\boldsymbol{A}_m$ 和 ϕ_m,分别称为矢量电势和标量磁势. 为了区别,前述的 $\boldsymbol{A}$ 和 ϕ 就分别称为矢量磁势和标量电势. 矢量电势和标量磁势与电磁场的关系为

$$\boldsymbol{D}=-\nabla\times\boldsymbol{A}_m, \tag{1.3.24}$$

$$\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}=-\nabla\phi_m. \tag{1.3.25}$$

它们所满足的方程则为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_m-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_m}{\partial t^2}=-\varepsilon\boldsymbol{M}, \tag{1.3.26}$$

$$\nabla^2\phi_m-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi_m}{\partial t^2}=-\frac{\rho_m}{\mu}. \tag{1.3.27}$$

同时还要满足洛伦兹(Lorentz)规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m=-\varepsilon\mu\frac{\partial\phi_m}{\partial t}. \tag{1.3.28}$$

至于在频域的关系,则很容易由以上方程导出.

§1.4 非齐次波动方程的积分解——推迟势

在上面两小节中,针对各种不同的情况导出了多种形式的波动方程. 针对不同情况求得这些方程的解,是电磁场理论的根本任务. 一般来讲,这些方程的求解是很困难的. 下面就一些具有较简单形式的波动方程求出其积分形式的解,作为解决问题的一个步骤,为以后进一步解决更复杂的问题作一定的准备.

1.4.1 自由空间 ∇^2+k^2 算子的格林函数

观察前面所导出的适用于均匀各向同性媒质中电磁场及其标势和矢势所满

足的波动方程,如果把矢量方程在直角坐标系中进行分解,则各分量方程可以统一地写成如下的形式

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\boldsymbol{r},t) = -S(\boldsymbol{r},t), \tag{1.4.1}$$

其中 $u(\boldsymbol{r},t)$代表电场、磁场或矢势的任一分量,当然也可代表标势本身. $S(\boldsymbol{r},t)$代表各方程右侧各相应分量,在求解过程中把它看做是已知的,相当于场的激发源.

求方程(1.4.1)在自由(无界)空间的解采用积分变换的方法比较方便,为此对方程(1.4.1)实施如式(1.1.22)所定义的变换,便得到在频域中的形式为

$$\nabla^2 \hat{u}(\boldsymbol{r},\omega) + k^2 \hat{u}(\boldsymbol{r},\omega) = -\hat{S}(\boldsymbol{r},\omega). \tag{1.4.2}$$

为求解此方程,先要求得相应算子$\nabla^2 + k^2$ 的格林(Green)函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,它满足点源的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + k^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{1.4.3}$$

该方程具有平移对称性,只需求解 $\boldsymbol{r}'=0$ 的情形,这时的方程为

$$(\nabla^2 + k^2) G(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}). \tag{1.4.4}$$

当 $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ 时,以上方程为齐次亥姆霍兹方程,它的解可以表示为

$$G(r) = A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} + B\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}, \tag{1.4.5}$$

其中 A 和 B 为待定系数. 如果我们只关心离开源的波,只取第一项即可(下面会看出),于是令 $B=0$,则有

$$G(r) = A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}. \tag{1.4.6}$$

为了确定待定常数 A,把式(1.4.6)代入式(1.4.4),并在以坐标原点为圆心,ε为半径的小球 V_ε 中求积分,S_ε 为 V_ε 的表面积. 当令 $\varepsilon \to 0$ 时,得到

$$\int_{V_\varepsilon} \nabla\cdot\nabla\left(A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)\mathrm{d}V + k^2\int_{V_\varepsilon} A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V = -1.$$

由于 $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$,当 $r\to 0$ 时,上式左侧的第二项为零,而第一项为

$$\begin{aligned}\int_{V_\varepsilon} \nabla\cdot\nabla\left(A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)\mathrm{d}V &= \oint_{S_\varepsilon} A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}S \\ &= \lim_{r\to 0} 4\pi r^2 A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} = -4\pi A.\end{aligned}$$

综合以上结果有 $A=\frac{1}{4\pi}$,于是

$$G(r) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}. \tag{1.4.7}$$

如果点源不在坐标原点，r 表示点源到观察点的距离，即 $r=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，其中 $\boldsymbol{r}'$ 为源矢. 因此，三维空间算子 ∇^2+k^2 的格林函数可一般地表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{1.4.8}$$

1.4.2 标量波动方程的积分解

利用已经求得的格林函数，就可以求得方程(1.4.2)的积分解，再经过傅里叶逆变换，即可求得标量波动方程(1.4.1)的积分解.

为了利用格林函数求得方程(1.4.2)的积分解，先用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 乘以方程(1.4.2)两侧，再用 $\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega)$ 乘以方程(1.4.3)的两侧，然后将所得结果对应相减并在包含 $\hat{S}(\boldsymbol{r},\omega)$ 分布区域在内的体积 V 上积分，便得

$$\int_V [G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\nabla^2\hat{u}(\boldsymbol{r}) - \hat{u}(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V$$
$$= -\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{S}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \int_V \hat{u}(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V. \tag{1.4.9}$$

在上式中，$\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega)$ 和 $\hat{S}(\boldsymbol{r},\omega)$ 中的 ω 因为仅为参变量，临时把 ω 隐去了. 利用格林公式

$$\int_V [\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi]\mathrm{d}V = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

和 δ 函数的性质，由式(1.4.9)可得

$$\hat{u}(\boldsymbol{r}') = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{S}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + \oint_S \left(G\frac{\partial\hat{u}}{\partial n} - \hat{u}\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S. \tag{1.4.10}$$

如果 V 为有限区域，只要场满足齐次边界条件，上式的面积分应为零. 对自由(无界)空间的问题，可令 $V\to\infty$，从而 $S\to\infty$，只要 $\hat{S}(\boldsymbol{r})$ 的分布是在有限区域，场应满足辐射条件，也会使面积分部分为零. 于是可得

$$\hat{u}(\boldsymbol{r}') = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{S}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V. \tag{1.4.11}$$

由于我们通常用 $\boldsymbol{r}'$ 表示源的位置，上式中应该把 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 调换. 很容易证明式(1.4.8)所表示的格林函数具有对称性，即 $G=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r})$，所以把 $\boldsymbol{r}'$ 与 $\boldsymbol{r}$ 对调后，便得到

$$\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega) = \int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{S}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'. \tag{1.4.12}$$

为了最终求得方程(1.4.1)的积分解，需对上式求式(1.1.23)所表示的傅里叶逆变换，即

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{S}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_V \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}\hat{S}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}V',$$

其中 $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. 令 $t'=t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}$,上式方括号内就是 $\hat{S}(\boldsymbol{r}',\omega)$ 的逆变换 $S(\boldsymbol{r}',t')$. 于是得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_V \frac{S\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'. \tag{1.4.13}$$

需要指出的是,这样得的解(1.4.13)只是方程(1.4.1)的特解.

1.4.3 标势和矢势的积分解——推迟势

有了方程(1.4.1)的解,就不难从对比中求得电磁场的标势和矢势所满足方程的积分解. 把标势 $\phi(\boldsymbol{r},t)$ 的波动方程(1.3.12)与方程(1.4.1)进行比较,立即可以得到方程的解为

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'. \tag{1.4.14}$$

对于矢势而言,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 满足的波动方程(1.3.11)是一矢量方程. 若在直角坐标系中将其分解为 3 个分量所满足的方程,它们分别都具有式(1.4.1)的形式,从而每个分量的解都具有式(1.4.13)的形式. 求得解以后,再把 3 个分量重新组合为矢量形式,就得到如下的解

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu\int_V \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'. \tag{1.4.15}$$

由 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 的解可以看出,位于 $\boldsymbol{r}'$ 处在 t' 时刻起作用的源,$\boldsymbol{r}$ 处观察到其作用的时刻为

$$t=t'+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v},$$

也就是比 t' 晚了 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/v$ 这一段时间. 正因如此,式(1.4.14)和(1.4.15)所表示的 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 又称做推迟势. 这样的 ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 代表了由源所发出的波,这也正是在式(1.4.5)中选第二项作为方程(1.4.4)特解的原因.

正如前面指出的,式(1.4.14)和(1.4.15)所表示的仅是方程(1.3.11)和(1.3.12)的特解,其通解还要加上相应齐次方程的解 ϕ_0 和 $\boldsymbol{A}_0$,它们代表原有的电磁场. 因此,在辐射问题中,ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 完全由辐射源决定,应取 $\phi_0=\boldsymbol{A}_0=0$. 而在散射和反射问题中,由于有外来电磁场与电荷电流相互作用,ϕ_0 和 $\boldsymbol{A}_0$ 就不能等于

零，而代表外来的电磁场.

对于矢量电势 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$，把方程(1.3.26)与(1.4.1)对比，就不难得到其积分解的形式

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\int_V \frac{\boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V', \tag{1.4.16}$$

对标量磁势 ϕ_{m}，也有类似的结果.

§1.5　时域电磁场的几个基本定理

麦克斯韦方程概括了电磁场的基本规律，在运用它解决各种电磁场问题的过程中，人们更加深了对电磁场特性的认识，并得到了一些具有广泛意义的规律性的结论. 这些结论用定理的形式总结了出来，在电磁场理论中发挥了重要作用. 本节将介绍其中的 3 个，以便在后续章节中应用.

1.5.1　坡印亭定理

我们考虑由 S 面包围的体积 V 内的电磁场，其中的媒质用 ε,μ 表示. 如前所述，对于时变电磁场而言，麦克斯韦方程中的两个旋度方程(1.1.1)和(1.1.2)是基本的，可由这两个方程出发讨论电磁场的基本特性.

用 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(1.1.2)的两侧，可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}&=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}),\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

用 $\boldsymbol{H}$ 点乘式(1.1.1)两侧，又可得到

$$\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}). \tag{1.5.2}$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$ 及式(1.5.1)和(1.5.2)，立即可得到

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=-\left[\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)\right]. \tag{1.5.3}$$

对上式进行体积分并利用高斯恒等式，又有

$$\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V=-\oint_S(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.5.4}$$

为了解释上式的物理意义. 先来考察各项的含义. 若假定 V 内不存在场源，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 是 V 内的传导电流，则 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，于是有

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{1.5.5}$$

$\sigma\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$ 代表电场损耗的功率密度. 所以式(1.5.4)左侧表示体积 V 内总的损耗功率. 又因

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.6}$$

表示电磁场功率流密度,$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法向单位矢量,故式(1.5.4)右侧的第一项代表从 S 外流入 V 内的电磁功率. 另外,因有

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\quad w_m=\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.5.7}$$

分别表示电场能量密度和磁场能量密度,则式(1.5.4)右侧第二项表示 V 内电磁能量的随时间的下降率. 由以上分析可知,式(1.5.4)表示体积 V 内电磁能量的守恒性. 即是说,若外部流入的电磁功率等于 V 内损耗的功率,则 V 内的电磁能量保持不变. 式(1.5.4)称为积分形式的坡印亭(Poynting)定理,相应的式(1.5.3)就称为微分形式的坡印亭定理,而矢量 $\boldsymbol{P}$ 就称为坡印亭矢量.

1.5.2　唯一性定理

在求解空间一定区域内的电磁场时,需要知道在什么样的条件下场解是唯一的,这一问题由唯一性定理回答. 唯一性定理有两方面的意义: 一是在求解时要给出恰当的条件,以保证解是唯一的;二是在给定恰当求解条件的情况下,用不同方法所求得的解是等价的.

唯一性定理的内容是: 在有界区域 V 内,如果 $t=0$ 时电磁场的初始值是处处给定的,并且在 $t\geqslant 0$ 时 V 的边界 S 上电场的切向分量或磁场的切向分量(或 S 的一部分的电场的切向分量而其他部分磁场的切向分量)也是给定的,则在 $t>0$ 时 V 内的电磁场就由麦克斯韦方程唯一地确定.

唯一性定理可用反证法加以证明. 如果 V 内的场由源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 所激发,若在给定的上述初始和边界条件下 V 内的场解不是唯一的,即存在两组解,$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 及 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$,它们都满足麦克斯韦方程(1.1.1)和(1.1.2). 令

$$\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2,\quad \delta\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2, \tag{1.5.8}$$

则 $\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\delta\boldsymbol{H}$ 满足无源的麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\nabla\times\delta\boldsymbol{E}&=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{H},\\ \nabla\times\delta\boldsymbol{H}&=\sigma\delta\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{E},\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

其中 ε,μ 和 σ 是描述 V 内媒质的参量.

根据坡印亭定理,立即可以得到

$$\oint_S(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=-\int_V\sigma\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V. \tag{1.5.10}$$

上式两侧在 0 到 $t>0$ 间对 t 积分并考虑到 $\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\delta\boldsymbol{H}$ 的初始值为零，即可得

$$\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V$$

$$=-\int_0^t\int_V\sigma\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t-\int_0^t\oint_S(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t. \tag{1.5.11}$$

考虑到上式右侧第一项积分值总是大于等于零，故由式(1.5.11)又可得到

$$\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V\leqslant-\int_0^t\oint_S(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t. \tag{1.5.12}$$

由于

$$(\delta\boldsymbol{E}\times\delta\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}=-\delta\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{n}\times\delta\boldsymbol{H})=\delta\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{n}\times\delta\boldsymbol{E}),$$

根据给定的边界条件，在 S 上必有

$$\boldsymbol{n}\times\delta\boldsymbol{E}=0,\quad \boldsymbol{n}\times\delta\boldsymbol{H}=0,$$

于是式(1.5.12)成为

$$\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V\leqslant 0. \tag{1.5.13}$$

由于上式中的被积函数总是为正，为使上式得到满足，必须 $\delta\boldsymbol{E}=0$，$\delta\boldsymbol{H}=0$，亦即 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$，这就证明了，在给定了所述初始条件和边界条件后，区域 V 内电磁场的麦克斯韦方程解是唯一的.

1.5.3 等效原理

在求解电磁场问题时，等效原理可以使问题在一定程度上得到简化. 等效原理是唯一性定理的直接应用，通过设置等效源，保证在改变求解区域部分空间的源和媒质特性的同时，保持其余部分空间的场不变，这就为问题的解决提供了灵活性. 这里所说的“等效”，是指如果有两种不同(如分布、大小和类型)的源在给定的区域内产生相同的场，就称这两种源对该区域的场解是等效的. 本小节将讨论几种有代表性的情况，因为其中用到了场的叠加原理，所以假定媒质为线性的.

在图 1-1(a)中，有封闭曲面 S 将解域划分为两部分，分别用 $\boldsymbol{J}_o$，$\boldsymbol{M}_o$ 和 $\boldsymbol{J}_i$，$\boldsymbol{M}_i$ 表示外部和内部区域存在的源，所有的源在整个场区所产生的场用 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 表示. 在图 1-1(b)中，如果将内部区域的源改为 $\boldsymbol{J}'_i$ 和 $\boldsymbol{M}'_i$，必使内、外部区域的场都发生变化，将变化后内部区域的场记为 $\boldsymbol{E}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$. 为了使外部区域的场保持 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$ 不变，可在 S 上设置适当的等效源 $\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$. 根据唯一性定理可知，只需保证所加的等效源在 S 上满足边界条件

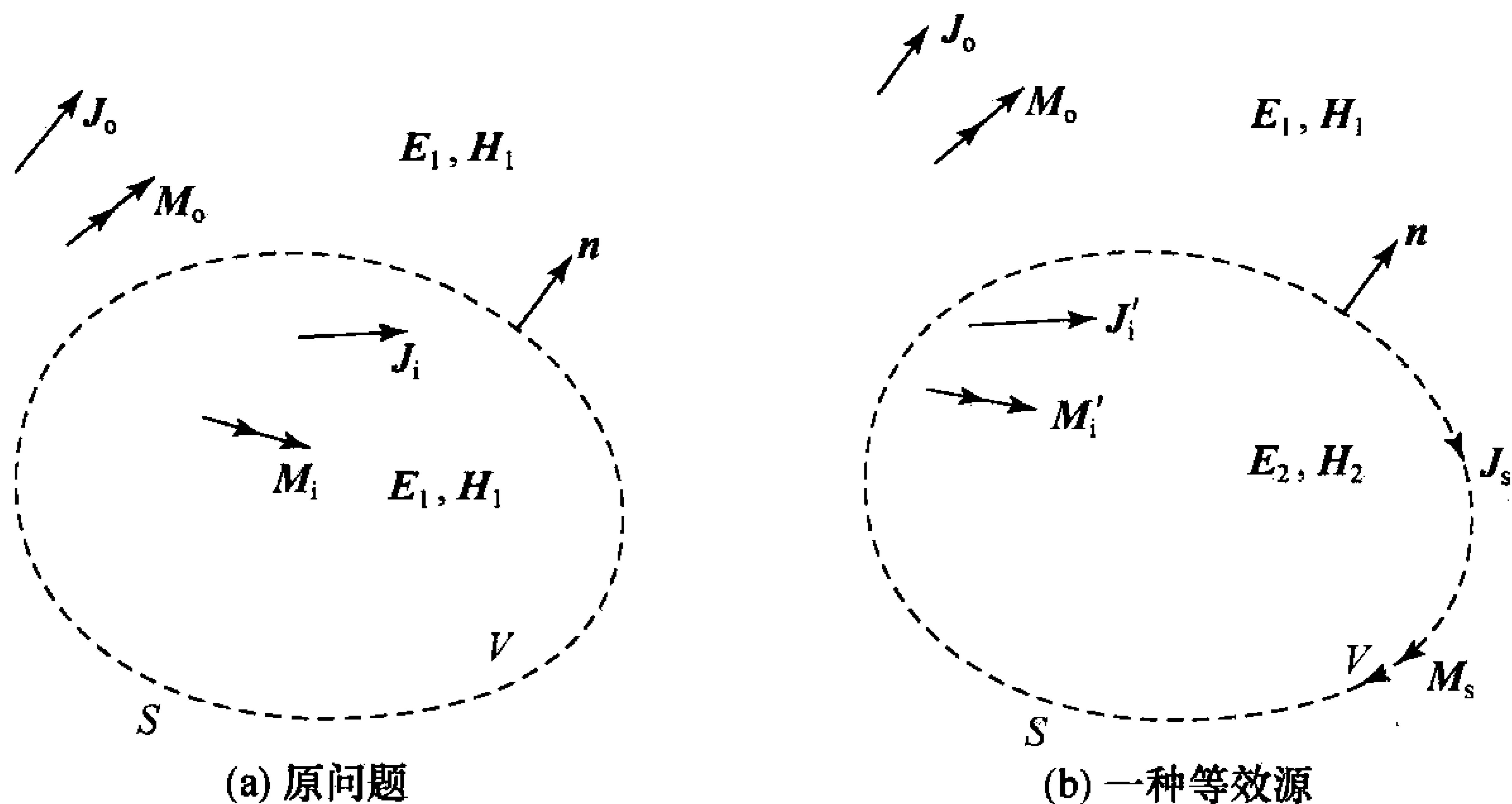


图 1-1　等效原理

$$n \times (H_1 - H_2) = J_s, \quad n \times (E_1 - E_2) = -M_s. \tag{1.5.14}$$

可见,如图 1-1(a)和(b)所示的情况在 S 的外部区域是等效的. 类似地,如果保持内部区域的源 J_i,M_i 和场 E_1,H_1 不变,而外部区域的源变为 J_o'和 M_o'并使改变后外部区域的场为 E_2 和 H_2,则在 S 上设置的等效源只需与图 1-1(b)中的符号相反. 显然,在第一种情况下,等效源所产生的场只向外部区域辐射.

如果仅有内部区域的源存在,其在内、外区域所产生的场记为 E 和 H,则当源变为零时,E 和 H 都变为零. 若要保持外部区域的场不变,需在 S 上设置等效源 J_s 和 M_s,且其分别满足

$$n \times H = J_s, \quad n \times E = -M_s. \tag{1.5.15}$$

这种等效在对内部区域的场不感兴趣时非常有用,不仅所加的边界条件变得简单,更重要的是,由于规定 S 内的场为零,在等效问题中可以任意假定其内部的媒质特性,对 S 外的场都不会有任何影响. 最简单的有以下三种情况:

(1) 选择 S 内的等效媒质与 S 外的媒质相同,这样就将问题归结为整个空间是均匀的;

(2) 选择 S 内的等效媒质为理想导体,这时等效源 J_s 被理想导体短路,只剩下 M_s 的贡献;

(3) 选择 S 内的等效媒质为理想磁导体,这时等效源 M_s 被理想磁导体短路,只剩下 J_s 的贡献.

等效原理的灵活运用可为求解复杂电磁场问题提供诸多方便.

§1.6　时域电磁场的因果律

求电磁场时域解的一种常用方法是,先求得频域解而后经傅里叶逆变换得

到时域解.这里的一个重要问题,是在变换过程中不能违背物理原理的基本要求,即所得解必须满足因果律.通常理解的因果律,是一个作用在未到达被作用体之前,被作用体不能出现这个作用所引起的反应.下面就因果律所施加的限制进行简要的讨论.

1.6.1 希尔伯特变换

在研究一些物理系统时,我们常常利用一些复值函数,如复介电常数、复阻抗等,它们仅当自变量为实数时才具物理意义.在很多情况下,我们有可能从支配系统的基本规律出发,得到这些函数当自变量为复数时其普遍性质的某些知识.例如,在复平面的某个区域,此函数是解析的.因果性是一种支配规律,它能决定复变函数的某些性质,如导出具有直接物理意义的实数量之间应满足的关系,而这些关系就是支配规律的一种表现.所谓实数量之间的关系,在数学上就是希尔伯特(Hilbert)变换.下面先从数学上导出希尔伯特变换,然后再讨论它和实际物理问题之间的联系.

设 $f(z)$ 为在上半平面解析的一个复变函数,且当 $|z|\to\infty$ 时 $|f(z)|\to 0$.设 C 为如图 1-2 所示的 $z=x+\mathrm{i}y$ 平面的闭合围道,ξ 为实轴上的任一点.

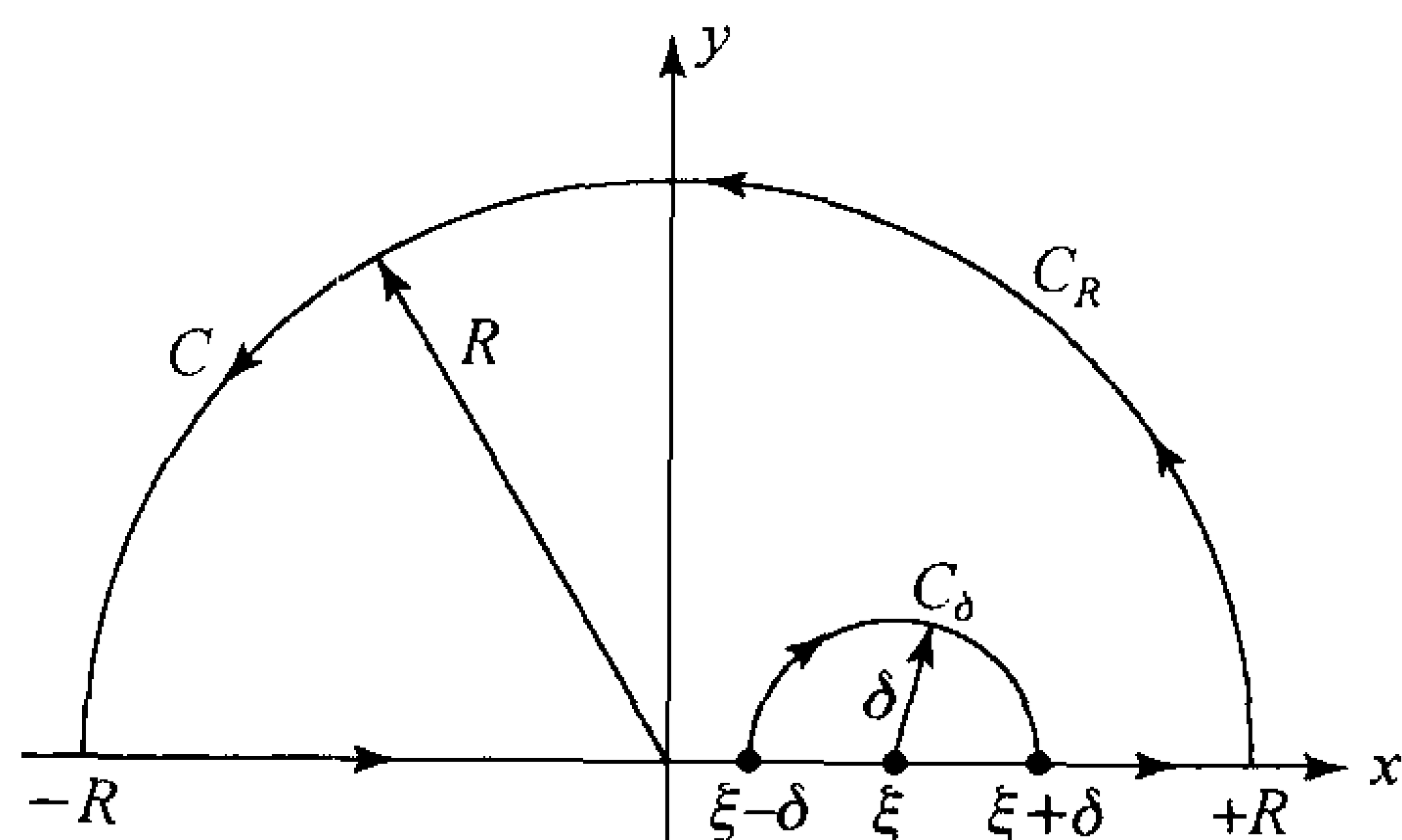


图 1-2 z 平面上的积分围道

根据柯西(Cauchy)定理,我们有

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z=\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z+\int_{C_\delta}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z$$
$$+\int_{-R}^{\xi-\delta}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z+\int_{\xi+\delta}^{R}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z=0. \qquad (1.6.1)$$

现在考虑当 $R\to\infty$,$\delta\to 0$ 时上式的结果.首先由所给定的条件,根据约当(Jordan)引理,可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z=0,$$

而

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\\delta\to 0}}\left(\int_{-R}^{\xi-\delta}+\int_{\xi+\delta}^{R}\right)\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z=\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\xi}\mathrm{d}x,\tag{1.6.2}$$

其中 P. V. 表示主值积分.

因 $f(z)$是上半平面的解析函数,故在 ξ 的邻域连续. 在 C_δ 上 $f(z)$的值可表示为 $f(\xi)+\eta$,故 C_δ 上的积分可以写做

$$\begin{aligned}\int_{C_\delta}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z&=\int_{C_\delta}\frac{f(\xi)+\eta}{z-\xi}\mathrm{d}z\\&=f(\xi)\int_{C_\delta}\frac{1}{z-\xi}\mathrm{d}z+\eta\int_{C_\delta}\frac{1}{z-\xi}\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中

$$\int_{C_\delta}\frac{1}{z-\xi}\mathrm{d}z=\ln(z-\xi)\Big|_{C_\delta}=\ln(z-\xi)\Big|_{\delta e^{i\pi}}^{\delta e^{i0}}=-\mathrm{i}\pi,$$

而 η 随 $\delta\to 0$ 而趋于零,故有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{f(z)}{z-\xi}\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\pi f(\xi).\tag{1.6.3}$$

综合以上各点,即可由式(1.6.1)得到

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\xi}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\pi f(\xi).\tag{1.6.4}$$

由于 $f(x)$为复值函数,可令 $f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$,则

$$\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)+\mathrm{i}v(x)}{x-\xi}\mathrm{d}x=\mathrm{i}\pi u(\xi)-\pi v(\xi),$$

由此进一步得到

$$u(\xi)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(x)}{x-\xi}\mathrm{d}x,\tag{1.6.5}$$

$$v(\xi)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)}{x-\xi}\mathrm{d}x.\tag{1.6.6}$$

这对积分称为希尔伯特变换. 它是一个上半平面解析的函数在实轴上边值的实部和虚部之间所应满足的关系.

1.6.2 线性系统的因果关系

在实践中总是希望设计出性能尽量理想的电磁系统,但不是任何设想的系统都是能实现的. 一个线性电磁系统可实现性的根本限制之一,是它必须满足因果律. 由于因果律的限制,表征线性系统性能的响应函数的实部与虚部之间必须满足一种相互制约的关系.

设有一时不变线性电磁系统,其冲激响应为 $h(t)$,设冲激作用开始于 $t=0$,因果律要求在 $t<0$ 时 $h(t)$必须等于零,亦即 $h(t)$必须满足

$$h(t)=h(t)u(t),\tag{1.6.7}$$

其中 $u(t)$为单位阶跃函数.设

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = R(\omega) + \mathrm{i}X(\omega), \tag{1.6.8}$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}$$

和关系式

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1(\Omega)\hat{f}_2(\omega-\Omega)\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\hat{f}_1(\omega) * \hat{f}_2(\omega),\end{aligned}$$

则由式(1.6.7)可得

$$\begin{aligned}R(\omega) + \mathrm{i}X(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left\{[R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)] * \left[\pi\delta(\omega) - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[R(\omega) * \pi\delta(\omega) - X(\omega) * \frac{1}{\omega}\right] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left[X(\omega) * \pi\delta(\omega) + R(\omega) * \frac{1}{\omega}\right] \\ &= \left[\frac{R(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\Omega)}{\omega-\Omega}\mathrm{d}\Omega\right] \\ &\quad + \mathrm{i}\left[\frac{X(\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\Omega)}{\omega-\Omega}\mathrm{d}\Omega\right],\end{aligned}$$

进而有关系

$$R(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(\Omega)}{\omega-\Omega}\mathrm{d}\Omega, \tag{1.6.9}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\Omega)}{\omega-\Omega}\mathrm{d}\Omega. \tag{1.6.10}$$

这是一种希尔伯特变换关系,其导出的依据是冲激响应需满足的因果关系.所以,这种关系揭示了因果系统的响应特性必须遵守的规律.也就是说,一个实际可实现的线性系统的响应函数的实部和虚部不是相互独立的,不是可以任意规定的,一定要满足因果律所加的制约.

1.6.3 克莱默-克洛尼关系

电磁波在媒质中传播,必与媒质发生相互作用,这种作用反映在媒质参数上.当电磁波与媒质相互作用时,也需遵守因果律.对于介质而言,因果律就表现在介电常数所满足的克莱默-克勒尼希(Kromers-Kronig)关系上.

对于各向同性介质,电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间在频域满足以下关系

$$\hat{\boldsymbol{D}}(\omega)=\hat{\varepsilon}(\omega)\hat{\boldsymbol{E}}(\omega), \tag{1.6.11}$$

在时域,这一关系应表示为一个卷积

$$\boldsymbol{D}(t)=\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t-\tau)\boldsymbol{E}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.6.12}$$

为使 $\boldsymbol{D}(t)$成为表因函数(即满足因果关系的函数),$\varepsilon(t)$和 $\boldsymbol{E}(t)$也必须是表因函数.因为要求 $\varepsilon(t)$是表因函数,使得它的傅里叶变换 $\hat{\varepsilon}(\omega)$必受一定条件的约束.具体地说,傅里叶变换关系为

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varepsilon}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{1.6.13}$$

如果当$|\omega|\to\infty$时,$\hat{\varepsilon}(\omega)\to\hat{\varepsilon}(\infty)$,那么

$$\hat{\varepsilon}(\omega)=[\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)]+\hat{\varepsilon}(\infty), \tag{1.6.14}$$

则式(1.6.13)可以写成

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{[\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)]+\hat{\varepsilon}(\infty)\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega+\delta(t)\hat{\varepsilon}(\infty).\end{aligned} \tag{1.6.15}$$

由于 $\varepsilon(t)$是实函数,因而 $\hat{\varepsilon}(\infty)$也应该是一个实函数.因 ε 表示电磁场的一种作用,为满足因果律的要求,必须有在 $t<0$ 时 $\varepsilon(t)=0$.又因 $t\neq0$ 时 $\delta(t)=0$,故由式(1.6.15)可知,在 $t<0$ 时,其中的积分项也应等于零.另一方面,由于$\omega\to\mathrm{i}\infty$时 $\hat{\varepsilon}(\omega)\to\hat{\varepsilon}(\infty)$,使得式(1.6.15)中的积分当 $t<0$ 时在围道 C_∞ 上也等于零,其中 C_∞ 为复 ω 平面的上半平面半径为无穷大时半圆,如图 1-3 所示.

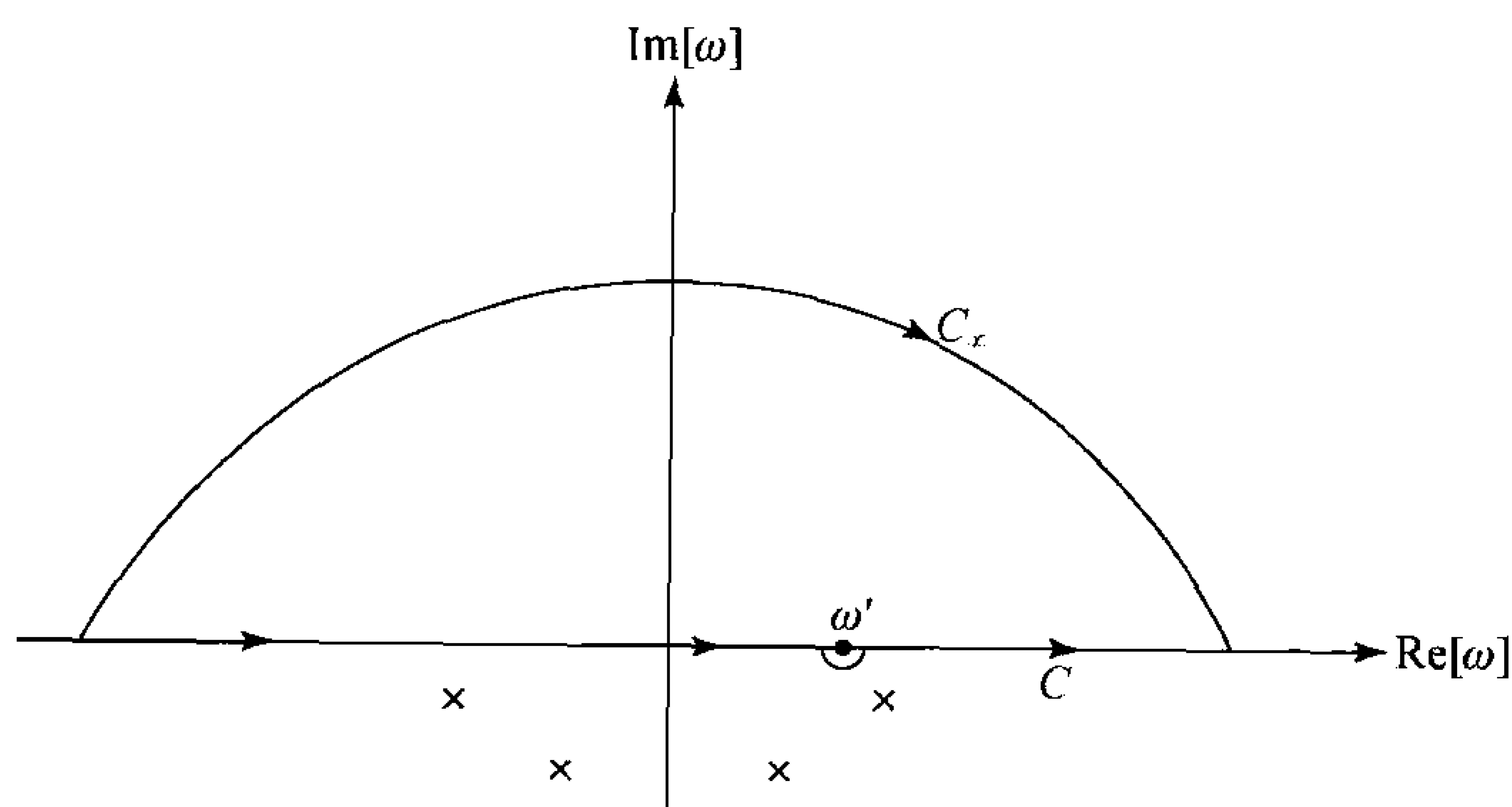


图 1-3　在复 ω 平面上的积分围道

综合以上两点可知,函数 $\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)$在上半平面无限大封闭围道 $C-C_\infty$ 上的积分在$t<0$ 时为零,即 $\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)$在复 ω 平面的上半平面是解析的.这意味着 $\hat{\varepsilon}(\omega)$只在复 ω 平面的下半平面才能有奇点.

令

$$\hat{\varepsilon}(\omega)=\hat{\varepsilon}'(\omega)+\mathrm{i}\hat{\varepsilon}''(\omega),$$

则根据 $\hat{\varepsilon}(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)$在上半平面解析的结果和希尔伯特变换，立刻可以得到

$$\hat{\varepsilon}'(\omega)-\hat{\varepsilon}(\infty)=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}''(\omega')}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega',\tag{1.6.16}$$

$$\hat{\varepsilon}''(\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{\varepsilon}'(\omega')-\hat{\varepsilon}(\infty)}{\omega'-\omega}\mathrm{d}\omega'.\tag{1.6.17}$$

这就是克莱默-克勒尼希关系，它是因果律对 $\varepsilon(t)$限制的结果. 这一关系说明满足因果律的频域介电常数的实部和虚部不是完全相互独立的，存在一种相互制约的关系.

1.6.4 因果律与积分围线

在求解电磁场问题时，如果已求得了某场量的频域解 $\hat{\psi}(\omega)$，则可通过傅里叶逆变换求得其时域解，即

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{1.6.18}$$

这里还有一个重要问题，就是这种变换不能与因果律相违. 为了保证这一点，式(1.6.18)所示傅氏逆变换的积分线必须定义在 $\hat{\psi}(\omega)$的所有奇点的上方. 在这种情况下，如果$|\omega|\to\infty$时，$\hat{\psi}(\omega)\to 0$，则对 $t<0$ 时，式(1.6.18)的积分路径就可改为 $\omega\to\mathrm{i}\infty$. 仍保证 $t<0$ 时 $\psi(t)=0$，以保证因果律成立.

对于 $t>0$，积分路径可改为 $\omega\to-\mathrm{i}\infty$，但这时必须加上奇点的贡献，如图1-4 所示.

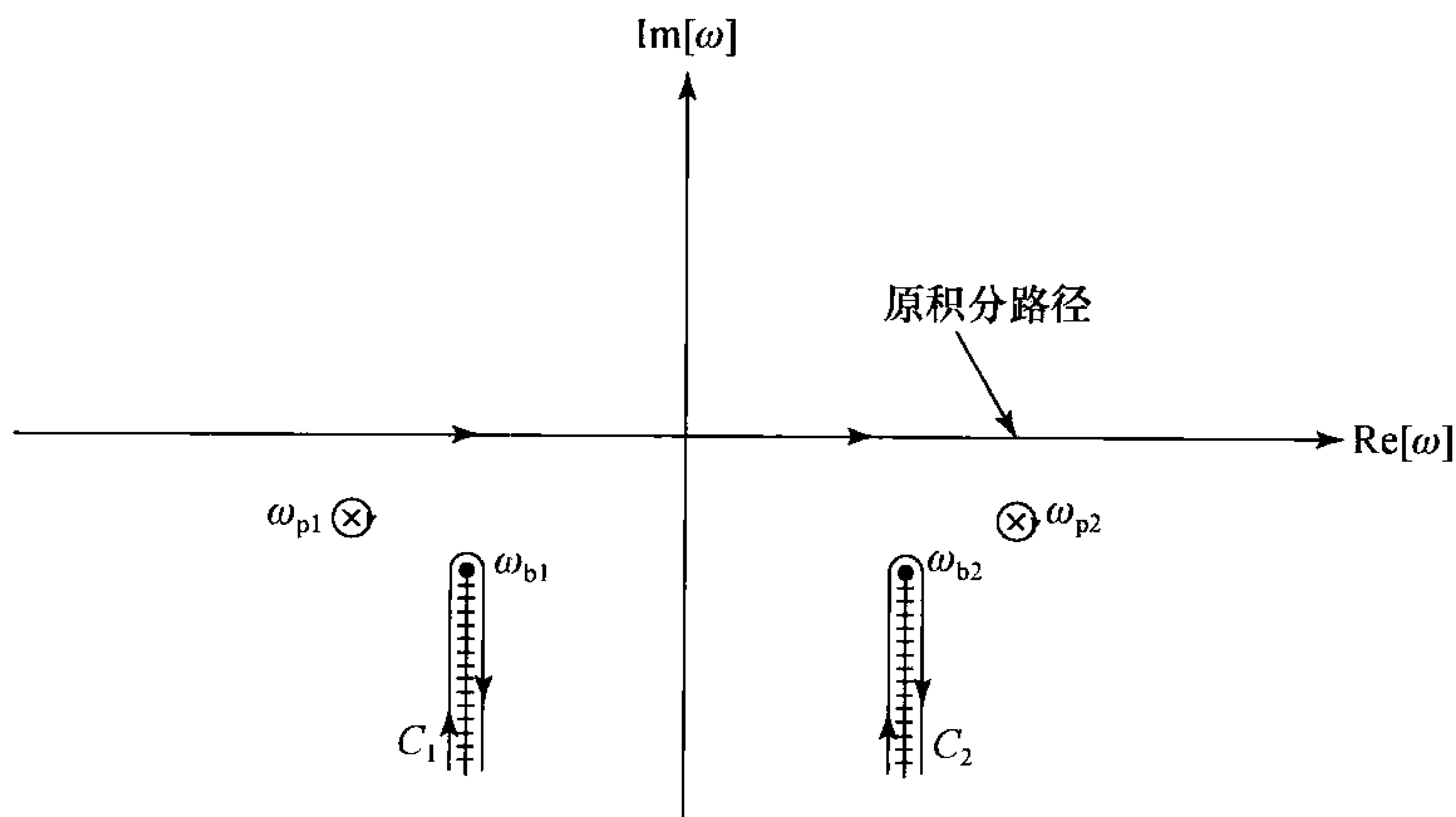


图 1-4 傅里叶逆变换的积分路径

假设有 N 个极点 $\omega_{pi}(i=1,2,\cdots,N)$ 和 M 个支点 $\omega_{bi}(i=1,2,\cdots,M)$，则有

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N}A_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{pi}t}+\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\hat{\psi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{1.6.19}$$

其中第一项是各极点留数的贡献，第二项为支点的贡献，通过沿割线的积分表示.

对于一般的有耗介质，ω_{pi} 和 ω_{bi} 处于实轴的下方；对于有源介质，奇点可能处于实轴的上方. 对于后一种情况，傅里叶逆变换的积分路径必须取在实轴的上方；而对前一种情况，积分路径取实轴就可以了.

§1.7　矢量函数空间和矢量线性算子[6,8]

现代电磁场理论已经建立在现代数学的框架之中. 由于现代数学的应用，使得对电磁场问题的描述更加合理、更加精确，解决问题的方法更加丰富，也更系统化. 现代分析数学的核心是关于函数空间和算子的理论. 由于电磁场本质上是矢量场，很自然的是用矢量函数进行描述，这就需要对矢量函数空间加以定义，同时也需要对定义在矢量函数空间中的算子的性质进行必要的讨论.

1.7.1　矢量函数的希尔伯特空间

如果能把求解电磁场的问题归结到在希尔伯特空间中求解算子方程的问题，则现代数学中的许多重要结论都能起到关键的指导作用，甚至可直接加以利用. 希尔伯特函数空间中的元素必须是平方可积的. 对单元函数 $f(t)(t\in[a,b])$ 而言，平方可积的条件是

$$\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t<\infty. \tag{1.7.1}$$

所有平方可积函数的集合，称为平方可积函数空间，用 $L^2[a,b]$ 表示.

平方可积函数是客观世界中对物理量能量有限要求的一种反映. 在电磁场理论中，电荷、电流以及各种场量的任一分量都可用标量函数描述. 基于能量有限这一事实，就可以假定这些标量函数是 $L^2[a,b]$ 中的元素. 如果对任意元素 $f_1(t),f_2(t)\in L^2[a,b]$，定义了内积

$$\langle f_1,f_2\rangle=\int_a^b f_1(t)f_2^*(t)\mathrm{d}t, \tag{1.7.2}$$

其中（ * ）表示复共轭，则 $L^2[a,b]$ 成为单元函数的希尔伯特空间.

在实际问题中，上述标量函数往往不是单变量的，而是空间坐标和时间的多变量函数. 事实上，将单变量函数希尔伯特空间的概念推广到多变量函数是很自然的. 如果 Ω 表示 R^n 中的一个子空间（R^n 为 n 维实线性空间），则可用 $L^2(\Omega)$ 表示定义在 Ω 上的平方可积函数空间. 对任意元素，$u(\boldsymbol{x})\in L^2(\Omega)$ 满足

$$\int_{\Omega} |u(\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\Omega < \infty, \ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{1.7.3}$$

若对任意元素 $u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)$，定义内积

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\boldsymbol{x}) v^*(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega, \tag{1.7.4}$$

则 $L^2(\Omega)$ 成为多元函数希尔伯特空间.

对于电磁场问题，往往必须用矢量函数来描述，因而需要建立矢量函数空间. 一般情况下，需要考虑三维空间中随时间变化的矢量，其分量是空间坐标和时间的函数. 例如，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在直角坐标系中可以表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = [E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t)].$$

考虑到电磁场在任意有限区域 $\Omega \in R^3$ 中能量有限，$\boldsymbol{E}$ 应该满足

$$\int_{\Omega} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\Omega < \infty, \tag{1.7.5}$$

通常用 $L^2(\Omega)^m$ 表示具有这种特性的矢量函数的全体所构成的集合，其中 m 表示分量的个数. 根据矢量运算规则，$L^2(\Omega)^m$ 为线性空间. 若用 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 表示 $L^2(\Omega)^m$ 中的任意矢量函数，并定义内积

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\Omega, \tag{1.7.6}$$

则 $L^2(\Omega)^m$ 成为希尔伯特矢量函数空间.

在麦克斯韦方程中以及在导出各种方程时，要对电磁场量施行旋度和散度等运算，定义了这种运算的矢量函数空间对电磁场理论具有重要的意义.

定义

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)^3\}, \tag{1.7.7}$$

若有内积

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Omega} \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}) + [\nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] \cdot [\nabla \times \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})]\} \mathrm{d}\Omega,$$

则 $H(\mathrm{curl}, \Omega)$ 为希尔伯特矢量函数空间.

定义

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)\}, \tag{1.7.8}$$

若有内积

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_{\Omega} \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}) + [\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})][\nabla \cdot \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x})]\} \mathrm{d}\Omega,$$

则 $H(\mathrm{div}, \Omega)$ 为希尔伯特矢量函数空间.

定义

$$H(\mathrm{curl}, \mathrm{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in L^2(\Omega)\} \tag{1.7.9}$$

若有内积

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \int_{\Omega} \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{x}) + [\nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] \cdot [\nabla \times \boldsymbol{v}^*(x)] + [\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] \cdot [\nabla \cdot \boldsymbol{v}^*(x)]\} \mathrm{d}\Omega,$$

则 $H(\mathrm{curl},\mathrm{div},\Omega)$为希尔伯特矢量函数空间.

由于我们所研究的时域电磁场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$，作为函数，其定义域是包括空间变量和时间变量一起构成的变量空间，故我们考虑的矢量函数的变量也应包括时间变量. 为此，在一般情况下我们把矢量函数空间表示成 $L^2(\Omega)^m \times (0,T)$，其中$(0,T)$为在所研究的问题中所感兴趣的时间段. 对希尔伯特空间也作相应的表示，如 $H(\mathrm{curl},\Omega)\times(0,T)$等，其中$(0,T)$为所感兴趣的时间段. 如果不作特殊声明，以后将仅讨论作为上述希尔伯特空间元素的电磁场.

1.7.2　矢量线性算子

在麦克斯韦方程组中，包含矢量函数的旋度运算符“$\nabla\times$”和散度运算符“$\nabla\cdot$”，它们所代表的映射可分别表示为

$$\nabla\times: L^2(\Omega)^m \to L^2(\Omega)^m, \quad \nabla\cdot: L^2(\Omega)^m \to L^2(\Omega), \tag{1.7.10}$$

在电磁场的辅助位函数中还用到了标量函数的梯度算符∇，它所代表的映射为

$$\nabla: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)^m. \tag{1.7.11}$$

由对麦克斯韦方程组的分析已知，以上任何一个算符作为算子所构成的算子方程对解决电磁场问题都不是完备的，故不作进一步讨论. 但是，在我们的假定中，这些运算都是有意义的. 在电磁场计算中起重要作用的是由以上算符组合所构成的算子.

函数空间中的映射我们称为算子，定义在希尔伯特空间中的算子对电磁场理论更具重要意义. 设 H_1 和 H_2 为两个希尔伯特空间，

$$T: D(T) \subset H_1 \to R(T) \subset H_2 \tag{1.7.12}$$

为线性算子，$D(T)$为 T 的定义域，$R(T)$为 T 的值域. 若 $T: H_1\to H_2$ 是一有界线性算子，而算子 $T^a: H_2\to H_1$，满足

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^a y\rangle, \quad x\in H_1, y\in H_2, \tag{1.7.13}$$

则称 T^a 为 T 的希尔伯特伴随(共轭)算子.

设 H 为希尔伯特空间，$T: H\to H$ 为有界线性算子，若 T 的希尔伯特伴随算子 T^a 满足 $T^a=T$，即满足

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle, \quad \forall x,y\in H, \tag{1.7.14}$$

就称 T 为希尔伯特自伴(自共轭)算子或厄米(Hermite)算子.

对时变电磁场而言，在 § 1.2 中所建立的波动方程与麦克斯韦方程是等价的，其中包含双旋度算子

$$\nabla\times\nabla\times: L^2(\Omega)^m \to L^2(\Omega)^m, \tag{1.7.15}$$

它在电磁场理论中起着重要作用.

双旋度算符代表的是偏微分运算,但其本身又具有矢量运算的性质,所以又可称之为矢量偏微分算子.在三维电磁场问题中,$m=3,\Omega\in R^3$,根据 $L^2(\Omega)^3$ 中内积的定义及算子自伴的条件可知,如果 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ 和 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 为 $L^2(\Omega)^3$ 中的任意矢量函数,则$\nabla\times\nabla\times$是自伴算子的条件为

$$\begin{aligned}&\langle\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\rangle-\langle\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}),\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\rangle\\&=\int_\Omega[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\Omega\\&=\oint_S[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\times\nabla\times\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{r})\times\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0,\end{aligned}\tag{1.7.16}$$

其中 S 为 Ω 的边界,$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法向单位矢量.上式在推导中用到了矢量格林定理.

显然,如果定义在 Ω 上的某类矢量函数使式(1.7.16)中的面积分等于零,则算子$\nabla\times\nabla\times$在由这类函数所构成的希尔伯特空间中就是自伴的.不难证明,满足下列边界条件的矢量函数类能使双旋度算子成为自伴的

(1) 第一类齐次边界条件

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=0,\quad \boldsymbol{r}\in S;$$

(2) 第二类齐次边界条件

$$\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})=0,\quad \boldsymbol{r}\in S;$$

(3) 辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}r[\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\pm\mathrm{i}k\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})]=0,\quad S\to\infty.$$

由于双旋度算符可分解为

$$\nabla\times\nabla\times=\nabla\nabla\cdot-\nabla\cdot\nabla,$$

则当解域 Ω 内不存在自由电荷时,总是有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,$$

从而使得双旋度算子退化为拉普拉斯算子$-\nabla\cdot\nabla=-\nabla^2$.不难证明,在上述条件下它也是自伴的.

除了微分算子外,在电磁场理论中还常常遇到积分算子.如果不考虑时间变量,则电磁场理论中的积分算子 $A:L^2(\Omega)^m\to L^2(\Omega)^m$ 可一般地表示为

$$(A\boldsymbol{u})(\boldsymbol{r})=\int_\Omega\overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\Omega,\tag{1.7.17}$$

其中 $\overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为并矢格林函数,且 $\overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\in L^2(\Omega\times\Omega)^{m\times m}$.我们不难证明,只要 $\overline{\overline{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\overline{\overline{G}}^T(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,积分算子 A 就是自伴的.考虑到时间变量,积分算子的形式会更复杂些.在实际求解中,要么采用积分变换把时间变量隐去,要么把时间变量单独处理,可作为参变量看待,故可在不考虑时间变量的情况下讨论积分算子的一些性质,这些性质对求解积分方程仍有重要意义.

第二章　非色散媒质中的瞬变电磁场

非色散各向同性媒质中的瞬变电磁场问题是时域电磁场理论研究成果最丰富的一部分,所发展的解析方法具有典型意义.由于瞬变电磁场问题的求解有很大难度,只有一些相对简单的情况才能求得解析解.为了深刻地认识瞬变电磁场的特有规律和求解问题的特殊方法,从最简单的情况入手是很自然的.本章将集中展现解决瞬变电磁场问题的主要解析方法,以便学习掌握.本章所涉及的媒质均为各向同性和非色散的,下文中不再每次都重复说明.

§2.1　均匀媒质中任意时变平面电磁波

如前所述,电磁场满足式(1.2.9)和(1.2.10)所表示的波动方程.这说明,时变电磁场是以波的形式存在并在空间运动,而电荷和电流就是波动电磁场的源.根据波动性质可知,已经被激发并传播出去的电磁波,即使激发它们的源已经消失,也将继续存在和传播.所以,电磁场可以脱离电荷和电流单独存在,或者说电磁波的存在不一定以电荷或电流的存在为前提.这种没有电荷和电流而存在的电磁波可称为自由电磁波.显然,自由电磁波在无耗媒质中满足齐次波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{2.1.1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{2.1.2}$$

这种方程又称为达朗贝尔(D'Alembert)方程,该方程最简单的一种特解为平面波.下面给出随时间任意变化的平面波解,并讨论平面电磁波的基本特性.

设平面波沿空间的固定方向 $\boldsymbol{m}$ 传播,$\boldsymbol{m}$ 是一个不变的空间单位矢量.若沿 $\boldsymbol{m}$ 方向的距离用 ζ 表示,$\boldsymbol{r}$ 表示空间点的位矢,则它在 $\boldsymbol{m}$ 方向的投影为

$$\zeta = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}.$$

这样,平面波的电场仅是 ζ 和 t 的函数,即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\zeta,t).$$

它所满足的波动方程可写成下面的形式

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\boldsymbol{E}(\zeta,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\zeta,t) = 0. \tag{2.1.3}$$

其中 $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. 作变量替换

$$\xi = t - \frac{\zeta}{v}, \quad \eta = t + \frac{\zeta}{v}. \tag{2.1.4}$$

方程(2.1.3)可化为

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \boldsymbol{E}(\xi, \eta) = 0. \tag{2.1.5}$$

上式依次对 ξ 和 η 积分,即可得到它的通解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_1(\xi) + \boldsymbol{E}_2(\eta) \\ &= \boldsymbol{E}_1(t - \zeta/v) + \boldsymbol{E}_2(t + \zeta/v), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

其中 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 为两个任意函数. 虽然这里没有给定它们的具体形式,只给出了普遍形式的解,但它反映了平面电磁波的一些基本特性.

不难发现,对固定时刻,E_1 在平面

$$\zeta = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r} = \text{const}$$

上为常数,这一平面为波的等相面. 对该等相面

$$\xi = t - \zeta/v = \text{const},$$

于是

$$\mathrm{d}t - \mathrm{d}\zeta/v = 0,$$

即

$$v = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}. \tag{2.1.7}$$

也就是说,等相面传播的速度为 v,故称 v 为相速度.

从另一方面看,当 t 变为 $t+\Delta t$, $\boldsymbol{r}$ 变为 $\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r}$, 为使 ξ 不变,需要满足

$$t - \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}/v = t + \Delta t - \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r})/v,$$

由此得

$$v\Delta t = \boldsymbol{m} \cdot \Delta \boldsymbol{r}.$$

这时 $\boldsymbol{r}+\Delta \boldsymbol{r}$ 仍落在同一个等相面上. 也就是说,等相面在 Δt 的时间沿 $\boldsymbol{m}$ 方向移动了 $\Delta\zeta = v\Delta t = \boldsymbol{m} \cdot \Delta \boldsymbol{r}$ 的距离,这再次得到式(2.1.7)的结果.

同样的道理可以得知,$\boldsymbol{E}_2$ 是沿 $\boldsymbol{m}$ 的反方向以相速度 v 传播的平面波. 由此可知,$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 虽然是任意函数,但它们都是具有相速度 v 的平面波,只是与时间的关系是任意的.

由于磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 所满足的方程与 $\boldsymbol{E}$ 所满足的方程一样,故同样可以求得通解并具有形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_1(\xi) + \boldsymbol{H}_2(\eta) \\ &= \boldsymbol{H}_1(t - \zeta/v) + \boldsymbol{H}_2(t + \zeta/v), \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

而且其特性与 $\boldsymbol{E}$ 相同.

对以上沿 $\boldsymbol{m}$ 方向传播的平面波,若以 $\boldsymbol{F}$ 代表 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$,显然有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{m} \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{F},$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{m} \frac{\partial}{\partial \zeta} \times \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{F}.$$

于是由麦克斯韦方程得到

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{E}) = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{2.1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}) = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{E}) = 0, \tag{2.1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H}) = 0. \tag{2.1.12}$$

由式(2.1.11)和(2.1.12)可以推知$\frac{\partial}{\partial \zeta}E_\zeta=0$，$\frac{\partial}{\partial \zeta}H_\zeta=0$. 这说明，电场与磁场沿传播方向 $\boldsymbol{m}$ 的分量与 ζ 无关. 由于 $\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{F})=0$，故由式(2.1.9)和(2.1.10)又可推知，$\frac{\partial}{\partial t}E_\zeta=0$，$\frac{\partial}{\partial t}H_\zeta=0$. 这又说明，电场与磁场沿传播方向 $\boldsymbol{m}$ 的分量又与时间无关. 以上结果意味着，电场和磁场沿传播方向 $\boldsymbol{m}$ 的分量都需等于零，即为横波，电场和磁场矢量都只在波前平面限定的方向上.

再者，由于 $\xi=t-\zeta/v$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\frac{\partial}{v \partial \xi}.$$

故由式(2.1.10)得

$$-\frac{1}{v \partial \xi}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}) - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \xi} = 0,$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{v}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}) + \varepsilon \boldsymbol{E}\right] = 0. \tag{2.1.13}$$

对上式求积分，由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是时变场，积分常数应取为零，于是有

$$\sqrt{\varepsilon\mu}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}) + \varepsilon \boldsymbol{E} = 0,$$

即

$$\boldsymbol{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}). \tag{2.1.14}$$

这说明，在平面波中 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 组成了矢量的右手正交三元系. 此外，电场和磁场的强度之比为$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$，它被称为媒质的波阻抗，记做 z_0，即

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{2.1.15}$$

如果媒质是导电的,其电导率为 σ,则即使没有激发源存在,电场 $\boldsymbol{E}$ 也会诱发传导电流,这时无源的麦克斯韦方程(1.1.2)成为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E},$$

再利用式(1.1.1)消去 $\boldsymbol{H}$,便得到无源区域导电均匀媒质中电场所满足的波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0. \tag{2.1.16}$$

由此可知,在导电媒质中沿 $\boldsymbol{m}$ 方向传播的平面波应满足的波动方程成为

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\boldsymbol{E}(\zeta,t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\zeta,t) - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\zeta,t) = 0. \tag{2.1.17}$$

直接求该方程的通解比较困难,可在频域中求解.对式(2.1.17),其傅氏变换为

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) + (\omega^2\varepsilon\mu + \mathrm{i}\omega\mu\sigma)\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) = 0. \tag{2.1.18}$$

令 $\gamma^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \mathrm{i}\omega\mu\sigma$,则频率为 ω 的单一谐波所满足的方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) + \gamma^2\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) = 0, \tag{2.1.19}$$

它的解是熟知的,可表示为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma\zeta} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma\zeta}. \tag{2.1.20}$$

令 $\gamma = \beta + \mathrm{i}\alpha$,可解得

$$\beta = \frac{\omega}{v}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}, \tag{2.1.21}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{v}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}. \tag{2.1.22}$$

将 γ 代入式(2.1.20),即得

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\zeta,\omega) = A\mathrm{e}^{-\alpha\zeta+\mathrm{i}\beta\zeta} + B\mathrm{e}^{\alpha\zeta-\mathrm{i}\beta\zeta}. \tag{2.1.23}$$

观察所用的傅氏变换(1.1.23)可知,每一谐波与时间的依赖关系为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$.由此可断定,式(2.1.23)的第一项代表沿 $\boldsymbol{m}$ 正方向传播的时变波,第二项则代表沿 $\boldsymbol{m}$ 负方向传播的时变波,它们的振幅都沿着传播方向指数衰减,式中 α 称为衰减常数,β 称为传输常数.该时变波传播的相速度 v 由等相面 $\beta\zeta - \omega t = \mathrm{const}$ 决定,显然为

$$v = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta}. \tag{2.1.24}$$

由 β 的表达式(2.1.21)可知，v 与 ω 有关. 也就是说，在导电媒质中电磁波的各个谐波分量的相速度是不同的. 这种相速度与频率有关的现象称为色散. 通常我们把介电常数与频率有关的介质称为色散介质. 由上面的讨论可知，即使介电常数与频率无关，只要是导电的介质($\sigma\neq 0$)就存在电磁波传播的色散现象.

§2.2　均匀媒质中的一维任意时变电磁场的边值问题[1]

上面讨论了一种与源无关的自由电磁波，它的特性具有典型意义，通过对平面电磁波的分析，可以了解电磁波的一些基本特性. 从本节开始，将讨论与源有关的电磁场问题. 首先讨论最简单的情况，即由无限大平面源所激发的一维瞬变电磁波.

2.2.1　无耗媒质的情况

假设在一均匀无耗无界空间中在某一无限大平面上给定电场或磁场随时间的变化，求解空间的电磁场，这将构成电磁场的一个边值问题，所给定的边值将成为被解区域场的源头. 为了表述方便，我们只考虑电场(对磁场也一样). 设在直角坐标系的 $z=0$ 平面上给定了场的分布，它只有一个分量 E(可以是 x 分量或 y 分量)，并且有

$$E(0,t)=f(t),\quad \left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{z=0}=g(t),\tag{2.2.1}$$

由物理分析可知，空间产生的电场也只有同一分量，且仅是 z 和 t 的函数. 在 $z\neq 0$ 的区域，电场满足方程

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)=0,\tag{2.2.2}$$

其中 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$，$\varepsilon$ 和 μ 为媒质空间的介电常数和磁导率. 在频域，该方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{E}(z,\omega)+k^2\hat{E}(z,\omega)=0,\tag{2.2.3}$$

其中 $k=\omega/v$. 该方程的解具有如下的形式

$$\hat{E}(z,\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}.\tag{2.2.4}$$

经逆变换，即可得到

$$E(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{2.2.5}$$

假定以上积分是均匀收敛的，从而可把微分与积分的顺序调换，于是有

$$\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{i}}{v}\int_{-\infty}^{\infty}\omega[A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{2.2.6}$$

把条件(2.2.1)应用到式(2.2.5)和(2.2.6)上，得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)+B(\omega)]e^{-i\omega t}d\omega = f(t), \tag{2.2.7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{i}{v}\int_{-\infty}^{\infty}\omega[A(\omega)-B(\omega)]e^{-i\omega t}d\omega = g(t). \tag{2.2.8}$$

依傅氏变换及其逆变换的关系，由上两式便可得到

$$A(\omega)+B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt, \tag{2.2.9}$$

$$\frac{i\omega}{v}[A(\omega)-B(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{i\omega t}dt. \tag{2.2.10}$$

由此解得

$$A(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)-\frac{iv}{\omega}g(t)\right]e^{i\omega t}dt, \tag{2.2.11}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)+\frac{iv}{\omega}g(t)\right]e^{i\omega t}dt. \tag{2.2.12}$$

把它们代回到式(2.2.5)，便有

$$\begin{aligned}E(z,t) = &\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left[e^{i\omega(\tau+\frac{z}{v}-t)}+e^{i\omega(\tau-\frac{z}{v}-t)}\right]d\tau\right\}d\omega \\ &-\frac{iv}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{\omega}\left[e^{i\frac{\omega}{v}z}-e^{-i\frac{\omega}{v}z}\right]e^{i\omega(\tau-t)}d\tau\right\}d\omega.\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

上式等号右侧的第一项通过傅里叶正逆变换，即可得到其结果为

$$\frac{1}{2}f\left(t-\frac{z}{v}\right)+\frac{1}{2}f\left(t+\frac{z}{v}\right),$$

对第二项的指数用三角函数表示并交换积分顺序，得到

$$\begin{aligned}E(z,t) = &\frac{1}{2}\left[f\left(t-\frac{z}{v}\right)+f\left(t+\frac{z}{v}\right)\right] \\ &+\frac{v}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\omega}{v}z\, e^{i\omega(\tau-t)}\frac{d\omega}{\omega}\right]d\tau.\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

上式中对 ω 的积分部分可以展开为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\omega}{v}z\, e^{i\omega(\tau-t)}\frac{d\omega}{\omega} = &\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\omega}{v}z\cos\omega(\tau-t)\frac{d\omega}{\omega} \\ &+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\omega}{v}z\sin\omega(\tau-t)\frac{d\omega}{\omega}.\end{aligned}$$

上式右侧第二项的被积函数为奇函数，其结果为零，而第一项又可写做

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\omega}{v}z\cos\omega(\tau-t)\frac{d\omega}{\omega} = \int_{0}^{\infty}\left[\sin\omega\left(\tau+\frac{z}{v}-t\right)-\sin\omega\left(\tau-\frac{z}{v}-t\right)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \tag{2.2.15}$$

考虑到

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha < 0, \end{cases}$$

则每当 $\tau+\frac{z}{v}-t$ 和 $\tau-\frac{z}{v}-t$ 的值为同号时，式(2.2.15)就会等于零；而当 $\tau=t-\frac{z}{v}$ 和 $\tau=t+\frac{z}{v}$ 时，出现符号改变；只有在区间 $t-\frac{z}{v}<\tau<t+\frac{z}{v}$ 之内，式(2.2.15)的积分才为非零而等于 π. 综合以上结果，最后得到

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left[f\left(t-\frac{z}{v}\right)+f\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]+\frac{v}{2}\int_{t-\frac{z}{v}}^{t+\frac{z}{v}} g(\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (2.2.16)$$

令

$$h(\xi) = -v\int_0^\xi g(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则有

$$v\int_0^{t+\frac{z}{v}} g(\tau)\mathrm{d}\tau = -h\left(t+\frac{z}{v}\right),$$

$$v\int_{t-\frac{z}{v}}^0 g(\tau)\mathrm{d}\tau = -v\int_0^{t-\frac{z}{v}} g(\tau)\mathrm{d}\tau = h\left(t-\frac{z}{v}\right).$$

于是，$E(z,t)$ 又可表示成

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\left[f\left(t-\frac{z}{v}\right)+f\left(t+\frac{z}{v}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[h\left(t-\frac{z}{v}\right)-h\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]. \quad (2.2.17)$$

由这一结果可以看出，以边界条件为源所产生的波沿 z 轴两个相反的方向传输，它们由两部分组成：一个由 $f(t)$ 函数直接决定；另外一部分由 $g(t)$ 决定并与前者叠加，而且在 $z=0$ 处消失.

电场求出之后，可通过麦克斯韦方程求出相应的磁场.

2.2.2　导电媒质的情况

讨论与前面相同的问题，差别仅是 $\sigma\neq0$. 在这种情况下 $E(z,t)$ 所满足的方程与式(2.1.17)类似，是其分量的形式

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}E(z,t)=0. \quad (2.2.18)$$

为了书写方便，引进两个常数

$$a=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\quad b=\frac{\sigma}{2\varepsilon},\tag{2.2.19}$$

而使方程(2.2.18)成为

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)-2b\frac{\partial}{\partial t}E(z,t)=0.\tag{2.2.20}$$

把它变换到频域，便得到

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{E}(z,\omega)+\omega^2\hat{E}(z,\omega)+\mathrm{i}2b\omega\hat{E}(z,\omega)=0,$$

整理后，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{E}(z,\omega)+k^2\hat{E}(z,\omega)=0.\tag{2.2.21}$$

其中 $k=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu+\mathrm{i}\omega\mu\sigma}$，它的解为

$$\hat{E}(z,\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}.\tag{2.2.22}$$

通过逆变换，又可得到

$$E(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,\tag{2.2.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}k[A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}-B(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{2.2.24}$$

代入边界条件(2.2.1)，则得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)+B(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}k[A(\omega)-B(\omega)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

这相当于

$$A(\omega)+B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{i}k[A(\omega)-B(\omega)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

再由此解得

$$A(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)-\frac{\mathrm{i}}{k}g(t)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,\tag{2.2.25}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)+\frac{\mathrm{i}}{k}g(t)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.\tag{2.2.26}$$

把这一结果代回到式(2.2.23)中，可得

$$E(z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left[e^{ikz}+e^{-ikz}\right]e^{i\omega(\tau-t)}\,d\tau\,d\omega$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{k}\left[e^{-ikz}-e^{ikz}\right]e^{i\omega(\tau-t)}\,d\tau\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\cos kz\,e^{i\omega(\tau-t)}\,d\tau\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kz}{k}e^{i\omega(\tau-t)}\,d\tau\,d\omega. \tag{2.2.27}$$

与无耗问题不同的是，现在的 k 是复数，这增加了问题的复杂性. 这里的关键是对函数 $\sin kz/k$ 的处理. 引入盖根鲍尔(Gegenbauer)积分

$$\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}J_0(u\sin\phi\sin\theta)\,e^{iu\cos\phi\cos\theta}\sin\theta\,d\theta, \tag{2.2.28}$$

其中 J_0 为零阶贝塞尔(Bessel)函数.

作变量替换

$$u=v\sqrt{(p+\lambda)(p+\mu)},$$

其中 λ 和 μ 为实或复常数. 令

$$u\cos\phi=v\left(p+\frac{\lambda+\mu}{2}\right),\quad \cos\theta=\frac{\beta}{v},$$

则有

$$u\sin\phi=iv\frac{\lambda-\mu}{2},\quad \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{v}\right)^2},\quad \sin\theta d\theta=-\frac{d\beta}{v}.$$

把这些参数代入式(2.2.28)，即可得到

$$\frac{\sin\left[v\sqrt{(p+\lambda)(p+\mu)}\right]}{\sqrt{(p+\lambda)(p+\mu)}}=\frac{1}{2}\int_{-v}^{v}J_0\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\sqrt{\beta^2-v^2}\right)e^{i\beta\left(p+\frac{\lambda+\mu}{2}\right)}\,d\beta. \tag{2.2.29}$$

对以下特殊情况

$$v=\frac{z}{a},\quad p=\omega,\quad \lambda=i2b,\quad \mu=0,$$

上式成为

$$\frac{\sin kz}{k}=\frac{a\sin\left[\frac{z}{a}\sqrt{\omega^2+i2b\omega}\right]}{\sqrt{\omega^2+i2b\omega}}$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-z/a}^{z/a}J_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2\beta^2}\right)e^{i\beta\omega-b\beta}\,d\beta. \tag{2.2.30}$$

若用 E_2 表示式(2.2.27)右侧的第二部分，并把上式代入，即得

$$E_2=\frac{a}{2}\int_{-z/a}^{z/a}\mathrm{e}^{-b\beta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right.$$

$$\left.\cdot\ \mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2\beta^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(\beta-t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-z/a}^{z/a}\mathrm{e}^{-b\beta}\left[\frac{1}{2\pi}\mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2\beta^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}g(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-\beta)}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{a}{2}\int_{-z/a}^{z/a}\mathrm{e}^{-b\beta}g(t-\beta)\mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2\beta^2}\right)\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{a}{2}\int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}}g(\beta)\mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2(t-\beta)^2}\right)\mathrm{e}^{-b(t-\beta)}\mathrm{d}\beta. \tag{2.2.31}$$

若把式(2.2.27)右侧的第一部分用 E_1 表示，并注意到

$$\cos kz=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin kz}{k}\right),$$

即可知，只要在 E_2 中把 $g(\beta)$换成 $f(\beta)$再对 z 求偏微商即可得E_1. 由于 E_2 的积分限也是 z 的函数，需要应用以下求导关系

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}F(x,z)\mathrm{d}x=\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}x+F(x_2,z)\frac{\partial x_2}{\partial z}-F(x_1,z)\frac{\partial x_1}{\partial z},$$

最后总起来，有

$$E(z,t)=E_1+E_2$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{b}{a}z}f\left(t+\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}z}f\left(t-\frac{z}{a}\right)$$

$$+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-bt}\int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}}f(\beta)\mathrm{e}^{b\beta}\mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2(t-\beta)^2}\right)\mathrm{d}\beta$$

$$+\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-bt}\int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}}g(\beta)\mathrm{e}^{b\beta}\mathrm{J}_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2(t-\beta)^2}\right)\mathrm{d}\beta. \tag{2.2.32}$$

这一结果显示，媒质的导电性对电磁波的影响不仅仅是衰减. 就所研究的实际问题而言，在 $z=0$ 平面上，式(2.2.32)等号右侧后两个积分项的积分限相等，使得这两个积分项均为零，只存在由初始源 $f(t)$决定的向相反方向传输的两个波，它们的振幅为初始值的一半，都以速度 a 传播，该速度与频率和导电率无关，两个波的振幅都按指数规律在传播方向上衰减. 但是，在离开 $z=0$ 以后，两个积分项开始起作用，它们使初始函数的形状在传播过程中不断改变，从而使波的传播出现复杂的情况.

§2.3 均匀无耗媒质中点源的场——时域格林函数[2]

二维和三维空间中的点源冲激脉冲在空间所产生的场是一种典型的电磁场

问题,其解就是时域格林函数.这里将重点介绍一种求解这类问题的方法,称为卡尼亚尔-德胡普(Cagniard-De Hoop)法,它对非色散媒质是很有效的.

2.3.1 线源问题——二维时域格林函数

考虑均匀无耗无界媒质空间中一无限长线电流源,把它沿直角坐标系的 z 轴放置,位于 $x=0,y=0$ 处.该源所产生的电场只有 z 向分量,用 g 来表示.一冲激脉冲所产生的场,满足下列波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x,y,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(t), \tag{2.3.1}$$

其中 $v^2=1/\varepsilon\mu$, ε, μ 为媒质的介电常数和磁导率.

对上式施行傅里叶变换,并考虑到 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为 1,从而得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)\hat{g}(x,y,\omega)=-\delta(x)\delta(y), \tag{2.3.2}$$

其中 $k^2=k_x^2+k_y^2=\omega^2/v^2$.为了再隐去一个变量 x,再进行一次如下的变换

$$\hat{g}(x,y,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\hat{g}}(k_x,y,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x,$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x,$$

则式(2.3.2)成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2-k_x^2\right)\hat{\hat{g}}(k_x,y,\omega)=-\delta(y). \tag{2.3.3}$$

该方程已经很容易求解,在 $|y|\neq 0$ 时它的解为 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_y y}$.若只取外行波,则根据所采用的傅里叶变换,得知

$$\hat{\hat{g}}(k_x,y,\omega)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y|y|}, \tag{2.3.4}$$

其中 $k_y^2=k^2-k_x^2$.为了确定系数 A,把式(2.3.4)代入式(2.3.3),匹配 $y=0$ 点的奇异性,结果是

$$\hat{\hat{g}}(k_x,y,\omega)=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y|y|}}{2k_y}. \tag{2.3.5}$$

再对 k_x 求其反变换,可得

$$\hat{g}(x,y,\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y|y|}}{k_y}\mathrm{d}k_x. \tag{2.3.6}$$

但是,这一结果尚存在问题.由于 $k_y=\sqrt{k^2-k_x^2}$,故 k_y 在 $k_x=\pm k$ 处为零,使上式中被积函数存在奇异性,且该奇异性正处于积分路径上,使得该积分是不确定的.为了克服这一困难,可假定媒质有一小的损耗,使 k 成为复数并使其虚部为正,以便使解对应的是外行衰减波.在此假定下,奇异性发生的位置已离开实轴,积分(2.3.6)也就确定了.另一种解决问题的方法是让积分路径有

所偏移，以便绕开奇异性出现的位置，在 k_x 的负实轴部分积分沿其上沿进行，在过了零点后转到实轴的下沿，这一路径称为索末菲(Sommerfeld)积分路径，简记做 SIP.

式(2.3.6)是二维格林函数的谱域表示，或称做频域格林函数. 为了求得时域格林函数，可采用卡尼亚尔-德胡普方法. 令

$$k_x = \omega s_x, \quad k = \omega s_0, \quad \text{即 } s_0 = 1/v,$$

则式(2.3.6)成为

$$\hat{g}(x,y,\omega) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(s_x x + \sqrt{s_0^2 - s_x^2}|y|\right)}}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}} \mathrm{d}s_x. \tag{2.3.7}$$

作变换

$$t = s_x x + (s_0^2 - s_x^2)^{\frac{1}{2}}|y|, \tag{2.3.8}$$

使式(2.3.7)变成

$$\hat{g} = \frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_C \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{2.3.9}$$

该式看上去酷似傅里叶变换，唯一的差别是积分路径，现在的 C 是实 s_x 轴在复 t 平面上通过变换式(2.3.8)的映像. 如果能把该映像变为 t 平面上的实轴，则式(2.3.9)中括号内的部分就可与 g 直接联系起来.

把 s_x 从式(2.3.8)中解出，并令

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\varphi = x/\rho, \quad \sin\varphi = y/\rho,$$

则可得

$$s_x = \frac{t}{\rho}\cos\varphi \pm \left(s_0^2 - \frac{t^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi. \tag{2.3.10}$$

由此可知，对于每一 t 值对应两个 s_x 值，只有在 $t=s_0\rho$ 时，$s_x=s_0\cos\varphi$ 一个值；而 $t=0$ 时，$s_x=\pm s_0\sin\varphi$；$t=s_0x$ 时，s_x 取值 s_0 和 $s_0\cos2\varphi$. 这几个典型的点分别用 B,O 和 A 表示，两个平面上的对应关系由图 2-1 给出. 到现在为止可以看出，在 $t=0\sim s_0\rho$ 这一段，所对应的 s_x 都是实值. 在 $t=s_0\rho$ 以前都是对应两个 s_x，而在 $t=s_0\rho$ 点只对应一个 s_x. 那么在 $t>s_0\rho$ 以后会怎么样呢? 由式(2.3.10)可以看出，这时 s_x 将为一对复值. 下面考察这一对复值的分布. 令 $s_x=s_x'+\mathrm{i}s_x''$，则显然有

$$s_x' = \frac{t}{\rho}\cos\varphi,$$

$$s_x''^2 = s_x'^2\tan^2\varphi - s_0^2\sin^2\varphi,$$

又可写做

$$\frac{s_x'^2}{s_0^2\cos^2\varphi} - \frac{s_x''^2}{s_0^2\sin^2\varphi} = 1. \tag{2.3.11}$$

这是一个双曲线方程，该方程所表示的曲线如图 2-1 所示.

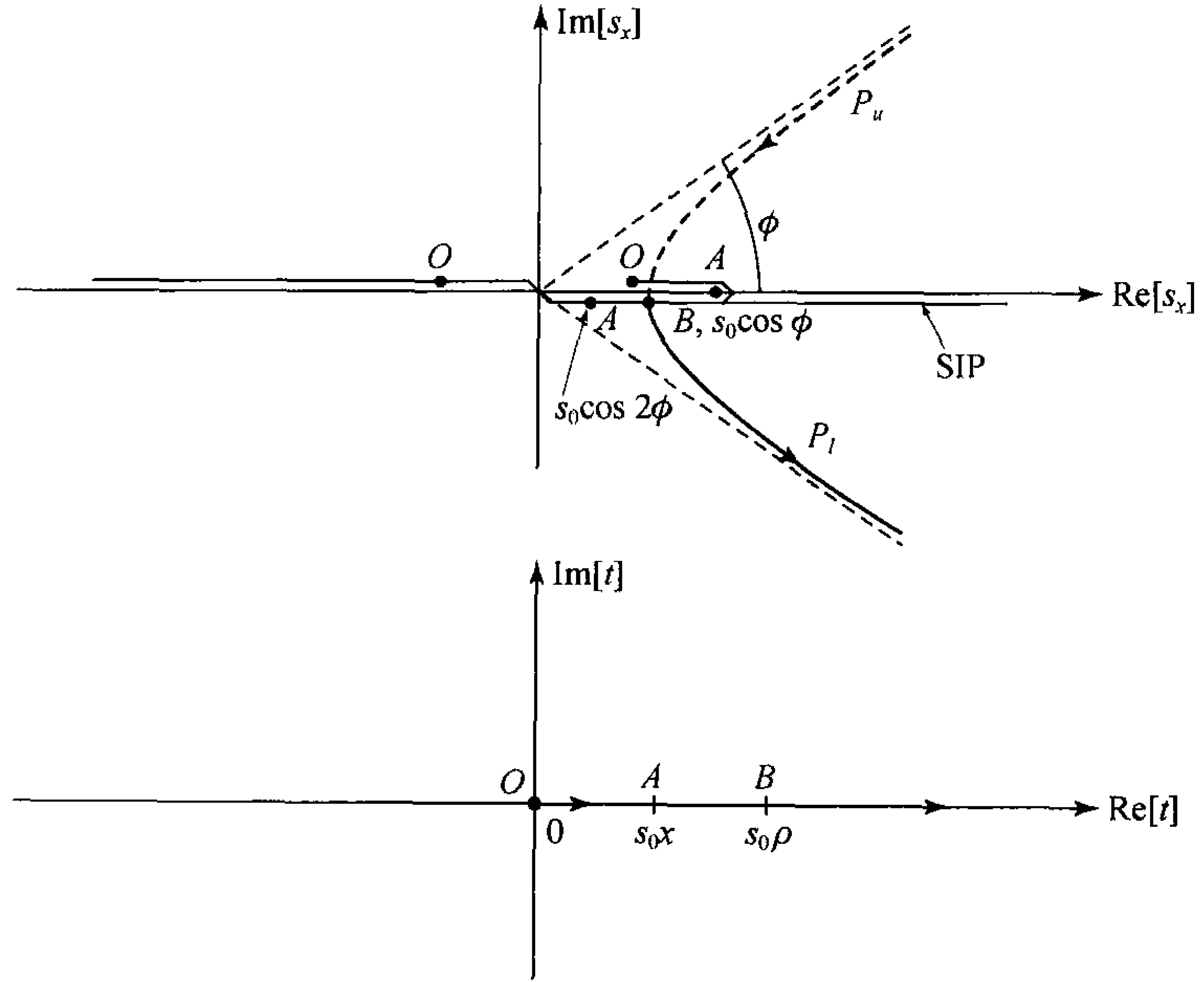


图 2-1 复 s_x 与 t 平面上的积分路径及对应关系

由 s_x'' 与 t 的关系可知,方程(2.3.10)中取正号由 P_u 表示,取负号由 P_l 表示.这就说明,当 $t>s_0\rho$ 以后 s_x 又分为两支,随着 t 的增加,一支沿 P_u 上升,一支沿 P_l 下降.

式(2.3.7)是沿索末菲积分路径进行的,由于被积函数只在 $s_x=s_0$ 点有奇异性,则根据柯西定理可变形到 P_u+P_l 上.于是积分(2.3.7)成为

$$\hat{g}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{P_u+P_l}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(s_x x+\sqrt{s_0^2-s_x^2}|y|\right)}}{\sqrt{s_0^2-s_x^2}}\mathrm{d}s_x, \tag{2.3.12}$$

其中 P_u 和 P_l 的行走方向如图 2-1 所示.再把上述积分对应到 t 平面上,并考虑 t 与 s_x 的对应关系(2.3.10),则由式(2.3.12)和(2.3.9)可得

$$\hat{g}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{s_0\rho}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2-s_x^2}}\right)_l-\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2-s_x^2}}\right)_u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t, \tag{2.3.13}$$

其中 l 和 u 分别表示 P_l 和 P_u 上积分的映像.

进而,由式(2.3.10)可以解得

$$(s_0^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{t}{\rho}\sin\varphi\mp\mathrm{i}\left(\frac{t^2}{\rho^2}-s_0^2\right)\cos\varphi, \tag{2.3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}=\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{s_0^2-s_x^2}}{\sqrt{t^2-s_0^2\rho^2}}. \tag{2.3.15}$$

由于在上两式中取正或负号分别代表了 P_u 或 P_l,故可看出满足如下关系

$$(s_0^2 - s_x^2)_u^{\frac{1}{2}} = (s_0^2 - s_x^2)_l^{\frac{1}{2}*}, \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\right)_u = \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\right)_l^*,$$

其中符号“$*$”表示取共轭. 于是式(2.3.13)可以写成

$$\hat{g}(\rho,\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{s_0\rho}^{\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{2.3.16}$$

如果把该式看做一傅里叶变换，被积函数必须在 $t<s_0\rho$ 时为零，于是得到

$$g(\rho,t) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_l u(t - s_0\rho), \tag{2.3.17}$$

其中 u 为单位阶跃函数.

再应用式(2.3.15)，可把式(2.3.17)变成

$$g(\rho,t) = \frac{1}{2\pi(t^2 - s_0^2\rho^2)^{\frac{1}{2}}}u(t - s_0\rho). \tag{2.3.18}$$

该式可称为二维格林函数，由线源单位冲激脉冲[由 $u(t)$ 函数表示]所激发的场，其波头从 $t=\rho/v$ 时刻开始出现，亦即波头以速度 v 向前传播. 虽然源仅作用于 $t=0$ 的一个短暂时刻，但对于空间上的任意观察点，即使波头过后场也不会立即消失，而是有一个无限长的拖尾. 这是因为各观察点会连续地接收到由近至远的线源上各点发送出的信号，由于线源无限长，便有无限远发来的信号.

2.3.2 点源问题——三维时域格林函数

现在考虑均匀无耗媒质三维空间中一个点源冲激脉冲的作用，该问题的解为三维时域格林函数. 若该问题的场仍用 g 表示，则它满足的方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x,y,z,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \tag{2.3.19}$$

在频域满足的方程则为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\hat{g}(x,y,z,\omega) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{2.3.20}$$

其中 $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$. 对上式再考虑施以如下形式的变换

$$\hat{g}(x,y,z,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\hat{\hat{g}}(k_x,k_y,k_z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y+\mathrm{i}k_z z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z, \tag{2.3.21}$$

即可把式(2.3.20)变成

$$(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2)\hat{\hat{g}}(k_x,k_y,k_z,\omega) = -1,$$

于是得到

$$\hat{\hat{g}}(k_x,k_y,k_z,\omega) = \frac{1}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}. \tag{2.3.22}$$

把这一结果代回到式(2.3.21),便有

$$\hat{g}(x,y,z,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_x x+ik_y y+ik_z z}}{k^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2}dk_x dk_y dk_z. \quad (2.3.23)$$

但是,这个积分并不是完全确定的.以对 k_z 的积分为例,由于被积函数在 $k_z=\pm\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$ 有两个极点,对无耗媒质,这些极点位于实轴上,使得积分不确定.和二维情况一样,若在媒质中引入很小的损耗,使 $k=k'+ik''$ 为复数,则极点就稍微偏离实轴,从而使积分就确定了.

继续考察积分(2.3.23)可知,对 $z>0$,$\text{Im}(k_z)\to+\infty$,被积函数指数规律衰减,按约当引理,在上半平面无限大半圆路径 C 上对 k_z 的积分将消失.因此,可以把 C 与实轴组成一闭合回路.由柯西定理可知,式(2.3.23)对 k_z 的积分等于被积函数在上半平面极点 $k'_z=(k^2-k_x^2-k_y^2)^{\frac{1}{2}}$ 处留数的 $2\pi i$ 倍.由于

$$\text{Res}\left(\frac{e^{ik_z z}}{k^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2}\right)=(k_z\to k'_z)\frac{e^{ik_z z}}{(k_z+k'_z)(k_z-k'_z)}\bigg|_{k_z\to k'_z}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{ik'_z z}}{k'_z},$$

故有

$$\hat{g}(x,y,z,\omega)=\frac{i}{2(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_x x+ik_y y+ik'_z z}}{k'_z}dk_x dk_y, \quad z>0. \quad (2.3.24)$$

对 $z<0$,可考虑下半平面的情形,得到类似的结果.综合起来,便得到适合所有 z 的积分形式

$$\hat{g}(x,y,z,\omega)=\frac{i}{2(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_x x+ik_y y+ik_z|z|}}{k_z}dk_x dk_y, \quad (2.3.25)$$

其中 $k_z=(k^2-k_x^2-k_y^2)^{\frac{1}{2}}$.

为了求得 $\hat{g}$ 的逆变换,仍采用卡尼亚尔-德胡普方法.首先进行一次坐标旋转,让观察点 (x,y) 处于新坐标系 (x',y') 的 x' 轴上,如图 2-2 所示.

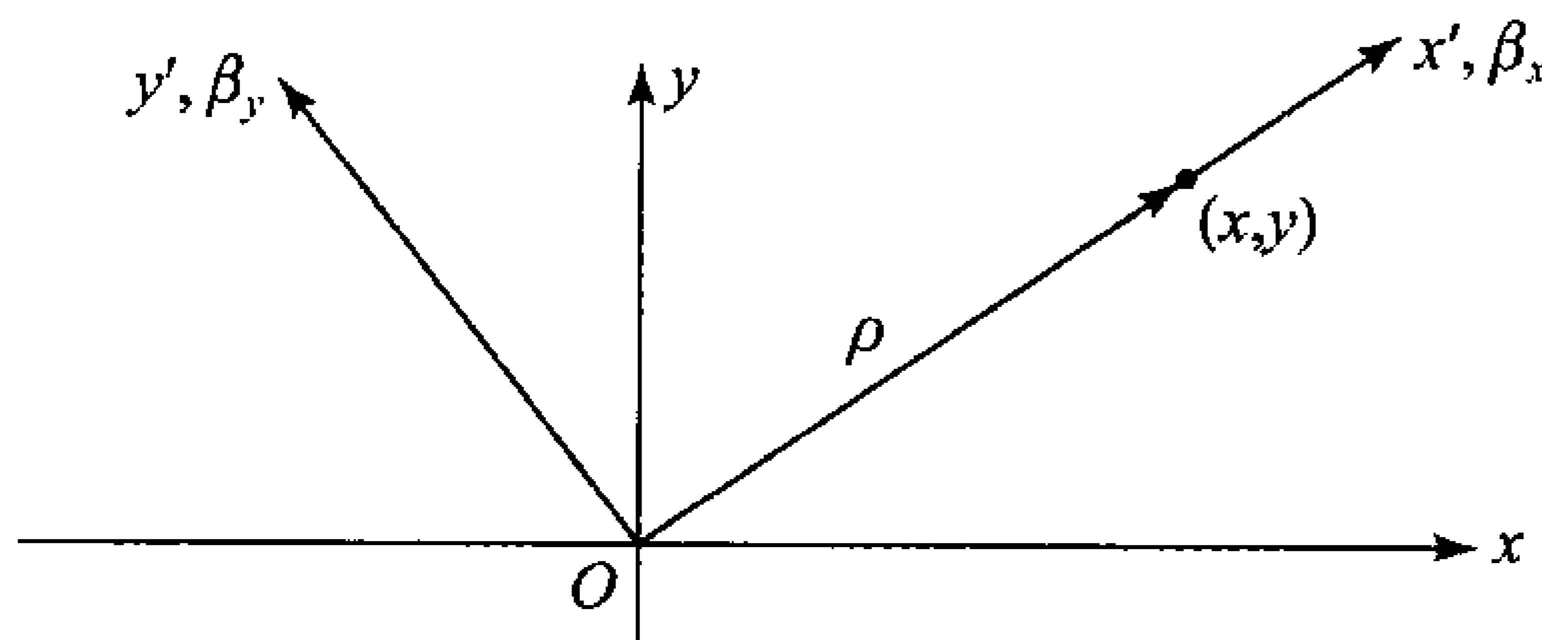


图 2-2 坐标旋转变换

令

$$k_x=\beta_x\cos\varphi-\beta_y\sin\varphi,$$
$$k_y=\beta_x\sin\varphi+\beta_y\cos\varphi, \quad (2.3.26)$$

则可把式(2.3.25)表示成

$$\hat{g}(\rho,z,\omega)=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_x\rho+\mathrm{i}\beta_z|z|}}{\beta_z}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y, \tag{2.3.27}$$

其中 $\beta_z=(k^2-\beta_x^2-\beta_y^2)^{\frac{1}{2}}$. 不难发现,上式中对 β_x 的积分与式(2.3.6)所表示的关于线源问题的积分类似. 于是令 $s_0=1/v$,并且

$$\beta_x=\omega s_x,\quad \beta_y=\omega s_y,$$

则式(2.3.27)变成

$$\hat{g}(\rho,z,\omega)=\frac{\mathrm{i}\omega}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(s_x\rho+s_z|z|)}}{s_z}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y, \tag{2.3.28}$$

其中 $s_z=(s_0^2-s_x^2-s_y^2)^{\frac{1}{2}}$. 考察该式对 s_y 的积分,可以发现被积函数满足约当(Jordan)引理的条件,故可在无穷远补充积分路径而把 s_y 平面的实轴与虚轴构成同一个闭合回路的一部分. 再利用柯西定理,可把对沿实轴的积分变为沿虚轴的积分;然后再作变量替换 $s_y=-\mathrm{i}q$,又把对 s_y 沿虚轴的积分变为对 q 沿实轴的积分,从而可得到以下的结果

$$\hat{g}(\rho,z,\omega)=\frac{\omega}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(s_x\rho+s_z|z|)}}{s_z}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}q, \tag{2.3.29}$$

其中 $s_z=(s_0^2+q^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}$. 到此可以发现,上式与二维情况下的式(2.3.7)在形式上类似,故也可以按类似的方法处理. 令

$$t=s_x\rho+(s_0^2+q^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}|z|,$$

由此解得

$$s_x=\frac{t}{r}\cos\varphi\pm\left(s_0^2+q^2-\frac{t^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}=\pm\mathrm{i}\,\frac{(s_0^2+q^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}}{[t^2-(s_0^2+q^2)r^2]^{\frac{1}{2}}},$$

其中 $r=(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$. 再经过类似于处理线源问题的过程,可以得到

$$\hat{g}(r,\omega)=-\frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(s_0^2+q^2)^{\frac{1}{2}}r}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\sqrt{t^2-(s_0^2+q^2)r^2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}q \tag{2.3.30}$$

下面需要调换上式的积分顺序. 为此先要了解对 t 的积分范围. 对 t 的积分起点是 q 的函数 $t=(s_0^2+q^2)^{\frac{1}{2}}r$,在 $t-q$ 平面上该起点的轨迹满足方程

$$\frac{t^2}{s_0^2r^2}-\frac{q^2}{s_0^2}=1,$$

由此可知,t 的起点轨迹是一条双曲线,其最低点为 s_0r. 调换积分次序后,为了保证积分区域不变,对于每一固定的 t 值,对 q 的积分要从双曲线的一支到另一

支，其值为 $q=\pm\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$，于是得到

$$\hat{g}(r,\omega)=\int_{s_0 r}^{\infty}\int_{-\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}^{\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{e^{i\omega t}}{r\sqrt{\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)-q^2}}dq dt. \tag{2.3.31}$$

考虑到 $\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\pi$，由上式可得到

$$\hat{g}(r,\omega)=-\frac{i\omega}{4\pi r}\int_{s_0 r}^{\infty}e^{i\omega t}dt. \tag{2.3.32}$$

上式又可以写做

$$-\frac{\hat{g}(r,\omega)}{i\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi r}u(t-s_0 r)e^{i\omega t}dt,$$

根据傅里叶变换的性质，由此可立即得到

$$g(r,t)=\frac{u(t-s_0 r)'}{4\pi r}=\frac{\delta(t-r/v)}{4\pi r}. \tag{2.3.33}$$

这是个以速度 v 向外传播的球面冲激波. 与线源情况不同的是，这里不存在无限长的拖尾.

以上分析中所用的卡尼亚尔-德胡普方法并不是解决该类问题最简单的方法. 例如对点源问题就可以直接从其频域格林函数 $\hat{g}(r,\omega)=e^{ikr}/4\pi r$ 求逆变换而得到时域解，或利用式(1.4.13)直接得到所需的结果. 但是，了解这一方法还是有必要的，它可以开阔我们的思路，从中学到解决问题的一些技巧，也为解决更复杂的问题作一定的准备.

§2.4　均匀导电媒质中点源的场[2]

由前面的讨论已经知道，当媒质具有导电性时，在其中电磁波的传播规律与在无耗媒质中有明显的差别. 这种差别的造成除了损耗以外，就是会引起色散. 现在讨论线源(属于二维点源)和点源的冲激作用在导电媒质中的响应，其结果与无耗媒质中肯定会有很大不同.

2.4.1　线源问题的时域场解

在导电媒质中，由于 $\sigma\neq 0$ 而引起的传导电流为 $\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E}$. 如果另有外源电流 $\boldsymbol{J}_s$ 存在，则麦克斯韦方程(1.1.2)中的 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_c+\boldsymbol{J}_s$，这时的两个旋度方程成为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t). \qquad (2.4.1)$$

对于无限长电流源，若把源置于与直角坐标系的 z 轴重合，则电场只有 E_z 分量，它所满足的方程为

$$\nabla_s \times \hat{z}E_z(x,y,t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}_s(x,y,t),$$

$$\nabla_s \times \boldsymbol{H}_s(x,y,t) = \hat{z}\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}E_z(x,y,t) + \sigma E_z(x,y,t) + J_s\right), \qquad (2.4.2)$$

其中∇_s和 $\boldsymbol{H}_s$ 的下标 s 表示横向分量，$\nabla_s = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}$. 从上两式中消去 $\boldsymbol{H}_s$，便可得到 E_z 所满足的方程

$$\nabla_s^2 E_z(x,y,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z(x,y,t) - \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}E_z(x,y,t) = \mu \frac{\partial J_s}{\partial t}, \qquad (2.4.3)$$

其中$\nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

现在假定 J_s 随时间的变化为 $\delta(t)$，强度为-1. 若把这种源的空间响应记做 g，则 g 所满足的方程可写成

$$\nabla_s^2 g(x,y,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}g(x,y,t) - \frac{1}{v^2\tau}\frac{\partial}{\partial t}g(x,y,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(t), \qquad (2.4.4)$$

其中 $\tau = \varepsilon/\sigma$. 为了对该方程进行简化，作变换 $g(x,y,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}\tilde{g}(x,y,t)$，可把方程(2.4.4)变成

$$\left(\nabla_s^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{4v^2\tau^2}\right)\tilde{g}(x,y,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(t). \qquad (2.4.5)$$

在得到上式时，用到 $\mathrm{e}^{\frac{t}{2\tau}}\delta(t) = (\mathrm{e}^{\frac{t}{2\tau}})_{t=0}\delta(t) = \delta(t)$. 再令 $z = \mathrm{i}vt$, $k^2 = \frac{1}{4v^2\tau^2}$，则又可得到

$$\left(\nabla_s^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{g}(x,y,z) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z). \qquad (2.4.6)$$

这是一个亥姆霍兹型的方程，它所对应的齐次方程的解是众所周知的. 若令 $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = (\rho^2 - v^2t^2)^{\frac{1}{2}}$，则齐次方程的解可以写做

$$\tilde{g}(x,y,t) = (A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr})/r$$

$$= \left[A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2v\tau}\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}} + B\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2v\tau}\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}}\right]\Big/\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}. \qquad (2.4.7)$$

它们实际上是时域方程的解，而这种解必须是实数，故上式的实部和虚部都是时域方程的解. 若取上式的虚部，并为满足因果关系在 $vt < \rho$ 时令其等于零，便可

得到 $A=B$ 且应为纯实数. 至此,可得方程(2.4.5)实数解如下:

$$\tilde{g}(\rho,t)=\begin{cases}0, & vt<\rho,\\ 2A\dfrac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}, & vt>\rho.\end{cases}$$

或写做

$$\tilde{g}(\rho,t)=2Au(vt-\rho)\frac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-\rho^2}\right)}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}. \tag{2.4.8}$$

到此为止,还有系数 A 尚待确定. 为此考虑 $\tau\to\infty$ 的特殊情况,这时式(2.4.8)成为

$$\tilde{g}(\rho,t)=\frac{2Au(vt-\rho)}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}, \tag{2.4.9}$$

方程(2.4.5)在极坐标系中变成下面的形式

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{g}(\rho,t)=-\frac{\partial(\rho)}{2\pi\rho}\delta(t). \tag{2.4.10}$$

把式(2.4.9)代入式(2.4.10)并比较方程两边的奇异性,可以确定 $A=v/4\pi$. 于是,最后再把 $\tilde{g}$ 变回到 g,即可得到

$$g(x,y,t)=vu(vt-\rho)e^{-\frac{t}{2\tau}}\frac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-\rho^2}\right)}{2\pi\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}. \tag{2.4.11}$$

把这一结果与无耗情况的解(2.3.18)比较,可知 $\sigma\neq0$ 导致波的传输特性产生很大变化. 容易看出,当 $\sigma\to0$ 时,式(2.4.11)还原为式(2.3.18),这可作为解的正确性的一种验证.

2.4.2　点源问题的时域场解

对于三维导电媒质空间点源的冲激作用,可用如下的波动方程描述

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{v^2\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)g(x,y,z,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t), \tag{2.4.12}$$

其中 $\tau=\varepsilon/\sigma$. 再令

$$g(x,y,z,t)=e^{-\frac{t}{2\tau}}\tilde{g}(x,y,z,t),$$

可得到

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{4v^2\tau^2}\right)\tilde{g}(x,y,z,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \tag{2.4.13}$$

为降低计算维度,再进行下列变换

$$\tilde{g}(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{g}(x,y,k_z,t)e^{ik_zz}dk_z, \tag{2.4.14}$$

并利用关系

$$\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\,\mathrm{d}k_z,$$

便得到方程

$$\left(\nabla_s^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2\right)\hat{g}(x,y,k_z,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(t).\quad(2.4.15)$$

它已相似于一个二维问题的方程，把它与式(2.4.5)比较，可得到相应齐次方程的一个特解

$$\hat{g}(x,y,k_z,t)=\frac{A}{\sqrt{\rho^2-v^2t^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2\right)(\rho^2-v^2t^2)}}.\quad(2.4.16)$$

再把 $\hat{g}(x,y,k_z,t)$变回到三维空间，便得

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,y,z,t)&=\frac{A}{2\pi\sqrt{\rho^2-v^2t^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z+\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2\right)(\rho^2-v^2t^2)}}\mathrm{d}k_z\\&=\frac{A}{2\pi\mathrm{i}vt}\frac{\partial}{\partial vt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z+\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2\right)(\rho^2-v^2t^2)}}}{\sqrt{\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2}}\mathrm{d}k_z.\end{aligned}\quad(2.4.17)$$

为了理解该式中被积函数的意义，我们回到式(2.3.2)的求解问题，其解的一种形式已由式(2.3.6)给出. 另一方面，作为频域电磁场理论，还经常使用方程(2.3.2)的另一个解[6]，即

$$\hat{g}(\rho,\omega)=\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k\rho),\quad(2.4.18)$$

其中 $\mathrm{H}_0^{(1)}$ 为零阶第一类汉克尔(Hankel)函数. 根据方程解的唯一性，这两个解必须相等，于是可得到一个恒等式

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(k\rho)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y|y|}}{k_y}\mathrm{d}k_x.\quad(2.4.19)$$

把该恒等式用于式(2.4.17)，即可得到

$$\tilde{g}(x,y,z,t)=-\frac{A}{2\mathrm{i}vt}\frac{\partial}{\partial vt}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2-v^2t^2}\right).\quad(2.4.20)$$

由微分方程理论可知，方程(2.4.13)的齐次解应该由两个独立解线性组合而成. 而上面求解过程显示，式(2.4.20)仅是方程(2.4.13)的齐次解之一. 由柱函数的性质可以判断[9]，另一个线性独立的齐次解可将式(2.4.20)中的汉克尔(Hankel)函数由贝塞尔函数代替而得到. 如此，方程(2.4.13)的通解可取如下的形式

$$\tilde{g}(x,y,z,t)=\frac{1}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}\left[C\mathrm{H}_0^{(1)}\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2-v^2t^2}\right)+D\mathrm{J}_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2-v^2t^2}\right)\right].\quad(2.4.21)$$

和二维情况一样，由于式(2.4.13)是时域方程，其解应该为实数，故式(2.4.21)

的实部和虚部都应该是式(2.4.13)的解.取式(2.4.21)的虚部,为满足因果律的要求,令其在 $vt<r$ 时为零,由此可得到 $C=0$,D 为纯实数.于是式(2.4.13)的实数解为

$$\tilde{g}(x,y,z,t)=\frac{1}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}\begin{cases}0, vt<r,\\ DI_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-r^2}\right), vt>r,\end{cases} \tag{2.4.22}$$

其中 I_0 为变型贝塞尔函数.上式又可以写成

$$\tilde{g}(x,y,z,t)=\frac{D}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}u(vt-r)I_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-r^2}\right). \tag{2.4.23}$$

为了确定待定系数 D,可将上式代入(2.4.13)并比较两边的奇异性而得到 $D=\frac{v}{4\pi}$.这样,方程(2.4.12)的解即为

$$g(x,y,z,t)=\frac{e^{-\frac{t}{2\tau}}}{4\pi t}\frac{\partial}{\partial vt}u(vt-r)I_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2-r^2}\right). \tag{2.4.24}$$

式(2.4.11)和(2.4.24)是二维和三维有耗空间冲激点源的响应,因此它们相当于有耗自由空间的时域格林函数.

§2.5　半空间上方线源的瞬态响应[2]

考虑由无限大平面分开的两个半空间,它们的无耗媒质的特性分别用 ε_1,μ_1 和 ε_2,μ_2 表征,坐标选取如图2-3所示.

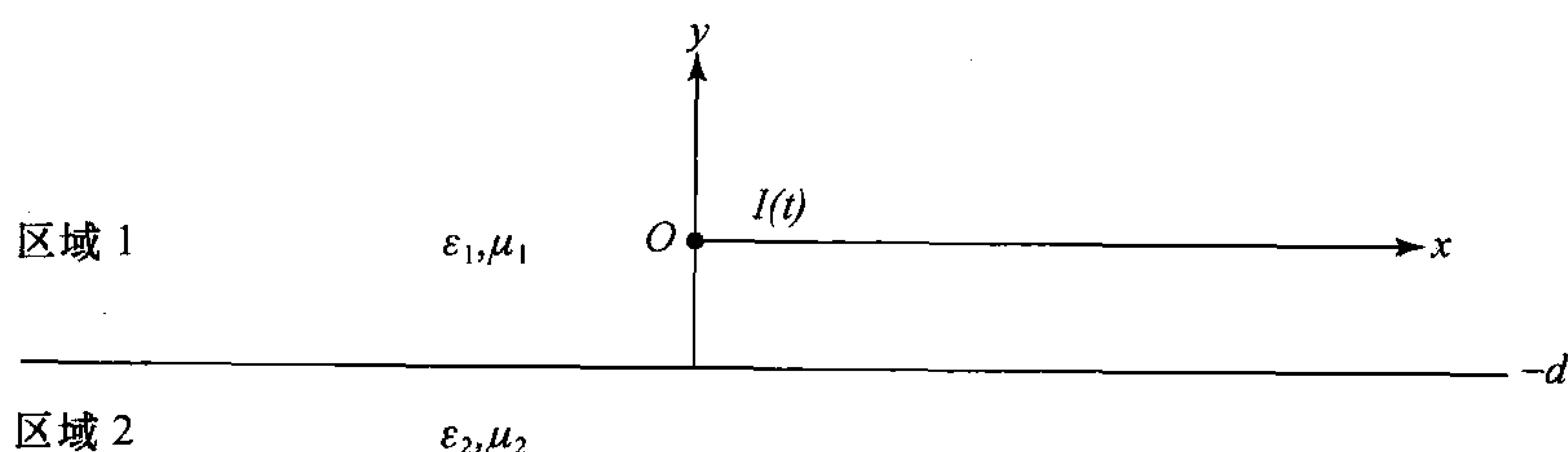


图 2-3　半空间上方的线源

z 轴与区域分界面平行,一无限长线电流源沿 z 轴放置,强度为 $I(t)$,分界面在 $y=-d$ 处.这样的源所产生的电场只有 E_z,故该源所激励的电磁场对 y 轴而言属于横电波,用TE表示.现在求解该线源所产生的电磁场在区域1中的响应,该响应场为源的辐射场与反射场的叠加.区域1中的电场用 E_{1z} 表示;当不存在分界面而只有 ε_1,μ_1 媒质时,源所产生的电场为入射电场,用 E_{1z}^{i} 表示,源电流密度为 $\boldsymbol{J}_s=\hat{z}I(t)\delta(x)\delta(y)$.根据以前的分析,$E_{1z}^{i}$ 所满足的时域方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon_1\mu_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_{1z}^{i}(x,y,t)=\mu_1\frac{\partial I(t)}{\partial t}\delta(x)\delta(y), \tag{2.5.1}$$

在频域所对应的方程便是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_1^2\right)\hat{E}_{1z}^{\mathrm{i}}(x,y,\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu_1\hat{I}(\omega)\delta(x)\delta(y), \tag{2.5.2}$$

其中 $k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_1$. 将方程(2.5.2)与方程(2.3.2)相比，可知两式的差别仅在电流的强度上，故方程(2.5.2)的解可表示成(2.3.6)的形式

$$\hat{E}_{1z}^{\mathrm{i}}(x,y,\omega)=-\frac{\omega\mu_1\hat{I}(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_{1y}|y|}}{k_{1y}}\mathrm{d}k_x, \tag{2.5.3}$$

其中 $k_{1y}=(k_1^2-k_x^2)^{\frac{1}{2}}$.

由式(2.5.3)可知，入射场 E_{1z}^{i} 已表示成平面波的叠加，故在求反射场时可利用平面波的反射规律. 若在区域 1 中的反射电场用 $\hat{E}_{1z}^{\mathrm{R}}$ 表示，则它可以表示成

$$\hat{E}_{1z}^{\mathrm{R}}(x,y,\omega)=-\frac{\omega\mu_1\hat{I}(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{k_{1y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx+\mathrm{i}k_{1y}(y+2d)}\mathrm{d}k_x, \tag{2.5.4}$$

其中 R_{12}^{TE} 表示 TE 波由区域 1 入射到区域 2 的电场反射系数，而且

$$R_{12}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mu_2k_{1y}-\mu_1k_{2y}}{\mu_2k_{1y}+\mu_1k_{2y}},$$

其中 $k_{iy}=(k_i^2-k_x^2)$，$k_i=\omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$，$i=1,2$.

式(2.5.3)的积分部分已在前面求出，若令 $F(t)$ 表示方程(2.3.1)的解(2.3.18)，则 $\hat{E}_{1z}^{\mathrm{i}}$ 可以表示为

$$\hat{E}_{1z}^{\mathrm{i}}(x,y,\omega)=\mathrm{i}\omega\mu\hat{I}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{2.5.5}$$

求其反变换，即得

$$\begin{aligned}E_{1z}^{\mathrm{i}}(x,y,t)&=-\mu_1\frac{\partial}{\partial t}I(t)*F(t)\\&=-\frac{\mu_1\dfrac{\partial}{\partial t}I(t)}{2\pi(t^2-\rho^2/v^2)}u(t-\rho/v),\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

其中 $v=1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$.

为了求 E_{1z}^{R}，我们仍采用卡尼亚尔-德胡普方法，为此令 $k_x=\omega s_x$，$k_i=\omega s_i$，则 $s_i=\dfrac{1}{v_i}=\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$，且 $s_{iy}=(s_i^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}$，则式(2.5.4)可表示成

$$\hat{E}_{1z}^{\mathrm{R}}(x,y,\omega)=-\frac{\omega\mu_1\hat{I}(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[s_xx+s_{1y}(y+2d)]}\mathrm{d}s_x \tag{2.5.7}$$

同时 R_{12}^{TE} 成为

$$R_{12}^{\mathrm{TE}}=\frac{\mu_2s_{1y}-\mu_1s_{2y}}{\mu_2s_{1y}+\mu_1s_{2y}},$$

它已是与频率无关的量. 和无界空间线源问题不同的是,式(2.5.7)中的被积函数存在以下支点

$$s_x = \pm s_1, \quad s_x = \pm s_2, \tag{2.5.8}$$

这使得问题变得更复杂. 和以前的方法类似,也作变换

$$t = s_x x + s_{1y}(y + 2d), \tag{2.5.9}$$

解出 s_x,则表示为

$$s_x = \frac{t}{\rho_I}\cos\phi_I \pm \mathrm{i}\left(\frac{t^2}{\rho_L^2} - s_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\phi_I, \tag{2.5.10}$$

其中 $\rho_I = [x^2 + (y+2d)^2]^{\frac{1}{2}}$ 为源的镜像点到观察点的距离,$\phi_I = \cos^{-1}(x/\rho_I)$. 经分析可知,在 s_x 复平面上,式(2.5.10)代表双曲线,如图 2-4 所示.

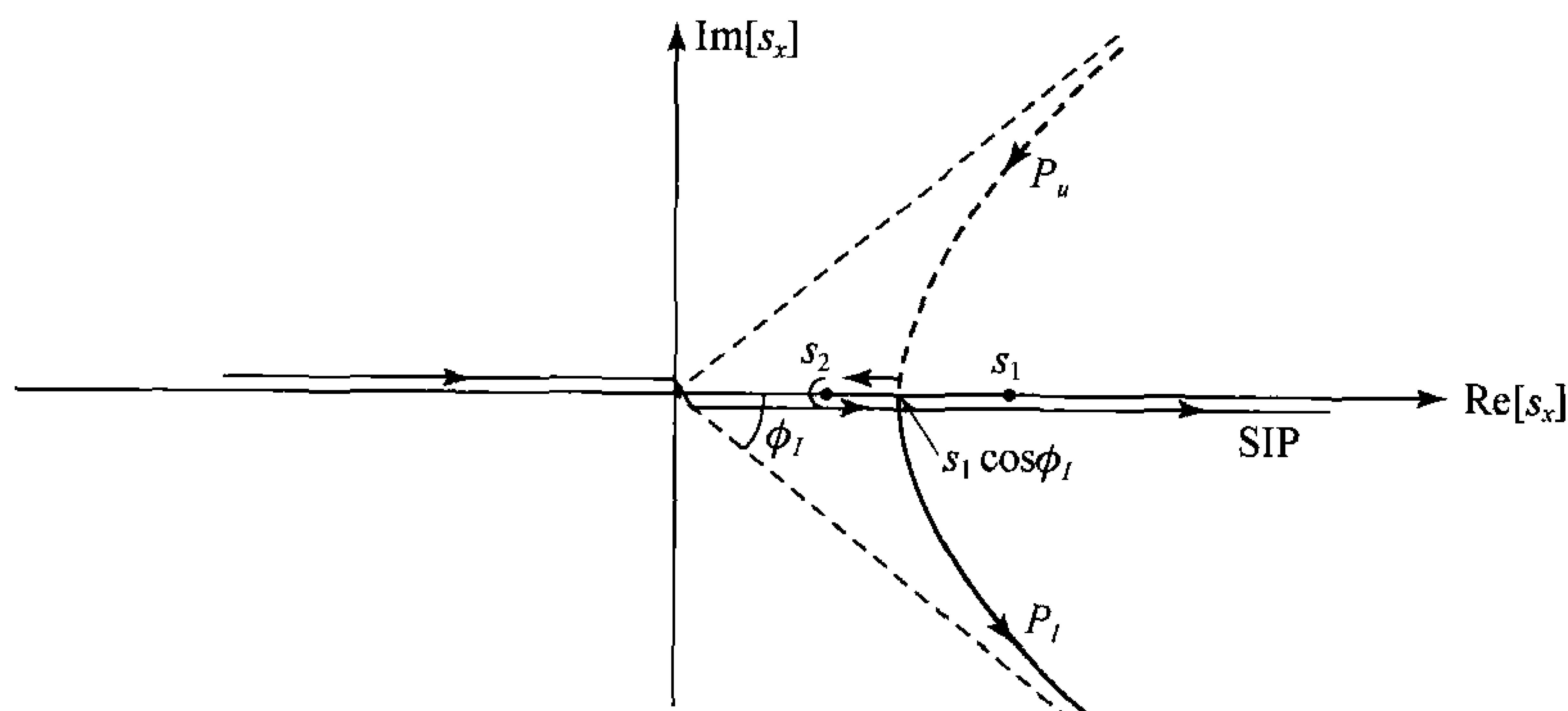


图 2-4　复 S_x 平面上的积分路径

若 $s_2 < s_1$,且 $s_1\cos\phi_I > s_2$,则积分路径由 SIP 变到双曲线上的过程中将跨过支点 s_2,从而产生与无界空间中不同的结果. 这时的 P_u 和 P_l 不能只从 $s_1\cos\phi_I$ 开始,而是要从 s_2 开始. s_2 点所对应的 t 为

$$t = s_2 x + \sqrt{s_1^2 - s_2^2}(y + 2d) = \tau, \tag{2.5.11}$$

如此可得到与式(2.3.13)类似的结果

$$\hat{E}_{12}^{R}(x,y,\omega) = -\frac{\omega\mu_1 \hat{I}(\omega)}{4\pi}\int_{\tau}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.5.12}$$

根据同样的理由和计算,与式(2.3.15)相类比,可得

$$\frac{1}{s_{1y}}\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\mathrm{i}}{(t^2 - s_1^2\rho_I^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.5.13}$$

由此可以看出,当 $t < s_1\rho_I$ 或 $s_x < s_1\cos\phi_I$ 时,$\frac{1}{s_{1y}}\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}$ 应为纯实数. 在这一段上 $s_x < s_1$, s_{1y} 也取实值. 对 s_{2y} 而言,$(s_{2y})_u$ 与 $(s_{2y})_l$ 是在两个不同的黎曼(Riemann)面

上，但它们是纯虚数并互为反号，故 R_{12}^{TE} 在 s_x 的实轴的上下沿互为共轭. 因此有

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l-\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u=\frac{2\mathrm{i}}{(s_1^2\rho_I^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Im}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l,t<s_1\rho_I. \tag{2.5.14}$$

但当 $t>s_1\rho_I$ 时，$\frac{1}{s_{1y}}\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}$ 却为纯虚数；此外，因 $(s_{1y})_u=(s_{1y})_l$，有 $s_2^2<s_x^2$，s_{2y} 为虚数，仍保持 R_{12}^{TE} 在 P_u 和 P_l 上互为共轭. 因此，

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l-\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u=\frac{-2\mathrm{i}}{(t^2-s_1^2\rho_I^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{Re}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l,t>s_1\rho_I. \tag{2.5.15}$$

由于 s_x 通过式(2.5.10)与 t 相关联，R_{12}^{TE} 已是 t 的函数，若令

$$\begin{aligned}f(t)=&\frac{\mu_1}{2\pi}\frac{\mathrm{Im}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l}{(s_1^2\rho_I^2-t^2)^{\frac{1}{2}}}[u(t-\tau)-u(t-s_1\rho_I)]\\&+\frac{\mu_1}{2\pi}\frac{\mathrm{Re}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l}{(t^2-s_1^2\rho_I^2)^{\frac{1}{2}}}u(t-s_1\rho_I),\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

则式(2.5.12)可以写做

$$\begin{aligned}\hat{E}_{1z}^{\mathrm{R}}(x,y,\omega)&=\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega).\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

根据傅里叶变换的性质，由此即可得到

$$E_{1z}^{\mathrm{R}}(x,y,t)=-\frac{\partial}{\partial t}I(t)*f(t). \tag{2.5.18}$$

由式(2.5.16)可以看出，区域 1 的反射波由两部分组成，其第一项称为横波或首波，第二项称为直接反射波. 该解是在条件 $s_2<s_1$ 的条件下获得的，如果该条件不出现，则首波不会出现. 这是由于 $s_2<s_1$，使得波在区域 2 中比在区域 1 中传播得要快，从而使得沿交界面折射路径传播的首波比直接反射波更早到达观察点. 分析式(2.5.16)的第一项，可知它只在 $\tau<s_1\rho_I$ 的情况下才存在；而当 $t>s_1\rho_I$ 时，只有代表直接反射波的第二项存在.

§2.6 半空间上方偶极子的瞬态响应[2]

偶极子的辐射是电磁场理论的基本问题之一，前面所讨论的点源问题是解决该问题的基础. 对于半空间上方偶极子的瞬态场的求解，也要首先解决入射场的计算问题，全部响应场的求解问题与上一节基本类似.

2.6.1 任意电流源场的计算

在均匀无耗各向同性媒质的无界空间中，场的矢势和标势在频域满足方程

(1.3.15)和(1.3.16),矢势的任一分量和标势的解由方程(1.4.12)给出.把矢势的分量叠加,就可得到解的表达形式

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mu\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{d}V', \tag{2.6.1}$$

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{1}{\varepsilon}\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\rho}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{d}V', \tag{2.6.2}$$

其中 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$,$V$ 为源的所在空间.

利用式(1.3.18),可求得电场

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)&=\mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},\omega)-\nabla\hat{\varphi}(\boldsymbol{r},\omega)\\&=\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'-\frac{\nabla}{\varepsilon}\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\rho}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'.\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

利用连续性方程

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\hat{\rho}(\boldsymbol{r},\omega), \tag{2.6.4}$$

式(2.6.3)又可表示为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'-\frac{\nabla}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\nabla'\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'. \tag{2.6.5}$$

根据矢量恒等式$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi$,可知

$$\nabla'\cdot[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)]=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\nabla'\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)+\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\cdot\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),$$

故有

$$\begin{aligned}\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\nabla'\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'&=\int_V\nabla'\cdot[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)]\mathrm{d}V'\\&\quad-\int_V\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\cdot\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'.\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

由高斯(Gauss)定理可知

$$\int_V\nabla'\cdot[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)]\mathrm{d}V'=\oint_S G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S'=0,$$

再考虑到$\nabla'G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,则式(2.6.5)成为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'-\frac{\nabla}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\int_V\nabla G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'. \tag{2.6.7}$$

交换上式中第二项中微分与积分的顺序,最后就可得到

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)&=\mathrm{i}\omega\mu\int_V\left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)+\frac{\nabla\nabla}{k^2}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\right]\mathrm{d}V'\\&=\mathrm{i}\omega\mu\int\left[\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V'\end{aligned}$$

$$= \mathrm{i}\omega\mu\int_V \bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}V' \tag{2.6.8}$$

其中 $\bar{\bar{I}}$ 为单位并矢.

$$\bar{\bar{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \left[\bar{\bar{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right]G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \tag{2.6.9}$$

称为并矢格林函数.

2.6.2 电偶极子的场

设均匀无耗媒质空间中有一取向为 $\boldsymbol{a}$ 的电偶极子 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{a}\hat{I}(\omega)l\delta(\boldsymbol{r})$，其中 $\hat{I}(\omega)$为电流强度，l 为其长度. 该电流在空间所产生的电场由式(2.6.8)给出. 由于 $\boldsymbol{J}$ 为点源，故电场可以写做

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\left(\bar{\bar{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\boldsymbol{a}\hat{I}(\omega)lG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{2.6.10}$$

如果取 $\boldsymbol{r}'=0$，则 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}$，于是

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\left(\bar{\bar{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\boldsymbol{a}\hat{I}(\omega)l\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}. \tag{2.6.11}$$

为了求出磁场，可利用关系

$$\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega),$$

由此可得到

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla\times\boldsymbol{a}\hat{I}(\omega)l\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}. \tag{2.6.12}$$

如果在所选的直角坐标系中 $\hat{a}=\hat{z}$，则由上式可知 $\hat{H}_z(\boldsymbol{r},\omega)=0$. 这说明该电偶极子的场对坐标 z 而言属于横磁波，用 TM 表示. 它的电场为

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\left(\bar{\bar{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\hat{z}\hat{I}(\omega)l\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}.$$

写出并矢算符$\nabla\nabla$ 的分量，然后与 $\hat{z}$ 点乘，可得

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu\left[\hat{z} + \frac{1}{k^2}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + \hat{z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\hat{I}(\omega)l\,\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{4\pi r}.$$

对于 TM 波，我们特别关注 E_z 分量. 由上式不难得出

$$\hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega\mu\hat{I}(\omega)l}{4\pi k^2}\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}. \tag{2.6.13}$$

在此前我们已证明式(1.4.8)是方程(1.4.3)的解，而式(2.3.25)是方程(2.3.20)的解. 当 $\boldsymbol{r}'=0$ 时，式(1.4.3)和(2.3.20)表示的是同一个方程，而该方程的解是唯一的，从而应该有

$$\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{i}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_x x+ik_y y+ik_z|z|}}{k_z}dk_x dk_y. \tag{2.6.14}$$

该式称为外尔(Weyl)恒等式. 为了满足辐射条件要求,对所有的 k_x 和 k_y 均有 $\mathrm{Im}(k_z)>0$,$\mathrm{Re}(k_z)>0$. 于是,该式相当于把球面波展开为所有方向平面波(包括雕落波)的叠加.

外尔恒等式也可以变换为另一种形式. 如果采用如下表示

$$\boldsymbol{k}_\rho=\hat{\boldsymbol{x}}k_\rho\cos\alpha+\hat{\boldsymbol{y}}k_\rho\sin\alpha,$$

$$\boldsymbol{\rho}=\hat{\boldsymbol{x}}\rho\cos\alpha+\hat{\boldsymbol{y}}\rho\sin\alpha,$$

如图 2-5 所示

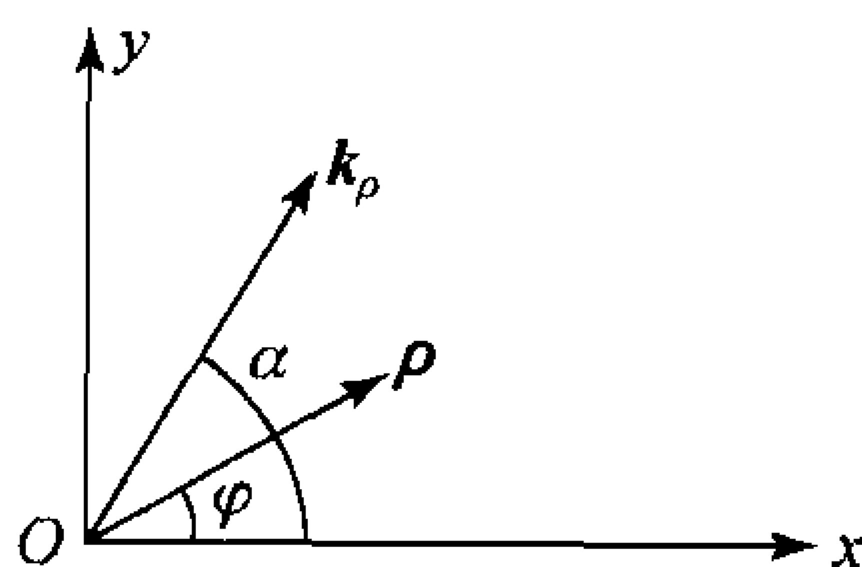


图 2-5　x-y 平面上的矢量 $\boldsymbol{k}_\rho$ 和 $\boldsymbol{\rho}$

则有

$$dk_x dk_y=k_\rho dk_\rho d\alpha,$$

$$k_x x+k_y y=\boldsymbol{k}_\rho\cdot\boldsymbol{\rho}=k_\rho\rho\cos(\alpha-\varphi),$$

把它们代入外尔恒等式,便得到

$$\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{k_\rho}{k_z}e^{ik_\rho\rho\cos(\alpha-\varphi)+ik_z|z|}d\alpha dk_\rho, \tag{2.6.15}$$

其中 $k_\rho=(k_x^2+k_y^2)^{\frac{1}{2}}$,$k_z=(k^2-k_\rho^2)^{\frac{1}{2}}$.

再利用恒等式

$$J_0(k_\rho\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{ik_\rho\rho\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha,$$

便有

$$\frac{e^{ikr}}{r}=i\int_0^{\infty}\frac{k_\rho}{k_z}J_0(k_\rho\rho)e^{ik_z|z|}dk_\rho, \tag{2.6.16}$$

该式称为索末菲恒等式,它把球面波表示成柱面波乘上 z 方向平面波及雕落波的叠加.

把索末菲恒等式用于式(2.6.13),便可得到电偶极子电场的一种积分表示

$$\hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{\hat{I}(\omega)l}{4\pi\omega\varepsilon}\int_0^{\infty}\frac{k_\rho^3}{k_z}J_0(k_\rho\rho)e^{ik_z|z|}dk_\rho. \tag{2.6.17}$$

如果把麦克斯韦方程的各场量均分解为横向分量与纵向分量之和,而磁场的纵向分量为零,则可得到

$$\hat{\boldsymbol{H}}_s(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k_\rho^2}\hat{z} \times \nabla_s \hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega), \tag{2.6.18}$$

把式(2.6.17)代入上式，则可得到

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{4\pi}\int_0^\infty \frac{k_\rho^2}{k_z}\mathrm{J}_1(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z|}\mathrm{d}k_\rho, \tag{2.6.19}$$

该式又可表示为

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{4\pi}\int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_z}\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z|}\mathrm{d}k_\rho. \tag{2.6.20}$$

2.6.3 半空间上方竖直电偶极子的瞬态响应

现在考虑类似于图 2-3 所示的问题，但把 y 轴换成 z 轴，且在 $x=0,y=0$ 处放置取向 z 的电偶极子 $\boldsymbol{J}_s=\hat{\boldsymbol{z}}I(t)l$. 根据上面的讨论可知，该源在区域 1 中的入射场由式(2.6.17)表示，加上反射场以后的总场，则为

$$\hat{E}_{1z}(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\hat{I}(\omega)l}{4\pi\omega\varepsilon_1}\int_0^\infty \frac{k_\rho^3}{k_{1z}}\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2d)}\right]\mathrm{d}k_\rho, \tag{2.6.21}$$

其中

$$R_{12}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}}. \tag{2.6.22}$$

对磁场而言，在区域 1 中的入射场由式(2.6.20)表示，加上反射场后在区域 1 中的总响应场，应为

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{4\pi}\int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_{1z}}\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2d)}\right]\mathrm{d}k_\rho. \tag{2.6.23}$$

下面考虑求解磁场，主要问题是求出上式中的积分. 为了方便，用 $\hat{P}$ 表示这一部分，即令

$$\hat{P}(\omega) = \frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{4\pi}\int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_{1z}}\mathrm{J}_0(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|}\left[1 + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}2d}\right]\mathrm{d}k_\rho. \tag{2.6.24}$$

为了方便地应用卡尼亚尔-德胡普方法解决这一问题，运用外尔恒等式再把上式变回到直角坐标系中，可得

$$\hat{P}(\omega) = \frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x+\mathrm{i}k_y y}}{k_{1z}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2d)}\right]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y. \tag{2.6.25}$$

若把上式的第一项记做 $\hat{P}_D(\omega)$，并与式(2.3.25)相比较，再考虑式(2.3.33)，即可得

$$P_D(t)=\frac{l}{4\pi r}I(t)*\delta(t-r/v)$$
$$=\frac{I(t-r/v)l}{4\pi r}.\tag{2.6.26}$$

其中 $v=1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$.

若用 $\hat{P}_R(\omega)$表示式(2.6.25)的第二部分,并进行坐标变换

$$k_x=\beta_x\cos\varphi-\beta_y\sin\varphi,$$
$$k_y=\beta_x\sin\varphi+\beta_y\cos\varphi,$$

则得

$$\hat{P}_R(\omega)=\frac{\mathrm{i}\hat{I}(\omega)l}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_x\rho}}{k_{1z}}R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_{1z}(z+2d)}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y.\tag{2.6.27}$$

其中

$$R_{12}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon_2\beta_{1z}-\varepsilon_1\beta_{2z}}{\varepsilon_2\beta_{1z}+\varepsilon_1\beta_{2z}},$$
$$\beta_{iz}=(k_i^2-\beta_x^2-\beta_y^2)^{\frac{1}{2}},\quad i=1,2.$$

再令 $\beta_x=\omega s_x,\beta_y=\omega s_y$,就又得到

$$\hat{P}_R(\omega)=\frac{\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)l}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[s_x\rho+s_{1z}(z+2d)]}}{s_{1z}}R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y.\tag{2.6.28}$$

此时 $R_{12}^{\mathrm{TM}}=(\varepsilon_2 s_{1z}-\varepsilon_1 s_{2z})/(\varepsilon_2 s_{1z}+\varepsilon_1 s_{2z})$, $s_{iz}=(s_i^2-s_x^2-s_y^2)^{\frac{1}{2}}$, $s_i=(\varepsilon_i\mu_i)^{\frac{1}{2}}$, $i=1,2$. 和对式(2.3.28)的处理一样,先把对 s_y 的积分变换到虚轴,然后再令 $s_y=-\mathrm{i}q$,就得到

$$\hat{P}_R(\omega)=\frac{\omega\hat{I}(\omega)l}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega[s_x\rho+s_{1z}(z+2d)]}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}q,\tag{2.6.29}$$

其中 $s_{1z}=(s_1+q^2-s_x^2)^{\frac{1}{2}}$. 作类似的变换

$$t=s_x\rho+s_{1z}(z+2d),$$

则

$$s_x=\frac{t}{r_I}\cos\theta_I\pm\mathrm{i}\left(\frac{t^2}{r_I}-s_1^2-q^2\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta_I,$$

其中 $r_I=[\rho^2+(z+2d)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\rho}{r_I}=\sin\theta_I$.

在式(2.6.29)中,被积函数的支点为

$$s_x=\pm(s_1^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\alpha_1,\quad s_x=\pm(s_2^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=\pm\alpha_2.$$

如果有 $s_2<s_1$,而 α_2 又如图 2-6 所示,则和以前一样,当把积分路径 SIP 变到双曲线 P 时,也要跨过支点 α_2. 当 $s_x=s_2$ 时,$t=\alpha_2\rho+\sqrt{s_1^2-s_2^2}(z+2d)=\tau$,则在上

述变换下，式(2.6.29)可写为

$$\hat{P}_R(\omega) = \frac{\omega\hat{I}(\omega)l}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_u\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}q. \tag{2.6.30}$$

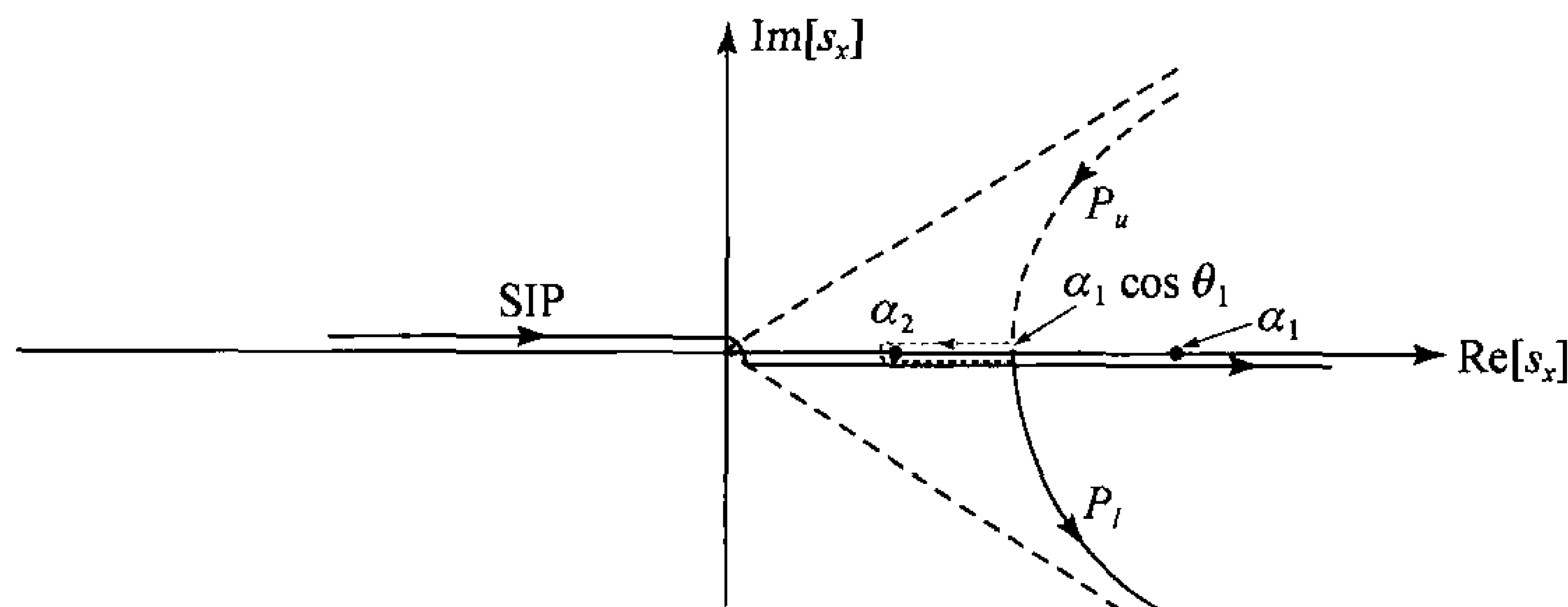


图 2-6 复 s_x 上的积分路径

由与以前的分析中类似的理由可知，$(s_x)_u=(s_x)_l^*$，$(s_{1z})_u=(s_{1z})_l$，又因总有 $s_2^2+q^2=\alpha_2^2<s_x^2$，故 s_{2z}总为虚数，于是$(s_{2z})_u=(s_{2z})_l^*$，结果

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_u = \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l^*.$$

这样，式(2.6.30)又可以写做

$$\hat{P}_R(\omega) = \frac{-\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)l}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}q. \tag{2.6.31}$$

为了交换上式的积分顺序，先找出 t 与 q 的关系，由 $t=\tau$ 可知

$$t = (s_2^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{s_1^2-s_2^2}(z+2d),$$

由此解得

$$q = \pm\frac{1}{\rho}[(t-b)^2 - s_2^2\rho^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.6.32}$$

其中 $b=\sqrt{s_1^2-s_2^2}(z+2d)$. 式(2.6.32)表示一条对 t 轴对称的曲线，$q=0$ 时 t 值最小，故 t 取值 $s_2\rho+b$ 时，为对 t 积分的下限. 若令

$$t_0 = s_2 p + b, q_0(t) = \frac{1}{\rho}[(t-b)^2 - s_2^2\rho^2]^{\frac{1}{2}},$$

则积分式(2.6.31)可表示为

$$\hat{P}_R(\omega) = \frac{-\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)l}{4\pi^2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{-q_0(t)}^{q_0(t)}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}q\mathrm{d}t. \tag{2.6.33}$$

若令

$$f(t) = \frac{l}{4\pi^2}\int_{-q_0(t)}^{q_0(t)}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l u(t-t_0)\mathrm{d}q, \tag{2.6.34}$$

则有

$$\hat{P}_R(\omega) = -\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\omega\hat{I}(\omega)\hat{f}(\omega),$$

对上式求傅里叶反变换,就得到

$$P_R(t) = \frac{\partial}{\partial t}I(t) * f(t). \tag{2.6.35}$$

到此,可把最后解表示为

$$H_s(\boldsymbol{r},t) = \frac{I(t-r/v)}{4\pi r} - \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{\partial}{\partial t}I(t) * f(t)\right]. \tag{2.6.36}$$

把该式的第一项与式(2.3.33)所表示的点源时域格林函数比较可知,它就是电偶极子的辐射场,也就是对分界面的入射场. 而由分析过程可知,式(2.6.36)的第二项表示的是反射波. 以上方法也可用于分析半空间上方其他取向的偶极子.

第三章　色散媒质中的瞬变电磁场

所谓色散媒质，这里是指介电常数或磁导率与频率有关的媒质，时谐电磁波在这种媒质中传播时的相速度随频率而变化，从而导致非时谐电磁波在其中传播的过程中波形发生畸变，出现复杂的传播过程. 因此适用于色散媒质的时域麦克斯韦方程变得更加复杂，时域解析解的求解也变得更加困难. 本章除介绍色散媒质的基本特性外，将根据索末菲和布里渊理论讨论有关电磁波在色散媒质中传播速度的概念.

§3.1　色散媒质的特性

3.1.1　色散媒质

从上一章的分析中已知，对于时谐平面电磁波可以定义等相面传播的速度，简称相速. 相速与媒质的介电常数 ε、磁导率 μ 和电导率 σ 有关. 若媒质是非导电的且 ε 和 μ 也不随频率而变，则相速度为恒定值，与频率无关. 对非时谐波而言，它可被视做时谐波的叠加，由于各时谐波的相速相同，故能保持波形在传播过程中不发生变化. 但是，若媒质是导电的，即使 ε 和 μ 与频率无关，时谐波的相速和衰减系数仍然是频率的函数. 对非时谐波而言，各时谐波分量之间将在传播方向上发生相对位移，从而导致在传播过程中产生波形畸变. 这种电磁波相速随频率而变化的现象称做色散.

对某些媒质而言，即使导电率的影响完全可以忽略，由于其参数 ε 和 μ 是频率的函数，仍然具有色散特性. 这种媒质在电磁场理论中具有特殊意义，并称之为色散媒质. 严格地讲，所有媒质都呈现出某种程度的色散性质，只是在某些频率范围内、在某些情况下可以忽略相速随频率的变化，而近似地视做非色散媒质.

媒质的色散特性是由于电磁场与媒质中的带电粒子的相互作用而产生的. 在电磁波对媒质的作用中，磁场的作用力比电场的作用力要小. 此外，电场可以直接改变媒质内的电偶极矩，从而直接诱发其中的束缚电流，磁场却只能通过对磁矩的作用使磁矩的方向靠拢磁场方向而增加磁化强度，从而间接地诱发媒质内的束缚电流，而且由于弛豫时间的影响又减弱了这种效能. 因此，色散现象主要是由于电场的作用所引起的，故主要考虑介电常数随频率的变化.

由于色散现象的存在,使得非时谐电磁波在色散媒质中的传播呈现非稳定状态.在这种情况下,针对稳定状态所定义的描述电磁波传播特性的某些参量可能会变得意义不清,甚至毫无意义.因此,正确地分析认识这种复杂的传播特性,不仅在理论上、尤其在实际应用中都具有非常重要的意义.

就理论分析而言,由于在频域电磁场理论中频率被视做一个参变量,在求解过程中是固定的,因此频域解对色散媒质也是成立的.但是,对非时谐场而言,如果要由频域解通过傅里叶逆变换求得时域解析解,则会因为介电常数必须被视做频率的函数而变得非常困难.另一方面,适用于色散媒质的时域麦克斯韦方程将同时包含微分和积分,从这种方程出发直接求其时域解也不是容易的事情.

3.1.2　色散媒质的经典模型

为了求得媒质的介电常数与频率的关系,需要考虑电磁波与媒质中带电粒子的相互作用.完整的色散理论需要考虑物质的分子结构,将分子看成服从量子力学规律的动力学系统.然而,经典的色散理论也能给出很有意义的结果,在许多场合能给出介电常数作为频率函数的正确表达式.

为方便起见,我们假定媒质由相同的原子构成,每个原子由带电荷 q 的原子核和总电量为 $-q$ 的围绕原子核运动的电子组成.在外部电磁场的作用下,产生电子的位移(由于原子核比电子的质量大许多,可近似地认为原子核静止),使原子极化.每个原子中电子的这种位移运动可视做一个线性简谐振子,作为色散媒质经典模型考虑的一种动力学系统.设振子的密度为 N,在求得了振子在外力作用下的振幅之后,就可以求得媒质的极化强度.在求极化强度时,要把各振子的电偶极矩在一个很小却是宏观区域内平均.设电磁波的波长比这一区域的尺度大得多,可把电场对振子的作用看做是同相的,故把电场只作为时间的函数.进一步简化,可认为振子的振幅很小,使得我们可以在电子的平均位置上计算电场,并忽略外电场与局部电场的差别和磁场的影响.

除了受外电场力的作用外,振子还受惯性力、阻尼力和恢复力的作用.设电子的有效质量为 m,位移用 r 表示,则振子的动力学方程可表示为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+2m\rho\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+kr(t)=-qE(t),\qquad(3.1.1)$$

其中 ρ 为衰减因子,k 为恢复系数,$E(t)$ 为电磁波的电场.如果电场不是时谐的,可对式(3.1.1)进行如式(1.1.22)所表示的傅里叶变换,其频域方程是

$$\omega^2\hat{r}(\omega)+\mathrm{i}2\omega\rho\hat{r}(\omega)-\omega_r^2\hat{r}(\omega)=\frac{q}{m}\hat{E}(\omega),\qquad(3.1.2)$$

其中 $\omega_r=(k/m)^{\frac{1}{2}}$,为振子的固有振荡频率.由该式立刻可求得在频率为 ω 时振子的位移

$$\hat{r}(\omega)=\frac{-\frac{q}{m}\hat{E}(\omega)}{\omega_r^2-\mathrm{i}2\omega\rho-\omega^2}.\tag{3.1.3}$$

进而可求得极化强度

$$P=-Nq\hat{r}(\omega)=\frac{\frac{Nq^2}{m}\hat{E}(\omega)}{\omega_r^2-\mathrm{i}2\omega\rho-\omega^2}=\hat{\chi}_e(\omega)\hat{E}(\omega),\tag{3.1.4}$$

和介电常数

$$\hat{\varepsilon}_r(\omega)=1+\hat{\chi}_e(\omega)=1+\frac{a^2}{\omega_r^2-\mathrm{i}2\omega\rho-\omega^2},\tag{3.1.5}$$

其中 $a^2=Nq^2/m\varepsilon_0$.

通常情况下,衰减系数 ρ 比固有频率 ω_r 小很多,因此对大多数频率而言 $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 近似为实数. 如果忽略 ρ 的影响则很容易看出:当 $\omega<\omega_r$ 时,$\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 大于 1;当 $\omega>\omega_r$ 时,$\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 小于 1,但都随 ω 的增加而增加. 显然,在 $\omega=\omega_r$ 时,$\hat{\chi}_e(\omega)$ 为纯虚数,其实部为零,这意味着在 $\omega=\omega_r$ 的附近 $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 的实部经历较强的变化,从大于 1 迅速地变为小于 1,随频率的增加迅速地减小. 当 $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 的实部随频率增加而增加时,称为正常色散;反之,当 $\hat{\varepsilon}_r(\omega)$ 的实部随频率增加而减小时,就称为反常色散. 由式(3.1.5)可以看出,在反常色散出现的频率范围内,$\hat{\varepsilon}_r$ 的虚部出现一个明显的高峰. $\hat{\varepsilon}_r$ 的正的虚部代表电磁波的能量散逸到媒质中,所以反常色散的这一区域对应着媒质的吸收带.

以上讨论使用的是一个非常简单的模型,对于各种不同的实际媒质,需要加以适当的修改. 对于讨论电磁波在色散媒质中传播的基本特性,这已能给出很有价值的重要结论.

§ 3.2 波包、群速和能速

时谐电磁波是一种单一频率且时间上从负无穷到正无穷延续的稳定的传播状态,这种状态的电磁波是理想化的,它不携带任何信息. 严格地讲,实际遇到的电磁波在时间上都是有限的,从而其频率成分也不可能是单一的. 波包是非时谐波的一种典型的描述方法,由它可引出一系列电磁波传播的重要概念.

3.2.1 波包和群速

在讨论时谐平面电磁波时,引入了相速度的概念,它代表了稳态波等相面的传播速度. 由于这一速度的定义只与相位联系,不能直接反映能量或信号的传播状况. 为了讨论有关能量和信号的传播问题,需要研究非时谐电磁场的传播,波

包是一个有价值的研究对象.

在与波包有关的问题中,两个频率相近的时谐波的叠加是最简单直观的一种情况.设有两列沿同一方向 z 传播的平面电磁波,其电场沿同一个方向极化,可以分别表示为

$$u_1(z,t) = \cos(kz - \omega t),$$
$$u_2(z,t) = \cos[(k+\delta k)z - (\omega + \delta\omega)t], \tag{3.2.1}$$

其中 δk 和 $\delta\omega$ 与 k 和 ω 相比均为很小的量.把两波叠加,即成为

$$u(z,t) = u_1(z,t) + u_2(z,t)$$
$$= 2\cos\left[\frac{1}{2}(\delta k \cdot z - \delta\omega \cdot t)\right]\cos\left[\left(k+\frac{\delta k}{z}\right)z - \left(\omega + \frac{\delta\omega}{z}\right)t\right], \tag{3.2.2}$$

它代表振幅周期性变化的一个波列,其振幅的包络为

$$A(z,t) = 2\cos\left[\frac{1}{2}(\delta k \cdot z - \delta\omega \cdot t)\right]. \tag{3.2.3}$$

它的变化周期比原始时谐波要大得多,呈现为周期性重复的"群"的系列.每个群也以一定的速度沿 z 运行,把这个群称为波包,这个速度称为群速.这个速度的含义与波群的幅度相联,显然与能量和信号有直接的关系.为了确定群的传播速度,可观察群中任一固定面的运行情况.显然,群的等值面的运动方程为

$$\delta k \cdot z - \delta\omega \cdot t = \text{const}. \tag{3.2.4}$$

由此即可得到群速 v_g 为

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta k}, \tag{3.2.5}$$

或在极限情况下记做

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{3.2.6}$$

下面考虑更一般的情况.如果参与叠加的不仅仅是两个时谐波,而是振幅不等的频率连续分布的无穷列波的叠加,并可表示为

$$u(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kz-\omega t)}dk. \tag{3.2.7}$$

若限定参与叠加的波分布在一个很窄的频带内,即在 $k_0 - \delta k \leqslant k \leqslant k_0 + \delta k$ 之外的 $A(k)$ 可以忽略不计,则式(3.2.7)可写为

$$u(z,t) = \int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} A(k)e^{i(kz-\omega t)}dk. \tag{3.2.8}$$

设 k 为实函数,并把 ω 看做 k 的函数,则将 $\omega(k)$ 在 k_0 附近进行展开,可得

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} + \cdots. \tag{3.2.9}$$

在 $\delta k = k - k_0$ 充分小的条件下,上面展开式中的高阶项可以忽略,这时有

$$kz - \omega t = k_0 z - \omega_0 t + (k - k_0)\left[z - \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} t\right], \tag{3.2.10}$$

其中 $\omega_0 = \omega(k_0)$. 把上式代入式(3.2.8),即可得

$$u(z,t) = u_0(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z - \omega_0 t)}, \tag{3.2.11}$$

其中

$$u_0(z,t) = \int_{k_0-\delta k}^{k_0+\delta k} A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k_0)\left[z-\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} t\right]}\mathrm{d}k, \tag{3.2.12}$$

为 $u(z,t)$ 振幅的包络,其上任一平面的运动方程是

$$z - \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} t = \text{const}, \tag{3.2.13}$$

由此可知波包 $u_0(z,t)$ 的群速为

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}, \tag{3.2.14}$$

它与前面所得的结果一致.

对非色散媒质,$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\omega/v_p$,$v_p=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 为相速,于是由式(3.2.14)得知,$v_g=v_p$,亦即在非色散媒质中,群速和相速是一致的.

3.2.2 波包在色散媒质中的传播

为了研究波包在色散媒质中传播的特性,考虑色散媒质占据 $z>0$ 的半空间的情况,并设定在边界上输入电磁信号

$$u(0,t) = u_0(t), \tag{3.2.15}$$

它的频谱为

$$\hat{u}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

该信号在色散媒质中激发起平面电磁波,其中的每一频谱分量独立地沿 z 轴方向传播,而总的波则是各频谱时谐波的叠加

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k(\omega)z-\omega t]}\mathrm{d}\omega. \\ &= \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} u_0(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)z}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

如果 $u_0(t)$ 是个频带很窄的信号,则不管色散媒质的色散规律如何,上式中表征媒质色散的 $k(\omega)$ 可在中心频率 ω_0 展开为

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega-\omega_0)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} + \frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_0} + \cdots. \tag{3.2.17}$$

在二阶近似的情况下,可以得到

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\omega(t-t')+\mathrm{i}k(\omega)z \\
&\quad=\mathrm{i}k_0 z-\mathrm{i}\omega_0 t-\mathrm{i}\left[(t-t')-\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0} z\right](\omega-\omega_0) \\
&\quad\quad+\frac{\mathrm{i}}{2}z\left(\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2,
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

代入式(3.2.16)后，即有

$$
u(z,t)=U(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 z-\omega t)}, \tag{3.2.19}
$$

其中 $k_0=k(\omega_0)$，且

$$
U(z,t)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}A_0(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left[(t-t')-\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}z\right](\omega-\omega_0)+\frac{\mathrm{i}}{2}z\left(\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2}\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t', \tag{3.2.20}
$$

而 $A_0(t)$ 则是与 $u_0(t)$ 有关的一个函数，它的形式对当前的问题并不重要. 如果只取展开式(3.2.17)的线性部分，则式(3.2.20)中对 ω 的积分为 δ 函数，于是有

$$
U(z,t)=A_0\left(t-\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}z\right)=A_0(t-z/v_g). \tag{3.2.21}
$$

由于 $U(z,t)$ 表示 $u(z,t)$ 的振幅包络，它的运动状态代表波包的传播状态. 由以前的讨论可知，波包的传播速度即为群速 v_g.

由式(3.2.21)可知，在色散的一阶近似条件下，波包的振幅是沿 z 单方向传播的波，它满足一阶方程

$$
\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial U}{\partial t}=0. \tag{3.2.22}
$$

把上式乘以 U 的复共轭 U^*，再对该方程取共轭后乘以 U，然后相加，便可得

$$
\frac{\partial|U|^2}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial|U|^2}{\partial t}=0. \tag{3.2.23}
$$

因为 $|U|^2$ 表征波的能量密度，则上式说明波包的能量也以群速传播.

如果媒质参数 $\mu=\mu_0$，则 $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}=\omega n/c$，其中 $n=c\sqrt{\varepsilon\mu}=\sqrt{\varepsilon_r}$ 为媒质的折射率，c 为光速. 这时群速又可表示为

$$
v_g=c\left[\frac{\mathrm{d}(\omega n)}{\mathrm{d}\omega}\right]_{\omega_0}^{-1}=c\left[n(\omega_0)+\omega_0\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right]^{-1}. \tag{3.2.24}
$$

由此可见，在正常色散情况下，由于 $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega>0$，群速度总是小于相速度；在反常色散情况下，当 $n(\omega_0)+\omega_0(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\omega)_{\omega_0}<1$ 时，就会出现 $v_g>c$ 的结果. 这是否与相对论相矛盾呢？这需要仔细地加以分析，不能简单地下结论. 首先需要注意的，是以上结果是在对色散特性进行线性近似的条件下得到的. 由于在反常色散区 $k(\omega)$ 变化非常之快，以致于式(3.2.17)中的高阶项必须加以考虑. 也就是说，在反常色散的情况下，色散特性的一阶近似已不适用.

严格地讲，上面得到的 $v_g=(d\omega/dk)_{\omega_0}$ 这种群速度不变的结论仅在满足一阶(或线性)近似条件时才是正确的. 如果考虑二阶近似，$U(z,t)$ 满足的是抛物型方程，且方程具有虚扩散系数，表明群速度也是色散的，波包在传播过程中会不断改变包络而流散，而且还会改变相位调制.

关于瞬变电磁场在色散媒质中传播的详细过程，将在后面两节中用较严格的方法进行讨论.

§3.3 色散媒质中瞬变电磁场传播的索末菲理论[10]

瞬变电磁场在色散媒质中的传播是个比较复杂的问题，严格的理论求解有相当的难度. 人类对这个问题的认识经历了一个不断深入的过程，尤其是对非时谐电磁场传播速度的认识，如群速(或能速)是否能超过光速 c，至今还存在争议. 在 20 世纪的早期，索末菲和布里渊(L. Brillouin)就相继对这个问题进行了严格详尽的研究，至今还没有人对他们的理论提出过修正或补充. 因此，索-布二氏的理论在当代仍然有重要意义. 本节将介绍索氏的理论要点.

3.3.1 问题的描述和表示方法

到现在为止，我们研究了电磁波传播的相速和群速. 但是，相速和群速都是针对稳态波动过程定义的，它们与能携带信息的信号的速度并无直接的联系. 稳态波动不能传递信息，必须研究电磁场的瞬变过程. 为了研究信号的传播过程，最好的办法是考虑原来根本不存在电磁波的媒质中突然接入电磁波的传播问题.

索末菲研究的问题是，在时间 $t=0$ 时，在色散媒质表面突然出现一个正弦变化的平面电磁波(或者说，在 $t=0$ 时，一个正弦信号源在 $z=0$ 平面上被接通)，讨论在深度 z 处电磁波建立的瞬变过程. 这种突然被接入的电磁波，是一种电磁信号，它包含有很宽的频谱，它的传播特性对非时谐电磁场的研究具有代表性，对有关电磁信号在色散媒质中传播的速度问题可提供非常重要的结论.

根据上面对问题的描述知，输入信号 f 可表示为

$$f(z=0,t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \sin\omega_0 t, & t>0.\end{cases} \tag{3.3.1}$$

这一信号不满足傅里叶变换所需要的条件，不能采用前面所用的方法. 但是，$f(0,t)$ 的拉普拉斯(Laplace)变换却是存在的，相当于把变换域 ω 扩展为复频域 $p=\sigma+i\omega$. 由于输入信号 $f(0,t)$ 在 $t<0$ 时为零，故它的拉氏变换可表示为

$$F(0,p)=\int_0^{\infty} f(0,t)e^{-pt}dt. \tag{3.3.2}$$

若媒质内部 z 处的波用 $f(z,t)$ 表示，则它的拉氏变换可表示为

$$F(z,p)=\int_0^{\infty}f(z,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t. \tag{3.3.3}$$

在实频域中，对于任一谐波在不同位置上有如下的关系

$$\hat{f}(z,\omega)=\hat{f}(0,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\omega)z}, \tag{3.3.4}$$

对应于复频域有相应的关系

$$F(z,p)=F(0,p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(p)z}. \tag{3.3.5}$$

在实频域中 $k(\omega)=\frac{\omega}{c}n(\omega)$，在复频域中即成为 $k(p)=\frac{\mathrm{i}p}{c}n(p)$，所以又有

$$F(z,p)=F(0,p)\mathrm{e}^{-\frac{p}{c}n(p)z}, \tag{3.3.6}$$

求其逆变换，即可得

$$\begin{aligned}f(z,t)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}F(0,p)\mathrm{e}^{-\frac{p}{c}n(p)z}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}F(0,p)\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}\,\mathrm{d}p.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

其中 γ 为常量，令

$$g(0,t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, & t>0,\end{cases} \tag{3.3.8}$$

则

$$f(0,t)=-\operatorname{Im}[g(0,t)]. \tag{3.3.9}$$

由于

$$G(0,p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega_0}, \tag{3.3.10}$$

若令

$$g(z,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}\,\mathrm{d}p, \tag{3.3.11}$$

则有

$$f(z,t)=-\operatorname{Im}[g(z,t)]. \tag{3.3.12}$$

这样，问题就归结为如何求得 $g(z,t)$，也就是根据实际媒质特性求得积分(3.3.11).

3.3.2 信号在色散媒质中传播的基本特性

为了明确起见，假设所考虑的媒质能用§3.1中的经典模型来表征，于是有

$$n(\omega)=\sqrt{\hat{\varepsilon}_r(\omega)}=\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega_r^2-\mathrm{i}2\omega\rho-\omega^2}}, \tag{3.3.13}$$

而在复频域中，则成为

$$n(p)=\sqrt{1+\frac{a^2}{\omega_r^2+2\rho p+p^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{p^2+2\rho p+\omega_r^2+a^2}{p^2+2\rho p+\omega_r^2}}. \tag{3.3.14}$$

为了记述方便，令

$$H(p)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}, \tag{3.3.15}$$

则式(3.3.11)可简记为

$$g(z,t)=\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}H(p)\mathrm{d}p. \tag{3.3.16}$$

由 $n(p)$ 的表达式可知，$H(p)$ 是多值函数，故存在支点，而且还有极点. $H(p)$ 的极点显然在 $p=-\mathrm{i}\omega_0$，而支点则有 a，b 两组：

a. 当 $p^2+2\rho p+\omega_r^2=0$ 时，$n(p)=\infty$，这时的 p 值为支点，显然

$$p=-\rho\pm\mathrm{i}\sqrt{\omega_r^2-\rho^2}=-\rho\pm\mathrm{i}\omega_a,$$

其中 $\omega_a=\sqrt{\omega_r^2-\rho^2}$. 两个支点记做

$$a_1=-\rho+\omega_a,\quad a_2=-\rho-\mathrm{i}\omega_a. \tag{3.3.17}$$

b. 当 $p^2+2\rho p+\omega_r^2+a^2=0$ 时，$n(p)=0$，这时的 p 值为另外两个支点，它们是

$$p=-\rho\pm\mathrm{i}\sqrt{\omega_r^2+a^2-\rho^2}=-\rho\pm\mathrm{i}\omega_b,$$

其中 $\omega_b=\sqrt{\omega_r^2+a^2-\rho^2}$. 这两个支点分别记做

$$b_1=-\rho+\mathrm{i}\omega_b,\quad b_2=-\rho-\mathrm{i}\omega_b. \tag{3.3.18}$$

在图 3-1 中给出了以上支点和极点所在的位置，由于在 p 平面的右半平面没有被积函数的奇点，故式(3.3.16)的积分路径可选为右半平面内与虚轴平行的一条直线 L. 由图可以看出：当 $R\to\infty$ 时，L 和 C_1 构成闭合回路. 故由柯西定理可知，可把积分路径 L 换成 $R\to\infty$ 时的 C_1，于是有

$$g(z,t)=\int_{C_1}H(p)\mathrm{d}p. \tag{3.3.19}$$

下面分几种情况对这一积分进行讨论.

(1) $t<\frac{z}{c}$，即 $\tau=t-\frac{z}{c}<0$.

由于在 C_1 上 $p\to\infty$ 且 $\mathrm{Re}(p)>0$，$n(\infty)=1$，故在 C_1 上有

$$H(p)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{p\tau}\to 0,$$

由此可知

$$g(z,t)=\int_{C_1}H(p)\mathrm{d}p=0,\quad t<\frac{z}{c}. \tag{3.3.20}$$

对实信号，也有

$$f(z,t) = -\operatorname{Im}[g(z,t)] = 0, \quad t < \frac{z}{c}. \tag{3.3.21}$$

这表明，在 $t<\frac{z}{c}$ 时，在距离 z 处没有任何信号出现，也就是说，电磁信号不会以大于光速 c 的速度传播.

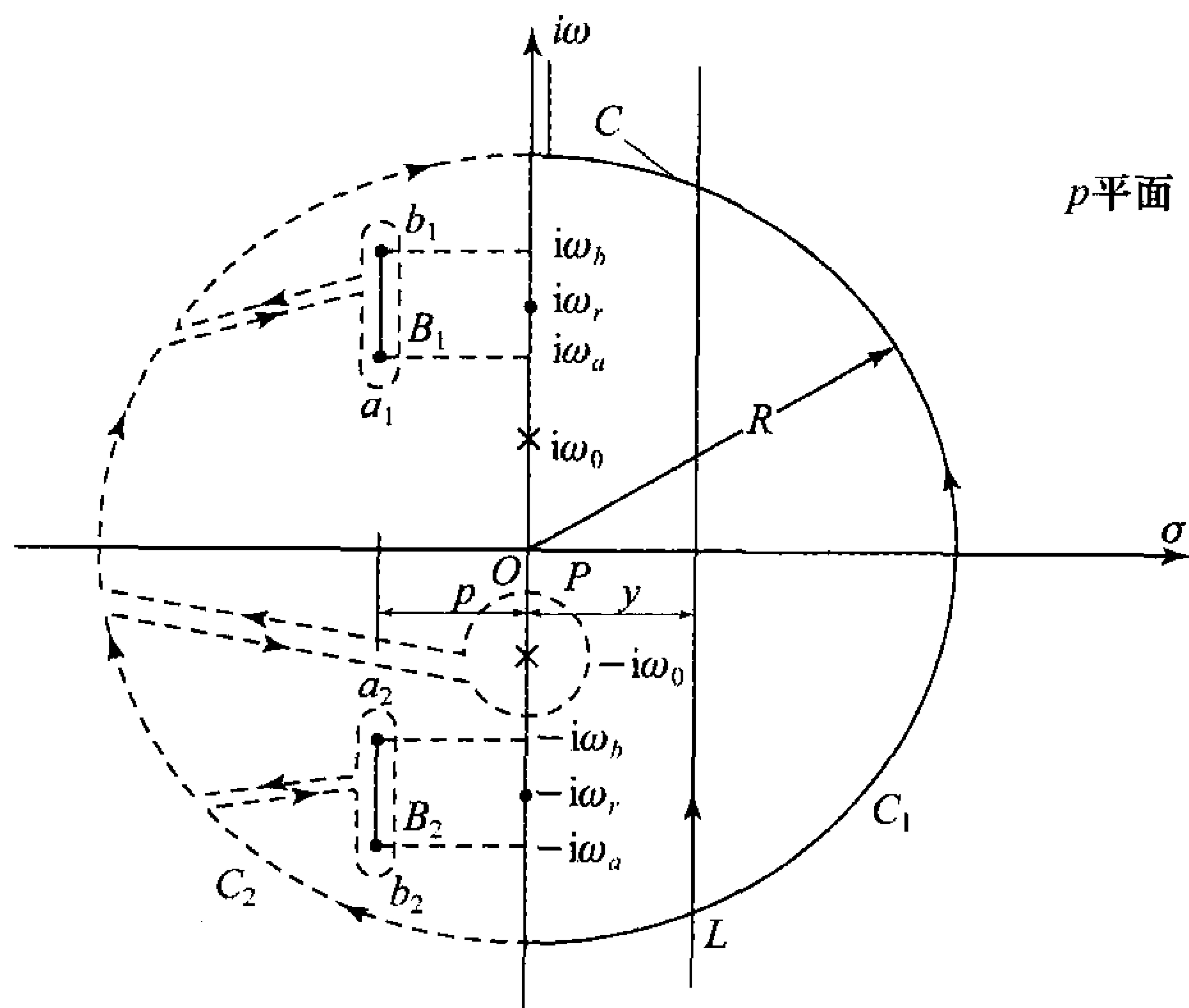


图 3-1　$H(p)$的奇点分布和积分路径的选择

(2) $t>\frac{z}{c}$，即 $\tau>0$.

现在先考察当 $R\to\infty$ 时在 p 平面左侧半圆 C_2 上 $H(p)$ 的表现. 这时 $\operatorname{Re}(p)<0$，但 $\tau>0$，故仍有 $\operatorname{Re}(p\tau)<0$，所以在 C_2 上仍有 $|H(p)|\to 0$，于是

$$\int_{C_2} H(p)\mathrm{d}p = 0, \quad t > \frac{z}{c}.$$

现在令 C_1 为右半平面的整个半圆，而且这时式(3.3.19)仍然成立，则可得

$$g(z,t) = \left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right) H(p)\mathrm{d}p = \oint_C H(p)\mathrm{d}p \tag{3.3.22}$$

其中 $C=C_1+C_2$.

现在的 C 中包含所有支点和极点，如果补充图 3-1 上所标出的绕过各支点和极点的路径，且考虑支点和极点的贡献，则由于新的闭合路径内不包含任何奇点，则根据柯西定理，有

$$\left(\int_{C_1} - \int_{C_2} - \oint_P - \oint_{B_1+B_2}\right) H(p)\mathrm{d}p = 0. \tag{3.3.23}$$

这里没有包括由 C_2 到 P，B_1 和 B_2 的路径是因为在来去的两次积分中相互抵消.

考虑到式(3.3.22),可知

$$g(z,t)=\oint_{P}H(p)\mathrm{d}p+\oint_{B_1+B_2}H(p)\mathrm{d}p,\tag{3.3.24}$$

令

$$g_1(z,t)=\oint_{P}H(p)\mathrm{d}p,\quad g_2(z,t)=\oint_{B_1+B_2}H(p)\mathrm{d}p,$$

分别对应实际信号中的两个分量.

$g_1(z,t)$是围绕一阶极点的积分,利用留数定理很容易求出,即

$$\begin{aligned}g_1(z,t)&=\oint_{P}H(p)\mathrm{d}p=2\pi\mathrm{i}[H(p)(p+\mathrm{i}\omega_0)]_{p=-\mathrm{i}\omega_0}\\&=2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}}{2\pi\mathrm{i}(p+\mathrm{i}\omega_0)}(p+\mathrm{i}\omega_0)\right\}_{p=-\mathrm{i}\omega_0}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0[t-\frac{z}{c}n(-\mathrm{i}\omega_0)]}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega_0t-k(-\mathrm{i}\omega_0)z]}.\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

由式(3.3.13)可知,$k(-\mathrm{i}\omega_0)$为复数,设$k(-\mathrm{i}\omega)=\beta+\mathrm{i}\alpha$,则有

$$g_1(z,t)=\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0t-\beta z)}.\tag{3.3.26}$$

恢复到实信号则是

$$f_1(z,t)=\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega_0t-\beta z).\tag{3.3.27}$$

与入射波$f(0,t)$相比,这一信号的频率相同,只是振幅从1衰减为$\mathrm{e}^{-\alpha z}$,相位移动了βz.这是一个稳态波,因此$g_2(z,t)$必为$f(z,t)$的瞬态部分,它应随时间逐渐衰弱,最后完全消失,对它的分析将在下面进行.

(3) $t=\dfrac{z}{c}$,即$\tau=0$.

为了分析方便,现在改为直接从实信号式(3.3.1)出发,由于

$$\int_0^{\infty}\sin w_0t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2},\tag{3.3.28}$$

则有

$$f(z,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{\omega_0}{p^2+\omega^2}\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}\mathrm{d}p.\tag{3.3.29}$$

和以前一样,可把上式的积分路径改为C_1.在C_1上,$p\to\infty$,$n(\infty)=1$,故有

$$f(z,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_1}\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\mathrm{e}^{p(t-\frac{z}{c})}\mathrm{d}p=\int_{C_1}S(p)\mathrm{d}p,\tag{3.3.30}$$

其中

$$S(p)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}\mathrm{e}^{p(t-\frac{z}{c})}.\tag{3.3.31}$$

显然,当$t=\dfrac{z}{c}$时,$\mathrm{e}^{p(t-\frac{z}{c})}\to1$,因此在$C_1$上$S(p)$以$1/p^2$的速度趋于零,从

而使得

$$f(z,t)=\int_{C_1}S(p)\mathrm{d}p=0,\quad t=\frac{z}{c}.\tag{3.3.32}$$

同样的道理,当 $t=\frac{z}{c}$ 时,在 C_2 上也有

$$f(z,t)=\int_{C_2}S(p)\mathrm{d}p=0,\quad t=\frac{z}{c}.\tag{3.3.33}$$

把上面两式合起来,可表示成

$$\int_C S(p)\mathrm{d}p=f(z,t)=0,\quad t=\frac{z}{c}.\tag{3.3.34}$$

对如图 3-1,分割后的 p 平面仍有

$$\left(\oint_C-\oint_P-\oint_{B_1+B_2}\right)S(p)\mathrm{d}p=0,\tag{3.3.35}$$

亦即

$$\oint_C S(p)\mathrm{d}p=\oint_P S(p)\mathrm{d}p+\oint_{B_1+B_2}S(p)\mathrm{d}p.\tag{3.3.36}$$

式中右侧第一项为稳态部分 $f_1(z,t)$,第二项则为瞬态部分 $f_2(z,t)$,所以有

$$f(z,t)=f_1(z,t)+f_2(z,t)=0,\quad t=\frac{z}{c}.\tag{3.3.37}$$

这一结果说明,如果波头以光速传播,则 $t=z/c$ 正是波头到达 z 处的时刻,而这时稳态部分与瞬态部分刚好相互抵消,使总的信号保持初始的零值.或者说,在任何位置,信号总是从零开始逐渐建立起来.

3.3.3 预现波的粗略分析

现在分析,在媒质无吸收($\rho=0$)的条件下,当 τ 略大于零的一段时间媒质中电磁波的建立过程.这里只作粗略分析,更详细的讨论将在下一节进行.

由于 $\tau>0$,故式(3.3.22)仍成立.当采用实信号表示时,就有如下的结果

$$f(z,t)=\frac{\omega_0}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}}{p^2+\omega_0^2}\mathrm{d}p.\tag{3.3.38}$$

为了方便进行简化处理,把上式中的指数改为另一种形式,即

$$\begin{aligned}p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]&=p\left[\left(\tau+\frac{z}{c}\right)-\frac{z}{c}n(p)\right]\\&=p\left\{\tau-\frac{z}{c}[n(p)-1]\right\}\\&=p\left[\tau-\frac{z}{c}N(p)\right],\end{aligned}\tag{3.3.39}$$

其中

$$N(p)=n(p)-1.$$

由于已设 $\rho=0$,故有

$$N(p)=\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}}-1. \tag{3.3.40}$$

在圆周 C 上 $p\to\infty$,故可对上式中根式作级数展开

$$N(p)=\left[1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}\right)^2+\cdots\right]-1.$$

若只取一阶近似,且 ω_r^2 与 p^2 相比可以忽略,则有

$$N(p)\approx\frac{a^2}{2p^2}. \tag{3.3.41}$$

把这一结果代回式(3.3.39),则有

$$p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]=p\tau-\frac{pz}{c}N(p)=p\tau-\frac{a^2z}{2cp}=p\tau-\frac{\xi}{p}, \tag{3.3.42}$$

其中 $\xi=\frac{a^2z}{2c}$. 再把上式代入式(3.3.38),并用 p^2 代替 $p^2+\omega_0^2$,则有近似的形式

$$f(z,t)=\frac{\omega_0}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{p\tau-\frac{\xi}{p}}}{p^2}\mathrm{d}p. \tag{3.3.43}$$

把上式中的指数作进一步的变换,即

$$p\tau-\frac{\xi}{p}=\sqrt{\tau\xi}\left(p\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}-\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\right). \tag{3.3.44}$$

令

$$p\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{3.3.45}$$

则有

$$p\tau-\frac{\xi}{p}=\sqrt{\tau\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=2\mathrm{i}\sqrt{\tau\xi}\sin\theta, \tag{3.3.46}$$

由式(3.3.45)可得

$$\mathrm{d}p=\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{3.3.47}$$

把以上结果代入式(3.3.43),便可得到

$$f(z,t)=\frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\sqrt{\tau\xi}\sin\theta-\theta)}\mathrm{d}\theta. \tag{3.3.48}$$

由式(3.3.45)可知

$$|p|=\sqrt{\frac{\xi}{\tau}},$$

在积分路径 C 上，$|p|\to\infty$，故式(3.3.45)的假定要求 $\tau\to 0$，也就是说，式(3.3.48)只在 τ 为很小的正值情况下才适用.

利用恒等式

$$\mathrm{J}_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\theta-\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \tag{3.3.49}$$

其中 $\mathrm{J}_1(x)$ 为一阶贝塞尔函数，可把式(3.3.48)表示为

$$\begin{aligned} f(z,t)&=\omega_0\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\mathrm{J}_1(2\sqrt{\tau\xi}) \\ &=\frac{\omega_0}{a}\sqrt{\frac{2c\tau}{z}}\mathrm{J}_1\left(a\sqrt{\frac{2\tau z}{c}}\right). \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

由这一结果及前面的结论可知，在 $t=z/c$ 以前，在 z 处没有任何动静，保持初始的零状态. 只要 $\tau>0$，z 处就有电磁波出现. 在 τ 很小时，开始出现的电磁波可由式(3.3.50)近似地表示. 如果把最先出现的电磁波叫做波头，则显然波头是以真空中的光速在媒质中传播.

由式(3.3.50)可知，开始出现在 z 处的电磁波的幅度很小. 又由贝塞尔函数的性质可知，z 处的电磁场随时间作周期变化的振荡，在起始段其周期远小于稳态周期 $2\pi/\omega_0$. 由于$\sqrt{\tau}$出现在 J_1 的前面和宗量里面，所以振幅和周期都随着 τ(亦即时间 t)的增加而增大. 于是式(3.3.50)所代表的是在稳态建立之前的初始过渡状态，文献中称之为预现波(Forerunners 或 Precursors).

以上结果是在粗略近似的条件下求出的，只能给出一些基本特性的描述. 更精确一些的分析将在下一节中进行.

§3.4 色散媒质中瞬变电磁场传播的布里渊理论[10]

虽然索末菲理论给出了色散媒质中瞬变电磁场传播的一些关键性结论，但要详细地了解电磁场在色散媒质中建立的瞬变过程，必须完整地求出有关积分. 布里渊利用最速下降法讨论有关积分的求解问题，非常巧妙又比较详尽地论证了电磁信号在色散媒质中传播的全过程. 要全面介绍布里渊解决问题的详细过程，需要很长的篇幅，这里只能给出基本思路和主要结论，有兴趣的读者可参考有关文献.

3.4.1 最速下降法

由前面的讨论已知，在索末菲所讨论的问题中，为了解信号在色散媒质中传

播的具体过程,就要解决下式的积分问题

$$g(z,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}}{p+\mathrm{i}\omega_0}\mathrm{d}p. \tag{3.4.1}$$

为了方便讨论最速下降法,作如下的表示

$$p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]=\frac{z}{c}p\left[\frac{ct}{z}-n(p)\right]$$

$$=\frac{z}{c}p[Q-n(p)]=\lambda q(p),$$

其中 $Q=\frac{ct}{z}$,$\lambda=\frac{z}{c}$,$q(p)=p[Q-n(p)]$. 令

$$f(p)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega_0},$$

则式(3.4.1)变为

$$g(z,t)=\int_C f(p)\mathrm{e}^{\lambda q(p)}\mathrm{d}p, \tag{3.4.2}$$

其中 C 表示式(3.4.1)中的积分路径.

若 $p=p_s$,使 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=0$,则可作变换

$$-s^2=q(p)-q(p_s), \tag{3.4.3}$$

把 p 平面映射到 s 平面. 在这一映射下,$p=p_s$ 点映射为 $s=0$ 点,把 p 平面上的路径 C 映射到 s 平面的 C',且有

$$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}=\mathrm{e}^{-\lambda s^2+\lambda q(p_s)}. \tag{3.4.4}$$

设 $q(p)=U(p)+\mathrm{i}V(p)$,则

$$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}=\mathrm{e}^{-\lambda s^2+\lambda U(p_s)+\mathrm{i}\lambda V(p_s)}, \tag{3.4.5}$$

由于 λ 为正数,则由上式可以看出,在 s 平面的实轴上当 $s=0$ 时,$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 取最大值. 如果 s 平面上的实轴对应 p 平面上的路径 P,则同理知,在路径 P 上 $p=p_s$ 时 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 取最大值. 进而可以看出,在 s 平面的实轴上偏离 $s=0$ 时,$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的值呈指数型迅速下降;相反,在 s 平面的虚轴上则呈指数上升. 所以,$s=0$ 以及相对应的 p_s 称为 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的鞍点. 从另一角度看,在 s 平面的实轴上,$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的相位由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda V(p_s)}$ 决定,它与 s 无关,所以实轴又是 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的等相位线. 由对应关系可知,路径 P 是 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的最速下降路线,也是其等相线.

变换后的积分为

$$g(z,t)=\mathrm{e}^{\lambda q(p_s)}\int_{C'}\mathrm{e}^{-\lambda s^2}F(s)\mathrm{d}s, \tag{3.4.6}$$

其中

$$F(s)=f(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}.$$

由于在 $|s|\to\infty$ 时，被积函数趋于零，故可根据约当定理补充无穷远处的积分，把 C' 与实轴构成闭合回路，可把在 C' 上的积分换作沿实轴进行. 当然，如果闭合回路中包含有被积函数的奇点，还要考虑它们的贡献. 在 s 平面上把 C' 变换到实轴的同时，在 p 平面上也就把在 C 上的积分换到了在最速下降路线 P 上的积分. 由于沿最速下降路径的积分主要贡献是鞍点附近，故可只在鞍点附近进行积分，并以此作为原积分的近似结果.

3.4.2 鞍点的位置

由上面的讨论已知，在鞍点附近沿最速下降路径的积分可以近似地表征积分(3.4.1)，因此找出被积函数的鞍点是用最速下降法讨论积分(3.4.1)的关键. 下面分两种情况进行讨论.

(1) 原点附近的鞍点

在 p 平面的原点附近满足条件 $p\to 0$，这样可以把 $n(p)$ 展开为 p 的幂级数. 为此，先把 $n(p)$ 表示为

$$n(p)=\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2+2\rho p+\omega_r^2}}=\sqrt{\frac{\omega_c^2+\alpha}{\omega_r^2+\alpha}},\tag{3.4.7}$$

其中

$$\omega_c^2=\omega_r^2+a^2,$$

$$\alpha=p^2+2\rho p.$$

当 $p\to 0$ 时总有 $\alpha\ll\omega_r^2,\omega_c^2$，故可作如下近似

$$\begin{aligned}\frac{\omega_c^2+\alpha}{\omega_r^2+\alpha}&=\frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1+\frac{\alpha}{\omega_c^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{\omega_r^2}\right)^{-1}\\&=\frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1+\frac{\alpha}{\omega_c^2}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\omega_r^2}+\cdots\right)\\&\approx\frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left[1-\frac{\alpha(\omega_c^2-\omega_r^2)}{\omega_c^2\omega_r^2}\right]\\&=\frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1-\frac{\alpha a^2}{\omega_c^2\omega_r^2}\right).\end{aligned}\tag{3.4.8}$$

把这一结果代回到式(3.4.7)中，再作进一步近似，又可得

$$\begin{aligned}n(p)&\approx\frac{\omega_c}{\omega_r}\left(1-\frac{\alpha a^2}{2\omega_c^2\omega_r^2}\right)\\&=\frac{\omega_c}{\omega_r}\left[1-\frac{1}{2}(p^2+2\rho p)\frac{a^2}{\omega_c^2\omega_r^2}\right],\end{aligned}\tag{3.4.9}$$

令

$$A = \frac{a^2}{2\omega_c\omega_r^3},$$

则有

$$n(p) \approx \frac{\omega_c}{\omega_r} - Ap(p+2\rho). \tag{3.4.10}$$

用这一近似式可把 $q(p)$ 近似表示成

$$\begin{aligned} q(p) &= p[Q - n(p)] \\ &\approx p\left[\left(Q - \frac{\omega_c}{\omega_r}\right) + Ap(p+2\rho)\right] \\ &= p[\eta + Ap(p+2\rho)], \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

其中

$$\eta = Q - \frac{\omega_c}{\omega_r} = \frac{ct}{z} - \frac{\omega_c}{\omega_r}. \tag{3.4.12}$$

按定义，鞍点满足 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p=0$，也就是满足

$$\eta + Ap(p+2\rho) + p(2Ap + 2A\rho) = 0$$

即

$$\eta + Ap(3p+4\rho) = 0. \tag{3.4.13}$$

所以，鞍点就是该方程的根，即

$$p_{s1} = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}}, \tag{3.4.14}$$

$$p_{s2} = -\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}}. \tag{3.4.15}$$

下面分三种情况讨论这些鞍点所处的具体位置.

a. 情况 1：$\eta < \frac{4}{3}A\rho^2$.

在这种情况下，p_{s1} 和 p_{s2} 均为实数，故它们位于实轴上，且对称于点$\left(-\frac{2}{3}\rho, 0\right)$.

除了知道鞍点的位置外，还要知道在鞍点附近最速下降路径的走向，为此需要知道 $\mathrm{d}^2q(p)/\mathrm{d}p^2$ 在鞍点处的辐角，由式(3.4.13)可求得

$$q''(p_{s1,s2}) = \left.\frac{\mathrm{d}^2q(p)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p=p_{s1,s2}} = \pm 2A\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}} = h\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{3.4.16}$$

由此可知，对 p_{s1} 而言，$\theta=0$，而对 p_{s2} 而言，$\theta=\pi$. 若令 $p-p_s=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，其中 p 为靠近鞍点时最速下降路径上的点. 可以证明

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}. \tag{3.4.17}$$

于是，在 p_{s1} 处 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$，在 p_{s2} 处 $\varphi=0,-\pi$.

b. 情况 2：$\eta>\frac{4}{3}A\rho^2$.

由式(3.4.14)和式(3.4.15)可知，在这种情况下有

$$p_{s1}=-\frac{2}{3}\rho+\mathrm{i}\,\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A}-4\rho^2}=-\frac{2}{3}\rho+\mathrm{i}\omega_s, \tag{3.4.18}$$

$$p_{s2}=-\frac{2}{3}\rho-\mathrm{i}\,\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A}-4\rho^2}=-\frac{2}{3}\rho-\mathrm{i}\omega_s, \tag{3.4.19}$$

其中

$$\omega_s=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A}-4\rho^2}. \tag{3.4.20}$$

可见，这时的两个鞍点位于直线 $\sigma=-\frac{2}{3}\rho$ 上，且对称于实轴.

依照上面的定义，可求得在鞍点处最速下降路径的走向为：在 p_{s1} 附近 $\varphi=\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$；在 p_{s2} 附近 $\varphi=\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$.

c. 情况 3：$\eta=\frac{4}{3}A\rho^2$.

显然，在这种情况下，两个鞍点重合在一起，且为实数，即

$$p_s=-\frac{2}{3}\rho. \tag{3.4.21}$$

由于在此点 $\mathrm{d}^2q(p)/\mathrm{d}p^2=0$，故它是二阶鞍点. 在该点最速下降路径的走向为 $\varphi=\pm\frac{\pi}{3},\pi$.

因为 $\eta=\frac{ct}{z}-\frac{\omega_c}{\omega_r}$，所以鞍点的位置与 z 和 t 有关. 如果固定 z，则 η 随 t 的增加而增大. 这样一来，鞍点在 p 平面上的位置就随 t 而改变.

由上面讨论的三种情况 t 的变化顺序可知，两个鞍点最初是在实轴上，随着时间的增加它们逐渐相互靠近. 当处于第三种情况，即

$$t=\frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2+\frac{\omega_c}{\omega_r}\right) \tag{3.4.22}$$

时，它们汇合为一个二阶鞍点，然后转为沿着与虚轴平行的相反方向互相分离.

(2) 远离原点的鞍点

在这样的情况下，p 的值很大，故可认为在式(3.4.7)的第一等式中 ω_r^2 与 p^2 相比可以忽略，而且 $a^2\ll|p|^2$，从而可得 $n(p)$ 的近似表示

$$n^2(p)\approx 1+\frac{a^2}{p^2+2\rho p},$$

$$n(p)\approx 1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2+2\rho p}. \tag{3.4.23}$$

于是

$$q(p)\approx p\left(Q-1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2+2\rho p}\right).$$

令

$$\delta=Q-1=\frac{c}{z}\left(t-\frac{z}{c}\right)=\frac{c\tau}{z}, \tag{3.4.24}$$

其中 $\tau=t-\frac{z}{c}$，则有

$$q(p)=p\delta-\frac{1}{2}\frac{a^2}{p+2\rho}. \tag{3.4.25}$$

由此可以求得两个鞍点分别为

$$p_{s1}=-2\rho+\mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{2\delta}}=-2\rho+\mathrm{i}\omega_s, \tag{3.4.26}$$

$$p_{s2}=-2\rho-\mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{2\delta}}=-2\rho-\mathrm{i}\omega_s, \tag{3.4.27}$$

其中 $\omega_s=\frac{a}{\sqrt{2\delta}}$.

这两个鞍点位于直线 $\sigma=-2\rho$ 上，并对称于实轴. 通过它们的最速下降路径的走向，对 p_{s1} 为 $\varphi=\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$；对 p_{s2} 为 $\varphi=\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

由式(3.4.26)和(3.4.27)可以看出，当 $\delta=0\left(t=\frac{z}{c}\right)$时，两个鞍点分别位于直线 $\sigma=-2\rho$ 两端方向的无穷远处. 随着 δ(或 t)的增加，它们开始沿 $\delta=-2\rho$ 直线向实轴方向运动. 但当 δ 足够大时，上述近似表示的条件不再成立，鞍点将逐渐偏离直线. 可以证明，它们将逐渐趋向邻近的支线.

由上面的分析可知，鞍点在 p 平面上的位置是随着时间变动的. 上面仅给出了靠近原点及远离原点时鞍点的位置及它们随时间变动的大致方向，同时也指明了最速下降路径通过鞍点时的走向. 求解积分的近似解，并不一定需要严格地了解最速下降路径的具体全程走向，但却需要判断在积分路径的变换过程中是否需要考虑奇点的贡献. 鞍点随着时间的变化而变动所处位置，最速下降路径也随之而变. 仔细分析这种变动过程是件很繁琐的工作，这里不再详细论述.

如前所述，对积分的主要贡献是在鞍点附近的最速下降路段，下面就根据这一原理讨论式(3.4.1)的近似积分问题.

3.4.3 第一预现波

在上一节已经粗略地讨论了预现波的一些基本特性，现在利用最速下降法

对这一问题进行更细致的讨论.在距接入波的媒质面距离 z 处,在时间 $t=z/c$ 的一刻才开始有波头到达,也就是预现波开始出现.由上面讨论已知,在 $\tau=t-z/c$ 略大于零时两个鞍点远离原点,分别由式(3.4.26)和(3.4.27)表示.在这一时段式(3.4.1)的积分可近似地在这两个鞍点所在一段的最速下降路径上求得.

由式(3.4.25)可知,用 ω_s 代替 δ,可表示为

$$q(p)=\frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\omega_s^2}-\frac{1}{p+2\rho}\right), \tag{3.4.28}$$

当 $p=p_s$ 时,可得

$$\begin{aligned} q(p_s)&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{-2\rho\pm\mathrm{i}\omega_s}{\omega_s^2}\pm\mathrm{i}\,\frac{1}{\omega_s}\right)\\ &=a^2\left(-\frac{\rho}{\omega_s^2}\pm\mathrm{i}\,\frac{1}{\omega_s}\right)\\ &=U_s\pm\mathrm{i}V_s \end{aligned} \tag{3.4.29}$$

其中 $U_s=-a^2\dfrac{\rho}{\omega_s^2}$,$V_s=\dfrac{a^2}{\omega_s}$.在上式中,$q(p_{s1})$对应"+"号,$q(p_{s2})$对应"−"号.

现在先求式(3.4.1)在 p_{s1} 附近的贡献,并用 $g_1(z,t)$表示.在 p_{s1} 对 $q(p)$展开为幂级数,可近似为

$$\begin{aligned} q(p)&=q(p_{s1})+\frac{1}{2}q''(p_{s1})(p-p_{s1})^2\\ &=q(p_{s1})+\frac{1}{2}h\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}. \end{aligned} \tag{3.4.30}$$

由式(3.4.28)计算可知

$$q''(p_{s1})=-\mathrm{i}\,\frac{a^2}{\omega_s^3},$$

故有 $h=a^2/\omega_s^3$,$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$.由此 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}$,因此

$$q(p)=U_s+\mathrm{i}V_s-\frac{1}{2}\,\frac{a^2}{\omega_s^3}r^2. \tag{3.4.31}$$

若在 p_{s1} 沿最速下降路径的两边各取很小一段 r_0 作为积分区间,则近似地有[10]

$$g_1(z,t)=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{(z/c)(U_s+\mathrm{i}V_s)}}{-2\rho+\mathrm{i}(\omega_s+\omega_0)}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^{r_0}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2c}(a^2/\omega_s^3)r^2}\,\mathrm{d}r, \tag{3.4.32}$$

r_0 的选择要使上式中的被积函数趋近零,为此要求 r_0 远小于 ω_s. ω_s 大于 ω_r,但又不能大得太多;否则 δ 非常接近零,而使 $\omega_s\to\infty$.

在上述条件下,上式积分的上限由于被积函数趋于零而可延伸至∞,从而可利用关系

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{2c}hr^2}\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{\pi c}{2zh}},\tag{3.4.33}$$

而得到

$$g_1(z,t)=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{c\omega_s^3}{2\pi}}\frac{e^{(z/c)(U_s+iV_s)}}{-2\rho+i(\omega_s+\omega_0)}e^{-i\frac{\pi}{4}}.\tag{3.4.34}$$

用同样的方法可求得 p_{s2}处的贡献 $g_2(z,t)$为

$$g_2(z,t)=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{c\omega_s^3}{2\pi}}\frac{e^{(z/c)(U_s+iV_s)}}{-2\rho-i(\omega_s-\omega_0)}e^{i\frac{\pi}{4}}.\tag{3.4.35}$$

总和起来有 $g(z,t)=g_1(z,t)+g_2(z,t)$，考虑到 $\rho\ll\omega_0$，变换为实函数，即可得

$$f(z,t)=\frac{\omega_0}{a}\sqrt{\frac{2c}{\pi\omega_s z}}e^{-(za^2\rho)/(c\omega_s^2)}\sin\left(\frac{z}{c}\frac{a^2}{\omega_s}-\frac{\pi}{4}\right).\tag{3.4.36}$$

又因

$$\omega_s=\frac{a}{\sqrt{2\delta}}=a\sqrt{\frac{z}{2c\tau}},$$

上式又可写成

$$f(z,t)=\frac{\omega_0}{\sqrt{\pi a^3}}\left(\frac{2c}{z}\right)^{\frac{3}{4}}\tau^{\frac{1}{4}}e^{-2\rho\tau}\sin\left(a\sqrt{\frac{2z\tau}{c}}-\frac{\pi}{4}\right).\tag{3.4.37}$$

该式所代表的波动从 $\tau=t-\frac{z}{c}$开始，因为在 $\tau<0$ 时正弦项的宗量为虚数，$f(z,t)$不存在. 这一结果再次表明，式(3.4.37)所代表的波动以真空中的光速传播. 开始时它的频率很高，但随后稳定地降低. 其振幅在开始时为零，而后增大，再按 $\tau^{\frac{1}{4}}e^{-2\rho\tau}$随 τ 的增加而减小. 通过估算不难发现，第一预现波的振幅是很小的.

需要指出的是，在 $\rho=0$ 的条件下，当 τ 足够大时，可将式(3.3.50)中的贝塞尔函数用渐近式替代，其结果与式(3.4.37)在 $\rho=0$ 时一样. 这也从另一角度说明，式(3.4.37)成立的条件是 τ 不能太小，这也正是导出它的过程中预设的前提.

3.4.4 第二预现波

第二预现波是在 τ 不很小时出现的，所以它与原点附近的鞍点有关. 由上面的分析已知，在 $\eta=\frac{ct}{z}-\frac{\omega_c}{\omega_r}<\frac{4}{3}A\rho^2$，即 $t<\frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2+\frac{\omega_c}{\omega_r}\right)$时，有两个鞍点位于实轴上. 通过对最速下降路径的分析表明，这时它只通过右边的鞍点 p_{s1}，它的位置由式(3.4.14)表示，令

$$\sigma_s = p_{s1} = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}}. \tag{3.4.38}$$

按照分析第一预现波类似的步骤，可得

$$q(p) = q(p_{s1}) - \frac{1}{2}hr^2, \tag{3.4.39}$$

其中 $h=A(6\sigma_s+4\rho)$，$q(p_{s1})=q(\sigma_s)=U_s$. 和以前一样，只取 p_{s1} 两侧很小的一段积分路径 r_0，即可得

$$g(z,t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sigma_s + \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\int_0^{r_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z/c)hr^2}\,\mathrm{d}r. \tag{3.4.40}$$

同样的理由，当被积函数足够小时，积分限可延至∞，于是可应用式(3.4.33)而得到

$$\begin{aligned} g(z,t) &= \frac{1}{\sigma_s + \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}} \\ &= \frac{\sigma_s - \mathrm{i}\omega_0}{\sigma_s^2 + \omega_0^2}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}}, \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

从而又可进一步得到

$$\begin{aligned} f(z,t) &= \frac{\omega_0}{\sigma_s^2 + \omega_0^2}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}} \\ &= \frac{\omega_0}{2(\sigma_s^2 + \omega_0^2)}\sqrt{\frac{2c}{\pi zh}}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}. \end{aligned} \tag{3.4.42}$$

通过数量级的分析可知，在起始时 f 接近于零，然后增大，而在 $\eta=0$，即

$$t = \frac{z}{c}\frac{\omega_c}{\omega_r} \tag{3.4.43}$$

时，达到

$$f(z,t)\big|_{\eta=0} = \frac{1}{2\omega_0}\sqrt{\frac{c}{2\pi\rho z A}}. \tag{3.4.44}$$

这表明，这时的 $f(z,t)$ 是个非振荡函数，且其值一直很小，保持在 $f(\eta=0)$ 的量级.

当 $\eta > \frac{4}{3}A\rho^2$，即 $t > \frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2 + \frac{\omega_c}{\omega_r}\right)$ 时，有两个由式(3.4.18)和(3.4.19)表示的鞍点，它们都被最速下降路径穿过，因此它们所在路径段上的积分都要计算. 设这两处的积分分别记做 $g_1(z,t)$ 和 $g_2(z,t)$，计算结果为

$$g_1(z,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3\pi A\omega_s z}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{c}(U_s + \mathrm{i}V_s)}}{-\frac{2}{3}\rho + \mathrm{i}(\omega_s + \omega_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \tag{3.4.45}$$

$$g_2(z,t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3\pi A\omega_s z}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{c}(U_s - \mathrm{i}V_s)}}{-\frac{2}{3}\rho - \mathrm{i}(\omega_s - \omega_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \tag{3.4.46}$$

其中 $U_s=\frac{2}{3}\rho\left(-\eta+\frac{8}{9}A\rho^2\right),V_s=\omega_s\left[\eta-A\left(\frac{4}{3}\rho^2+\omega_s^2\right)\right]$. 由此进一步可以得到

$$f(z,t)=\frac{\omega_0\sqrt{\frac{c}{3\pi\omega_0 Az}}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}}{\left(\omega_0^2+\omega_s^2+\frac{4}{9}\rho^2\right)^2-4\omega_0^2\omega_s^2}\cdot\left[\frac{4}{3}\rho\omega_s\cos\left(\frac{z}{c}V_s+\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\omega_0^2-\omega_s^2+\frac{4}{9}\rho^2\right)\sin\left(\frac{z}{c}V_s+\frac{\pi}{4}\right)\right].\tag{3.4.47}$$

显然，这是一个振荡过程. 对该式进行详细分析后可知：直到接近 $t=(z\omega_c)/(c\omega_r)$ 之前还没有明显的响应；当 $t\approx(z\omega_c)/(c\omega_r)$ 时才有很小的响应；然后当 $t>(z\omega_c)/(c\omega_r)$ 时出现小幅振荡，其频率由零开始不断增高，当其频率接近 ω_0 时，其振幅迅速增大.

3.4.5 信号的速度

前面所考虑的鞍点处的积分起主要作用的前提是，所用的最速下降路径还不靠近被积函数的极点，因为一旦靠近或通过，则极点的贡献将起支配作用. 事实上，随着时间的推移，最速下降路径也在不断移动，它会在某个时候接近并扫过极点，这时围绕极点的积分是必须计算的，而且它就代表了主体信号的传播.

因为在极点处积分是不存在的，一定要让积分路径在极点处变形，我们用以极点为圆心、无限小的半径的圆弧来代替，而且随积分路径扫过极点的过程，圆弧逐渐增加，最后变成一个圆. 由于圆弧无限靠近，故可认为被积函数中的指数项在整个圆弧上为常数，并用极点处的值代替，于是在式(3.4.1)中

$$p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]=-\mathrm{i}\omega_0 t+\frac{z}{c}\mathrm{i}\omega_0 n(-\mathrm{i}\omega_0)$$
$$=-\mathrm{i}[\omega_0 t-k(-\mathrm{i}\omega_0)z],\tag{3.4.48}$$

令 $k(-\mathrm{i}\omega_0)=\beta(\omega_0)+\mathrm{i}\alpha(\omega_0)$，$p+\mathrm{i}\omega_0=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，则

$$\mathrm{d}p=\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi.\tag{3.4.49}$$

于是积分(3.4.1)可近似表示为

$$g(z,t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t-\beta z)}\mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^{\psi_0}\mathrm{d}\psi,\tag{3.4.50}$$

其中 ψ_0 为积分圆弧所对应的角度. 由此便得到

$$g(z,t)=\frac{\psi_0}{2\pi}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_0 t-\beta z)},\tag{3.4.51}$$

进而

$$f(z,t)=\frac{\psi_0}{2\pi}\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega_0 t-\beta z).\tag{3.4.52}$$

显然，当最速下降路径离极点比较远时，还不需要考虑极点的影响，这时 $\psi_0=0$，而当路径正好穿过极点时 $\psi_0=\pi$，则 $\psi_0/2\pi=1/2$；而当路径完全扫过了极点时 $\psi_0=2\pi$，这时 $\psi_0/2\pi=1$. 所以，最终 $f(z,t)$ 成为幅度为 $e^{-\alpha z}$、频率为 ω_0 的稳定波动. 它在路径扫过极点时有个振幅快速的建立过程，当路径正好穿过极点时其幅度达到稳定时的一半. 由于预现波与这时的 $f(z,t)$ 相比幅度非常小，故稳定前由式(3.4.52)表示的 $f(z,t)$ 代表了信号，而稳定以后它就不再携带信息了. 所以，可以认为 $\psi_0/2\pi=1/2$ 时代表信号到达 z 处的时刻，并由此讨论信号的速度. 按此人为的定义可知，信号到达 z 的时刻正是最速下降路径穿过极点的时刻.

由上面的分析已知，这时的鞍点是沿着与虚轴平行并非常靠近虚轴的直线移动. 由于鞍点与虚轴非常靠近，故最速下降路径与虚轴的交点和鞍点附近的一条速降线与虚轴的切点相近，故可近似地用此切点代替通过鞍点的最速下降路径与虚轴的交点. 如果这个交点就是极点，则上述切点的行为就是所要研究的.

把 $q(p)$ 再对应到频域，可得

$$q(-i\omega)=-i\omega Q+ick(-i\omega)=-i\omega\left(\frac{ct}{z}\right)+ic(\beta+i\alpha)$$

$$=-c\alpha+ic\left(\beta-\frac{\omega t}{z}\right)=U+iV, \tag{3.4.53}$$

其中

$$U=-c\alpha,$$

$$V=c\left(\beta-\frac{\omega t}{z}\right). \tag{3.4.54}$$

根据前面的讨论知道，速降线亦是等相线，它满足 $V=\text{const}$，它与虚轴的切点满足 $\partial V/\partial\omega=0$. 由式(3.4.54)可知

$$\frac{\partial V}{\partial\omega}=c\left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}-\frac{t}{z}\right)=0, \tag{3.4.55}$$

由于 $\partial\omega/\partial\beta=v_g$ 为切点所对应频率 ω 的群速，上式可写做

$$t-\frac{z}{v_g}=0. \tag{3.4.56}$$

如果 v_{g0} 为相应于 ω_0 的群速度，则可认为切点在 $t=z/v_{g0}$ 时与极点相遇，z 为信号到达的距离. 这表明，按上述人为的定义，信号以群速 v_g 传播. 需要注意的是，在以上的讨论中都满足 ω_0 远离 ω_r 的条件，否则就要考虑支点的影响. 这一条件说明，以上结论仅适用于正常色散的情况. 如果把以上关于信号速度的定义延用到反常色散区，则可证明它将不再与群速等同.

关于电磁波在色散媒质中传播的相速、群速以及信号速度与频率的关系，布里渊的分析结果由图 3-2 给出. 相速 v_p 只与稳定波动相关，它既可小于也可大

于真空中的光速 c. 群速 v_g 只在色散媒质中不同于相速，在正常色散时，群速小于相速；但在反常色散时，群速大于相速. 在吸收带附近，群速又可能成为无限大，甚至为负. 在正常色散区域，信号速度与群速一致；在反常色散区，信号速度则永远小于、最多等于真空中的光速. 详细解释可参考文献[10].

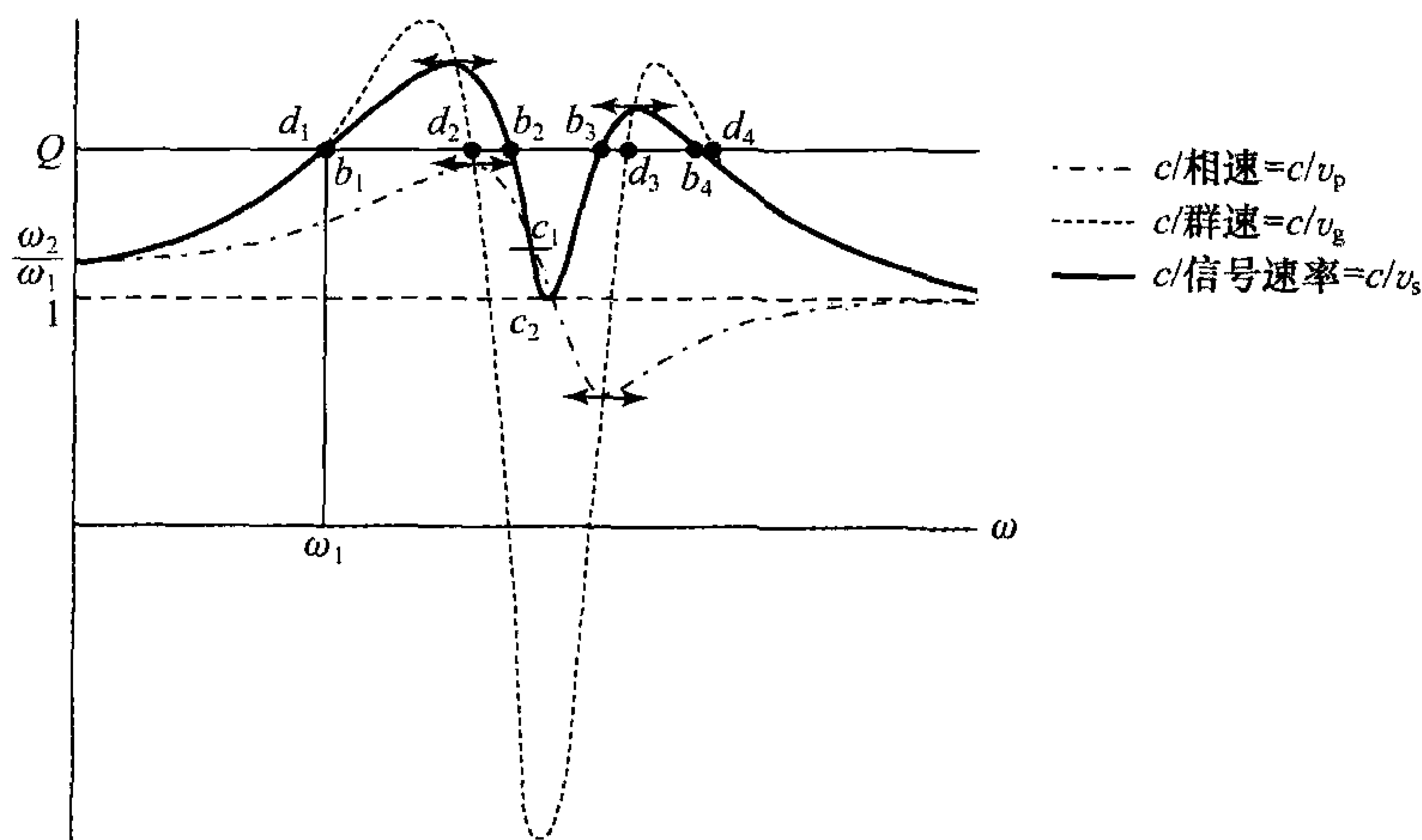


图 3-2　相速 v_p、群速 v_g 和信号速度 v_s 与频率的关系

现在我们再来总结一下信号在色散媒质中建立的过程. 在任一距离上，第一预现波以真空中的光速 c 最先到达，它的频率在开始时极高，然后逐渐降低，它的振幅开始时不断增加，然后又因阻尼作用而减小，直到其频率等于媒质中电子的特征频率为止. 第二预现波的幅度开始阶段也很小，直到 $t=(z\omega_c)/(c\omega_r)=(z/c)(\sqrt{\omega_r^2+a^2}/\omega_r)$ 时才达到一定的量级，故可以认为这是它到达的时刻. 它的频率开始时很低，然后升高，它的振幅也是开始时升高然后减小. 这两种预现波在时间上会有部分重叠. 响应的主体部分以信号速度到达，它的频率与接入信号相同，代表了信号的最终建立. 在以后的一段时间内，预现波仍然与之重叠，波形仍有一定畸变. 以上整个过程由图 3-3 形象地给予说明.

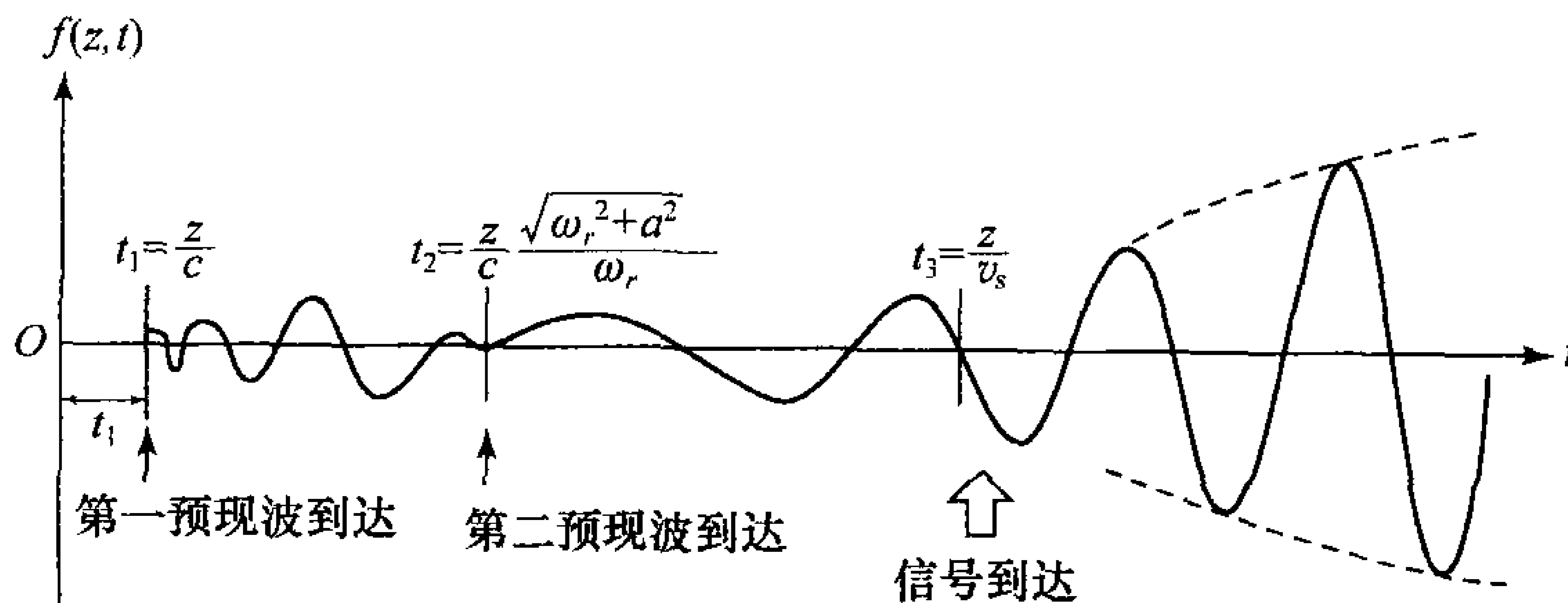


图 3-3　信号随时间变化示意图

由图可以看出，信号的建立从 t_1 开始，经历了一个复杂的过程，确定信号的到达时刻有一定的任意性. 定义 t_3 时刻为信号到达的时间，完全是人为的，它的合理性只在于它标志着信号已经有了足够的强度. 考虑信号达到一定强度作为信号到达的标志，与检测方法有关. 随着检测灵敏度的提高，可定义更早的时刻表示信号的到达. 这说明，信号速度的定义存在一定的任选范围. 如果检测灵敏度达到无限，就可记录到第一预现波的波头，它永远以真空中的光速传播.

第四章　传输和辐射系统的瞬变电磁场

当传输系统中传输窄带信号时，时谐（频域）电磁场理论能基本满足要求；但传输宽频带信号时，就需要进行时域分析，以便清楚地了解信号传输的复杂特性. 辐射系统正在向宽频带应用发展，频域理论已不能满足要求，时域分析可提供辐射过程更丰富的信息，为提高系统性能提供重要的理论依据. 分析方法仍然是以频域解为基础，经逆变换而得到时域解，由于逆变换的困难，能得到解析结果的只能是一些比较简单的情况.

§4.1　瞬变电磁场的传输

传输系统主要指传输线、微带线、同轴线和各种形状的波导. 在不考虑损耗时，同轴线等传输 TEM 波时是非色散的；但当损耗不能忽略时，就会出现色散现象. 各类空心波导本来就是色散系统，宽带信号的传输必然出现复杂的特性.

4.1.1　线性电磁系统及其传递函数

一个物理系统，当对它施以作用 $e(\boldsymbol{x})$ 时，会产生相应的响应 $y(\boldsymbol{x})$. 这种作用与响应之间的关系若用 L 来表示，则有

$$y(\boldsymbol{x}) = L[e(\boldsymbol{x})], \tag{4.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为描述作用和响应的变量空间矢量. 如果以下关系成立

$$\begin{aligned} y(\boldsymbol{x}) &= L[k_1 e_1(\boldsymbol{x}) + k_2 e_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + k_n e_n(\boldsymbol{x})] \\ &= k_1 L[e_1(\boldsymbol{x})] + k_2 L[e_2(\boldsymbol{x})] + \cdots + k_n L[e_n(\boldsymbol{x})], \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为任意常数，则称该物理系统为线性系统.

对于我们所研究的电磁系统而言，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 和 t 构成的变量空间. 由于麦克斯韦方程是线性的，如果描述系统的媒质参量与电磁场强度无关，则该系统就是一个线性电磁系统. 如果一个电磁系统的媒质参数及其几何结构都不随时间而变化，则称之为时不变系统. 如果不作特殊声明，我们将只研究时不变电磁线性系统.

如果一个时不变电磁线性系统在 $e(\boldsymbol{r},t)$ 的作用下产生响应 $y(\boldsymbol{r},t)$，且有

$$\hat{e}(\boldsymbol{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

$$\hat{y}(\boldsymbol{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t,$$

则定义

$$\hat{h}(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\hat{y}(\boldsymbol{r},\omega)}{\hat{e}(\boldsymbol{r},\omega)}\tag{4.1.3}$$

为系统的传递函数.若

$$h(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

则有

$$y(\boldsymbol{r},t)=\int_{0}^{\infty}h(\boldsymbol{r},t-\tau)e(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{4.1.4}$$

或

$$y(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\boldsymbol{r},\omega)\hat{e}(\boldsymbol{r},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{4.1.5}$$

如果对系统的作用 $e(\boldsymbol{r},t)$ 为 $\delta(t)$ 脉冲,由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=1,$$

则由此可知,$h(\boldsymbol{r},t)$ 为 δ 脉冲作用下系统的响应.

如果把频域 ω 扩展到复频域 $p=\sigma+\mathrm{i}\omega$,则以上类似的关系也可以在复频域 p 中求得.若

$$E(\boldsymbol{r},p)=\int_{0}^{\infty}e(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

$$Y(\boldsymbol{r},p)=\int_{0}^{\infty}y(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

则

$$H(\boldsymbol{r},p)=\frac{Y(\boldsymbol{r},p)}{E(\boldsymbol{r},p)}\tag{4.1.6}$$

为系统的复频域传递函数.根据拉氏变换的性质,可得以下结果

$$y(\boldsymbol{r},t)=\int_{0}^{\infty}h(\boldsymbol{r},t-\tau)e(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{4.1.7}$$

其中

$$h(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}H(\boldsymbol{r},p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p,$$

或者

$$y(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}H(\boldsymbol{r},p)E(\boldsymbol{r},p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p.\tag{4.1.8}$$

类似地,如果 $e(\boldsymbol{r},t)$ 为 $\delta(t)$ 式的脉冲,则系统的响应就是 $h(\boldsymbol{r},t)$.

作为一个线性传输系统,它的传递函数可以全面反映它的传输特性.从实际

需要出发,我们希望信号在传输过程中不发生畸变,至少是其畸变程度是可以接受的.那么在什么样的条件下一个系统才能保持无畸变传输呢?

如果一个传输系统的传递函数 $\hat{h}(\omega)$可以表示为(作为传输系统参量,它已经不再依赖 $\boldsymbol{r}$)

$$\hat{h}(\omega)=|\hat{h}(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}, \tag{4.1.9}$$

其中 ϕ 是传递函数的相位.则其输出的响应可表示成

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{h}(\omega)|\hat{e}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\omega t-\phi(\omega)]}\mathrm{d}\omega. \tag{4.1.10}$$

如果传递函数 $\hat{h}(\omega)$能满足以下两个条件

(1) 传递函数的模是与频率无关的常数,即

$$|\hat{h}(\omega)|=A,$$

(2) 传递函数的相位是 ω 的线性函数,即

$$\phi(\omega)=a\omega+b,$$

其中 A,a 和 b 均为实常数.则

$$\begin{aligned}y(t)&=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{e}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-a)}\mathrm{d}\omega\\&=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}e(t-a).\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

由此可知,在满足以上两个条件的情况下,输出信号与输入信号之间只有时间上的延迟和幅度的变化,而保持形状不变.所以,以上两个条件就称为传输系统信号传输无畸变的条件.

4.1.2 TEM 系统中脉冲信号的传输

无耗的 TEM 传输系统是无色散的,只要满足 TEM 的传输条件,任意形状的电磁信号在其中传输都是无畸变的.但是,如果系统是有耗的,即使 TEM 传输条件得到满足,依然会有信号畸变的发生.

一个 TEM 均匀传输系统中的电流 I 和电压 V,满足电极方程

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial z}V(z,t)&=RI(z,t)+L\frac{\partial}{\partial t}I(z,t),\\-\frac{\partial}{\partial z}I(z,t)&=GV(z,t)+C\frac{\partial}{\partial t}V(z,t),\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

在频域它们则转化为

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial z}\hat{V}(z,\omega)&=R\hat{I}(z,\omega)-\mathrm{i}\omega L\hat{I}(z,\omega)\\&=(R-\mathrm{i}\omega L)\hat{I}(z,\omega),\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\hat{I}(z,\omega)=G\hat{V}(z,\omega)-\mathrm{i}\omega C\hat{V}(z,\omega)$$

$$=(G-\mathrm{i}\omega C)\hat{V}(z,\omega). \tag{4.1.13}$$

它们的解具有以下形式

$$\hat{V}(z,\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\gamma(\omega)z}+B(\omega)\mathrm{e}^{-\gamma(\omega)z},$$

$$\hat{I}(z,\omega)=Y_0[A(\omega)\mathrm{e}^{\gamma(\omega)z}-B(\omega)\mathrm{e}^{-\gamma(\omega)z}], \tag{4.1.14}$$

其中

$$\gamma(\omega)=[(R-\mathrm{i}\omega L)(G-\mathrm{i}\omega C)]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1.15}$$

$$Y_0=\left(\frac{G-\mathrm{i}\omega C}{R-\mathrm{i}\omega L}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1.16}$$

式中的 L 和 C 取决于单位长度传输系统中储存的磁场和电场的能量，R 取决于单位长度传输系统导体的功率损耗，G 则由系统中介质的功率损耗决定.

如果我们将无限长传输系统的一段作为所研究的线性系统，其长度为 l，起点为 $z=0$，终端为 $z=l$. 信号在其中无反射地传输，传输规律由式(4.1.14)中的第一项决定. 因此，该系统的传递函数为

$$\hat{h}(\omega)=\mathrm{e}^{\gamma(\omega)l}. \tag{4.1.17}$$

如果系统的损耗可忽略不计，则 $\gamma(\omega)=\mathrm{i}\omega\sqrt{LC}$，这时的 $\hat{h}(\omega)$ 满足信号无畸变传输的条件；若损耗的影响必须考虑，则信号的传输与 $\gamma(\omega)$ 的具体形式有关. 下面以同轴线为例进行讨论.

对同轴线而言，其内外导体的导电率 σ 即使不是无限大，也会是良导体，其导电率也相当高，在感兴趣的频率范围内趋肤效应很明显. 这时，导体的损耗可以用表面阻抗来表示. 对于一个半径为 r 的圆柱导体，当趋肤深度比其半径小很多时，单位长度的表面阻抗可表示为

$$z_s=\frac{1}{2\pi r}\sqrt{\frac{-\mathrm{i}\omega\mu}{\sigma}}. \tag{4.1.18}$$

一般讲同轴线的外导体半径 b 比内导体半径 a 要大得多，近似地可只计算内导体的影响. 这时就有

$$z_s=K\sqrt{-\mathrm{i}\omega}, \tag{4.1.19}$$

其中

$$K=\frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}. \tag{4.1.20}$$

这样，对同轴线而言就可用 z_s 代替式(4.1.15)中的 R. 由于同轴线内外导体间的支撑材料都尽量采用低损耗的，故式(4.1.15)中的 G 也可忽略. 于是，对同轴线这种 TEM 传输系统，可近似有

$$\gamma(\omega)=\sqrt{(z_s-\mathrm{i}\omega L)\mathrm{i}\omega C}. \tag{4.1.21}$$

假设在考虑的整个频率范围内 $|z_s|\ll\omega L$，则式(4.1.21)可进一步近似成

$$\gamma(\omega)=\mathrm{i}\omega\sqrt{LC}-\frac{K}{2z_0}\sqrt{-\mathrm{i}\omega}, \tag{4.1.22}$$

其中 $z_0=(L/C)^{1/2}$.

把式(4.1.22)扩展到复频域 p 中，便有

$$\gamma(p)=-p\sqrt{LC}-\frac{K}{2z_0}\sqrt{p}. \tag{4.1.23}$$

所以在复频域表示的无限长均匀同轴线 l 长的一段的传递函数为

$$H(p)=\mathrm{e}^{-pl\sqrt{LC}}\mathrm{e}^{-\frac{Kl}{2z_0}\sqrt{p}}. \tag{4.1.24}$$

根据定义，如果在 $z=0$ 处的信号为 $\delta(t)$，则式(4.1.24)的反演就是 $z=l$ 时的输出信号.

利用拉氏变换的下述关系

$$\int_0^{\infty}\delta(t-b)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-bp},\quad b>0, \tag{4.1.25}$$

$$\int_0^{\infty}t^{-3/2}\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4t}}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{\pi}}{a}\mathrm{e}^{-a\sqrt{p}}, \tag{4.1.26}$$

和拉氏变换的卷积定理，可以得到输出信号为

$$h(t)=A\tau^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{B}{\tau}}u(\tau), \tag{4.1.27}$$

其中

$$A=\frac{lK}{4z_0\sqrt{\pi}},\quad B=\left(\frac{lK}{4z_0}\right)^2,\quad \tau=t-l\sqrt{LC}, \tag{4.1.28}$$

而 $u(\tau)$ 为单位阶跃函数.

分析表明，$h(t)$ 已经变成一个上升很陡但下降缓慢的脉冲了，与输入的冲激脉冲波形有了明显的差别.

如果输入的是其他形式的信号，则原则上都可以通过式(4.1.5)或式(4.1.8)求得输出信号，从而了解色散对信号传输所造成的影响.

4.1.3 空心波导中脉冲信号的传输

由波导理论可知，即使不考虑损耗，空心波导以任何模式传播电磁波都是色散的. 因此，空心波导是一种色散传输系统. 下面分析脉冲电磁场在无耗空心波导中传输的特性. 假定波导为均匀无限长的，其内为真空. 我们取长度为 l 的一

段作为研究的线性系统，起始点为 $z=0$，终点为 $z=l$. 如果假定在所考虑的频率范围内电磁波是以同一单个模式传输的，则该系统的传递函数可表示为

$$\hat{h}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)l}. \tag{4.1.29}$$

其中

$$\beta(\omega)=\sqrt{k_0^2-k_c^2}. \tag{4.1.30}$$

由于 k_c 与电磁场在波导中的模式有关，只有对于单一模式它才是常数. 因 $k_0=\omega/c, k_c=\omega_c/c$，则 $\beta(\omega)$ 可表示成

$$\beta(\omega)=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}. \tag{4.1.31}$$

由此可知，在复频域传递函数具有以下形式

$$H(p)=\mathrm{e}^{-\frac{l}{c}\sqrt{p^2+\omega_c^2}}. \tag{4.1.32}$$

如果在 $z=0$ 有信号 $\delta(t)$ 作用，在上述条件的假定下，由 $H(p)$ 的逆变换就可求得 $z=l$ 处的输出信号 $h(t)$. 利用以下关系

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{J}_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}u(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-\tau p}-\mathrm{e}^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{a\tau}, \tag{4.1.33}$$

以及式(4.1.25)，可以容易得到

$$h(t)=\delta\left(t-\frac{l}{c}\right)-\omega_c\frac{l}{c}\frac{\mathrm{J}_1(\omega_c\sqrt{t^2-(l/c)^2})}{\sqrt{t^2-(l/c)^2}}u\left(t-\frac{l}{c}\right). \tag{4.1.34}$$

其中 J_1 为一阶贝塞尔函数.

这一结果最明显的结论是：在 $t<l/c$ 时，$h(t)=0$，也就是说，信号在空心波导中不可能以超过光速的速度传输；在 $t=l/c$ 时，一个冲激脉冲到达 l 处，但由于第二项的存在，使得初始冲激具有有限强度. 接下来呈现的是主要由贝塞尔函数决定的幅度和频率连续下降的振荡.

由于当 x 比较大时，贝塞尔函数 $\mathrm{J}_1(x)$ 可近似地表示为

$$\mathrm{J}_1(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \tag{4.1.35}$$

即接近于幅度连续减小的正弦振荡. 若把变量表示成时间的线性函数 $x=\omega t+\varphi$，则 ω 就是它的振荡频率，而且 $\omega=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. 由于在式(4.1.34)中振荡项的频率是随时间而变化的，故通过 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 所求得的频率称为即时频率. 由于在式(4.1.34)中的 $x=\omega_c[t^2-(l/c)^2]^{1/2}$，由此得到即时频率为

$$\omega=\frac{\omega_c t}{\sqrt{t^2-(l/c)^2}}. \tag{4.1.36}$$

由此可见，即时频率随着时间的增加而降低，在 t 比 l/c 大得不是很多时，亦

即在波头到达 l 处较早的时段，频率极高；当 $t\to\infty$ 时，$\omega\to\omega_c$，而 ω_c 为以所规定模式在波导中可传输的电磁信号的最低频率.

由式(4.1.31)可以求得电磁波在波导中传输的群速度 v_g，即

$$v_g=\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}\right)\right]^{-1}$$
$$=\frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\omega}. \tag{4.1.37}$$

由此可求得中心频率为 ω 的波包到达 l 的时间 t 为

$$t=l/v_g=\frac{l\omega}{c\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}. \tag{4.1.38}$$

这说明，中心频率不同的波群到达 l 的时间不同，当 $\omega\to\infty$ 时，$t\to\frac{l}{c}$. 也就是说，以频率 $\omega\gg\omega_c$ 为中心的波群以接近光速在波导中传输；反之，ω 降低，t 就增大，直到 $\omega\to\omega_c$，$t\to\infty$，即接近 ω_c 的频率分量构成的波群要经过近乎无限长的时间才能到达 l 处.

总结以上分析可以看出，由于 $\delta(t)$ 有无限宽的频谱，频谱高端的部分以接近光速的速度到达 l 处，这就是最早到达的波头. 频谱的低端要经过非常长的时间才能到达 l 处，这就是 $h(t)$ 中的长长的拖尾.

需要再次强调的是，以上结果的前提是所有频率分量都是以同一模式传输，否则 ω_c 就不能认为是常数，而是因模式而变的. 如果 $z=0$ 处输入的是其他形式的信号，原则上需要通过反演式(4.1.5)或(4.1.8)求出输出响应.

§4.2 波导中电磁场的瞬变过程[13]

前面分析了信号在色散传输系统中传输时所表现的基本特性，没有涉及激发源和电磁场的具体结构. 本节将讨论矩形波导中的线电流所激发的场，以及场在波导中传输的瞬变过程，包括场的空间分布.

4.2.1 矩形波导的电磁模式及传输特性

假设波导由理想导体构成，其内为真空，因此这种波导是无耗的. 理论分析可知，在这种空心系统中 TEM 波不存在. 对于矩形波导而言，可存在两类电磁模式：一类模式中没有电场的纵向分量，因此称为横电模，用 TE 表示；另一类则没有磁场纵向分量，称为横磁模，用 TM 表示. 若取纵向坐标为 z，宽边沿坐标 x，宽度为 a，窄边沿坐标 y，高度为 b，在频域这两类模式的电磁场分布由以下公

式给出

TE 模

$$\left.\begin{aligned}
\hat{E}_x &= -\frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{E}_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{E}_z &= 0,\\
\hat{H}_x &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{H}_y &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{H}_z &= H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.1}$$

TM 模

$$\left.\begin{aligned}
\hat{E}_x &= \frac{\mathrm{i}\beta}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{E}_y &= \frac{\mathrm{i}\beta}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{E}_z &= E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{H}_x &= -\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{H}_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\
\hat{H}_z &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.2}$$

其中

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{4.2.3}$$

$$\beta = (k^2 - k_c^2)^{1/2} = \left[\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \tag{4.2.4}$$

以上各类模式只说明在矩形波导中可以存在这些电磁场的结构形式.至于实际存在哪些模式,则取决于电磁场的激发方式和电磁场所包含的频率成分.

如果波导中只有 E_y 被激发,且 E_y 在 y 方向不变,这时有 $n=0$,于是 TE_{mn} 模中只存在 TE_{m0} 模,且 TM 模不被激发.在这种情况下,波导中可能存在的电磁场为

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}_y &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu_0}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\ \hat{H}_x &= -\frac{\mathrm{i}\beta}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)H_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\\ \hat{H}_z &= H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}.\end{aligned}\right\}\tag{4.2.5}$$

由此可以看出，在 TE_{m0} 模式中电场只有 E_y 分量，只要求出 E_y 就能了解这类模式的传输特性.

4.2.2 矩形波导中 TE_{m0} 模的频域格林函数

假设在矩形波导的 (x',z') 处有横贯波导，且平行于 y 轴的均匀线电流 $j(x',z',t)$，由于电流沿 y 轴无变化，它在波导中所激发的场也与 y 无关. 由式(1.3.15)可知，因为电流只有 y 分量，故 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 也只有 y 分量，即 $\hat{\boldsymbol{A}}=\hat{y}\hat{A}_y$. 再由于电流是均匀的，故波导内无电荷积累，则标势 $\hat{\phi}$ 为零. 于是，由式(1.3.18)可知，$\hat{\boldsymbol{E}}=\mathrm{i}\omega\hat{\boldsymbol{A}}$，亦即电场只有 y 分量 $\hat{E}_y$，且与坐标 y 无关. 考虑到电场所满足的方程(1.2.15)，在直角坐标系中可得到 $\hat{E}_y$ 所满足的方程

$$\frac{\partial^2\hat{E}_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{E}_y}{\partial z^2}+k_0^2\hat{E}_y=-\mathrm{i}\omega\mu_0\hat{j}(\omega)\delta(x-x')\delta(z-z').\tag{4.2.6}$$

由上面的分析可知，该方程的场解只能是式(4.2.5)所表示的各 TE_{m0} 模的线性组合. 把方程(4.2.6)与方程(1.4.3)相比可以看出，除源的系数之外，两者是完全类似的，所以这里的 $\hat{E}_y$ 也可以看做所解问题的格林函数，我们也用 $\hat{g}(x,z;x',z')$ 表示它. 这样，方程(4.2.6)又可表示成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_0^2\right)\hat{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu_0\hat{j}(\omega)\delta(x-x')\delta(z-z').\tag{4.2.7}$$

根据以上分析，可把 $\hat{g}(x,z;x',z')$ 表示成

$$\hat{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}G_m\sin\frac{m\pi}{a}x,\tag{4.2.8}$$

其中

$$G_m=\frac{2}{a}\int_0^a\hat{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.\tag{4.2.9}$$

以 $\sin\frac{m\pi}{a}x$ 乘方程(4.2.7)的两侧，并在 0 到 a 之间对 x 求积分，考虑到 δ 函数的性质及 $\hat{g}$ 与 $\hat{E}_y$ 满足同样的边界条件，即当 x 取值 $0,a$ 时，$\hat{g}=0$，和

$$\int_0^a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{g}\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x=-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\int_0^a\hat{g}\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x,$$

则可由式(4.2.7)可得

$$\left[k_0^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\int_0^a\hat{g}(x,z;x',z')\sin\frac{m\pi}{a}x\,\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{i}\omega\mu_0\hat{j}(\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x'\delta(z-z'). \qquad (4.2.10)$$

令

$$\beta_m=\left[k_0^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.2.11)$$

并考虑到式(4.2.9)，则可由式(4.2.10)得到 G_m 所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\beta_m^2\right)G_m=\frac{-2\mathrm{i}\omega\mu_0}{a}\hat{j}(\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x'\delta(z-z'). \qquad (4.2.12)$$

当 $z\neq z'$ 时，该方程相对于源在 z' 处的解为

$$G_m=b_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m z},\quad z<z',$$

$$G_m=c_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},\quad z>z', \qquad (4.2.13)$$

其中 b_m 和 c_m 与 z' 有关；在 $z=z'$ 处，G_m 应该是连续的，故有

$$b_m\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m z'}=c_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m z'}, \qquad (4.2.14)$$

把式(4.2.12)在 $z'-\Delta$ 到 $z'+\Delta$ 区间积分，并令 Δ 趋于零，即可得到

$$\left.\frac{\partial G_m}{\partial z}\right|_{z'_-}^{z'_+}=\frac{-2\mathrm{i}\omega\mu_0}{a}\hat{j}(\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x', \qquad (4.2.15)$$

这说明 G_m 对 z 的导数在 z' 处是不连续的. 把式(4.2.13)所表示的 G_m 代入式(4.2.15)，可以得到

$$b_m=-\frac{\omega\mu_0}{a\beta_m}\hat{j}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m z'}\sin\frac{m\pi}{a}x',$$

$$c_m=b_m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta_m z'}. \qquad (4.2.16)$$

由此可知

$$G_m=-\frac{\omega\mu_0}{a\beta_m}\hat{j}(\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x'\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m(z'-z)}, & z\leqslant z',\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m(z'-z)}, & z\geqslant z'.\end{cases} \qquad (4.2.17)$$

把这一结果代回到式(4.2.8)，就得到

$$\hat{E}_y=\hat{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';\omega)=-\frac{\omega\mu_0}{a}\hat{j}(\omega)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_m}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{a}x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m|z-z'|},$$

$$(4.2.18)$$

这就是矩形波导中(x',z')处有均匀电流的格林函数.

4.2.3　矩形波导中线源的时域响应

式(4.2.18)所表示的格林函数是线源随时间简谐变化时在矩形波导中所激发的电磁场，如果线源随时间变化是非简谐的，则式(4.2.6)的右侧应该给出对

时间的傅里叶变换 $\hat{j}(\omega)$.

现在我们考虑源为单位冲激脉冲时的情况，线源随时间的变化应表示为 $\delta(t-t')$，于是其傅里叶变换式为 $\hat{j}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}$. 这样，对冲激脉冲而言，式(4.2.6)和式(4.2.7)的右侧应该代入 $\hat{j}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t'}$，这将导致在最后的解式(4.2.18)中也应令 $\hat{j}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

为了求逆变换方便，把式(4.2.18)扩展到复频域 p 上. 和过去一样，根据所用傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系，需把 $\mathrm{i}\omega$ 用 $-p$ 代替，由此可以得到

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';p)=-\frac{\mu_0}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right)\cdot\frac{p\mathrm{e}^{\left\{-pt'-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+p^2/c^2\right]^{\frac{1}{2}}|z-z'|\right\}}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+p^2/c^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.2.19}$$

利用以下变换

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{e}^{\left\{-pt'-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+p^2/c^2\right]^{\frac{1}{2}}|z-z'|\right\}}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+p^2/c^2\right]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p=\begin{cases}c\mathrm{J}_0\left\{\dfrac{m\pi}{a}[c^2(t-t')^2-(z-z')^2]\right\}, & 0<t-t'<\dfrac{|z-z'|}{c},\\ 0, & t-t'<0\text{ 或 }t-t'>\dfrac{|z-z'|}{c},\end{cases} \tag{4.2.20}$$

其中 C 为一条适当的积分路径.

如果把式(4.2.20)中被变换的函数记做 $F(p)$，其原函数为 $f(t)$，则由拉氏变换的性质可知，$pF(p)$ 的原函数为 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{-c^3(m\pi/a)(t-t')}{[c^2(t-t')^2-(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{J}_1\left\{\frac{m\pi}{a}[c^2(t-t')^2-(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{4.2.21}$$

由式(4.2.19)可得到

$$E_y(\boldsymbol{r},t)=g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t')=\frac{c^2}{a}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right)(t-t')\cdot\frac{\mathrm{J}_1\left\{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)c^2(t-t')^2-(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}}{[c^2(t-t')^2-(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}},\quad t'<t<t'+\frac{|z-z'|}{c}, \tag{4.2.22}$$

在上式成立的时间段之外格林函数为零. 为了使以上结果易于理解，应注意贝塞尔函数的以下两个性质

$$\lim_{x\to 0}\frac{J_1(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{dJ_1}{dx}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{2}[J_0(ax)-J_2(ax)]=\frac{a}{2},$$

$$J_1(ax)=\left(\frac{ax}{2}\right)[J_0(ax)+J_2(ax)],$$

利用后者，可消去式(4.2.22)中的分母. 由此可以看出，E_y 中所包含的每一项(对应于一个模式)的贡献最初为不连续的阶跃，接下来是衰减振荡. 在离开场源距离为 $|z-z'|$ 处，在时刻 $t=t'+|z-z'|/c$ 之前不会出现上述扰动，故波头在波导中的传播不能大于光速.

如果线源随时间的变化是阶跃函数 $u(t-t')$，因为它的拉氏变换为 $e^{-pt'}/p$，从而消去了式(4.2.19)中指数前面的乘子 p. 于是式(4.2.19)中与 p 有关部分的反演，就是式(4.2.20). 如果线源随时间有更复杂的变换关系，则可借助卷积定理求得最终结果. 进而，若场源不是线源，但沿 y 方向仍是均匀的，则可由格林函数与场源的空间积分先求得频域解，然后再求反演，也可直接在时域求多重积分.

§4.3　瞬变电磁偶极子的辐射场

随着对宽频带天线需求的迫切性不断提高，对天线在宽频带信号激励下辐射特性时域分析显得越来越重要，因为时域分析可提供有关辐射过程更丰富且更直观的信息. 这一节从最简单的偶极子的瞬态辐射开始进行分析.

4.3.1　瞬变电偶极子的辐射

设在真空中由相距 $2l$ 的正负两个点电荷构成一电偶极子，其电量为 q，在坐标系中的位置如图 4-1 所示.

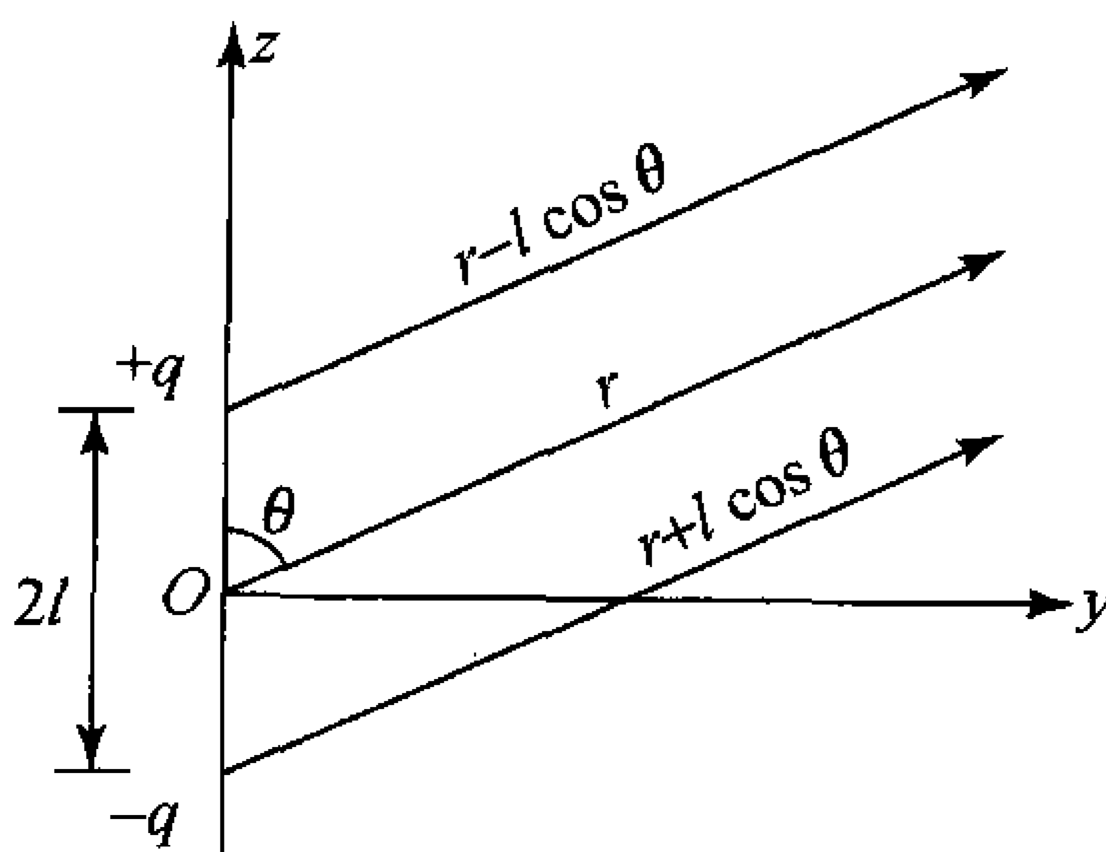


图 4-1　电偶极子

从 $t=-l/v$ 开始，$+q$ 电荷突然以速度 v 均速向 $-q$ 电荷运动；在 $t=l/v$ 时刻到达 $-q$ 电荷所在位置而突然停止. 这种情况相当于在一段时间内出现一个突然产生又突然消失的电流元，该电流的电流密度可表示为

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\begin{cases}-\hat{z}q\delta(x)\delta(y)\delta\left(t+\dfrac{z}{v}\right), & |t|<\dfrac{l}{v},\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{l}{v},\end{cases} \tag{4.3.1}$$

这是因为 $\boldsymbol{J}=\rho\boldsymbol{v}$，$\rho=q\delta(x)\delta(y)\delta(z+vt)$，而且

$$\delta(z+vt)=\delta\left[v\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]=\frac{1}{v}\delta\left(t+\frac{z}{v}\right).$$

在频域电流元的密度为

$$\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r},\omega)=\begin{cases}-\hat{z}\delta(x)\delta(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z/v}, & |z|<l,\\ 0, \quad |z|>l,\end{cases} \tag{4.3.2}$$

相应的电流强度则是

$$\hat{I}(z,\omega)=\int\hat{J}(r,\omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}-q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z/v}, & |z|<l,\\ 0, \quad |z|>l,\end{cases} \tag{4.3.3}$$

在远区，即 $r\gg l$ 时，电流元的辐射场可视为球面波，在球坐标系 (r,θ,φ) 中，仅有 E_θ 和 E_φ 分量，而且 $E_\theta=\eta H_\varphi$，$\eta=(\mu_0/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$. 对于 z 轴上的一个微电流源 $I(z')\mathrm{d}z'$，其在 (r,θ,φ) 处对电场的贡献为[15]

$$\mathrm{d}\hat{E}_\theta(r,\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r}}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\cos\theta z'}\hat{I}(z',\omega)\mathrm{d}z'. \tag{4.3.4}$$

于是，总的电场为

$$\begin{aligned}\hat{E}_\theta(\boldsymbol{r},\omega)&=\mathrm{i}\omega\mu_0q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\sin\theta\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)z'}\mathrm{d}z'\\&=\eta q\frac{\sin\theta}{4\pi r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{\cos\theta+\xi}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)l}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)l}\right],\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

其中 $\xi=c/v$.

再对上式进行傅里叶逆变换，就得到远区场的时域形式

$$\begin{aligned}E_\theta(\boldsymbol{r},t)=\frac{-\eta q}{4\pi r}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\xi}&\left[\delta\left(t+\frac{l}{v}-\frac{r-l\cos\theta}{c}\right)\right.\\&\left.-\delta\left(t-\frac{l}{v}-\frac{r+l\cos\theta}{c}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

由这一结果可知，所述电偶极子的时域辐射场由两个符号相反的冲激脉冲组成. 其中的一个在时刻 $t=-l/v$ 发出，到达 (r,θ) 处的延迟时间为 $(r-l\cos\theta)/c$. 从时间和距离上看，这一脉冲正是电荷在开始运动的一刻于 $z=l$ 处发出的；同样的分析可知，第二个脉冲是电荷于 $z=-l$ 处突然停止的时刻 $t=l/v$ 时发出

的.这说明辐射是在作加速运动时产生的，而在作匀速运动时不会产生.

其次还可以看出，由于延迟的时间与θ有关，故合成的时域波形与θ角有关.由于辐射场的幅度与θ有关，所以辐射图是有方向性的，但方向性与φ无关.

4.3.2　瞬变磁偶极子的辐射

现在考虑真空中半径为a的一个电流圆环，当a比所涉及的波长小很多时，可视做磁偶极子.设所取直角坐标系的原点置于圆环的中心，z轴与圆环面垂直，如图 4-2 所示.

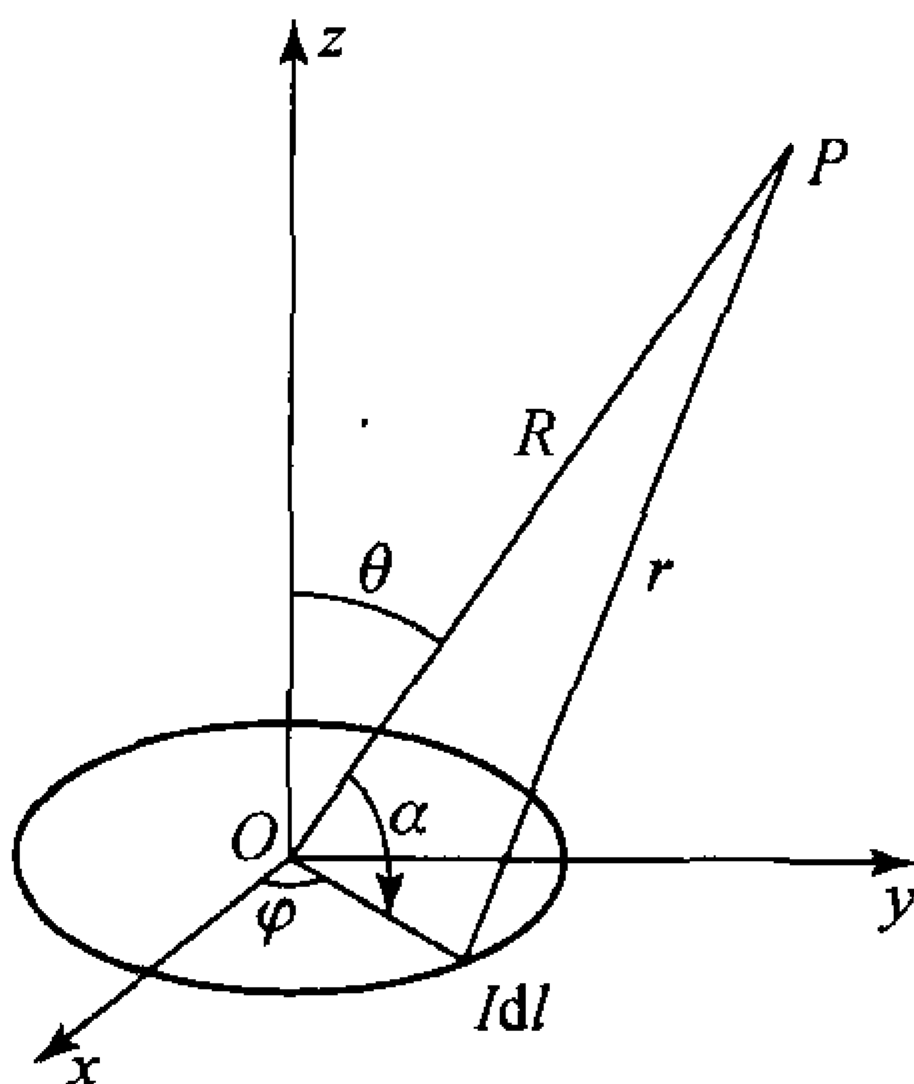


图 4-2　磁偶极子

如果圆环上的瞬态电流是宽度为2τ的矩形脉冲，如下式所示

$$I(t)=I_0[u(t+\tau)-u(t-\tau)], \tag{4.3.7}$$

求偶极子的瞬态辐射场.求解方法和以前类似，先求出频域解，然后求其傅里叶逆变换.

不难理解，该偶极子的场与φ无关，故场点只需取在yOz平面上.对这类场点而言，对y轴对称的两个微电流元的y分量对场的贡献将相互抵消，而其x分量的贡献相同.若取$\mathrm{d}l=a\mathrm{d}\varphi'$，则任一电流微元$\hat{I}\mathrm{d}l$的$x$分量均为$-\hat{I}\mathrm{d}l\sin\varphi'$.在频域该电流元的矢量位，可由式(1.3.15)，(1.4.8)和(1.4.11)得到

$$\mathrm{d}\hat{A}_x=-\mu_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r}}{4\pi r}\hat{I}a\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'. \tag{4.3.8}$$

若只考虑远区场，则可把$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r}$中的$r$近似表示为$r\approx R-a\cos\alpha$，再考虑到$\cos\alpha=\sin\theta\sin\varphi'$，则整个电流环对矢量位的贡献为

$$\hat{A}_\varphi=-\hat{A}_x=\frac{\mu_0\hat{I}a}{4\pi R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0a\sin\theta\sin\varphi'}\sin\varphi'\mathrm{d}\varphi'. \tag{4.3.9}$$

利用$\sin\varphi'=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi'})$和贝塞尔函数的积分式

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\varphi - n\varphi)}\mathrm{d}\varphi,$$

以及 $\mathrm{J}_{-1}(x) = -\mathrm{J}_1(x)$，便可得到

$$\hat{A}_\varphi = -\frac{\mu_0 \hat{I} a}{\mathrm{i}2R}\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R}. \tag{4.3.10}$$

远区电磁场仅有 $\hat{E}_\varphi$ 和 $\hat{H}_\theta$，且 $\hat{E}_\varphi = -\eta\hat{H}_\theta$，故只需求出 $\hat{H}_\theta$，由 $\hat{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\hat{A}$，可在球坐标系中得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_\theta &= -\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi) \\ &= -\frac{\hat{I}ak_0}{2R}\mathrm{J}_1(k_0 a\sin\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R}.\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

利用关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega),$$

可求得

$$\hat{I}(\omega) = 2I_0\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}. \tag{4.3.12}$$

故有

$$\hat{H}_\theta = -\frac{I_0 a}{Rc}\sin(\omega\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 R}\mathrm{J}_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right). \tag{4.3.13}$$

为了求得该式的傅里叶逆变换，需要解决贝塞尔函数的逆变换问题. 为此，需考虑可以借助的关系，它就是如下定义的函数 $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{b^2 - t^2}}, & |t| \leqslant b, \\ 0, & |t| > b.\end{cases} \tag{4.3.14}$$

其傅里叶变换为

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-b}^{b}\frac{1}{\sqrt{b^2 - t^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

令 $t = -b\sin\varphi$，则可得

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\omega b\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi\mathrm{J}_0(b\omega).\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

令

$$G(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{J}_0(b\omega), \tag{4.3.16}$$

利用关系

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\hat{f}(\omega)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \mathrm{i}tf(t),$$

可得

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}t}{\pi\sqrt{b^2-t^2}}, & |t|\leqslant b,\\ 0, & |t|>b.\end{cases} \tag{4.3.17}$$

由于

$$\mathrm{J}_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right) = -\frac{c}{a\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\mathrm{J}_0\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right)\right], \quad (0<\theta<\pi)$$

故有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases}-\dfrac{\mathrm{i}tc}{\pi a\sin\theta}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\sin\theta\right)^2-t^2}}, & |t|\leqslant\dfrac{a}{c}\sin\theta,\\ 0, & |t|>\dfrac{a}{c}\sin\theta.\end{cases} \tag{4.3.18}$$

考虑到 $\sin\omega\tau=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau})$和关系式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\alpha}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t-\alpha),$$

再利用式(4.3.18)所示结果，可以求得式(4.3.13)的傅里叶逆变换

$$H_\theta(r,\theta,t) = -\frac{I_0}{2\pi R\sin\theta}[H_\theta^+(t')-H_\theta^-(t')], \quad 0<\theta<\pi, \tag{4.3.19}$$

其中

$$H^\pm(t') = \begin{cases}\dfrac{t'\pm\tau}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\sin\theta\right)^2-(t'\pm\tau)^2}}, & |t'\pm\tau|\leqslant\dfrac{a}{c}\sin\theta,\\ 0, & |t'\pm\tau|>\dfrac{a}{c}\sin\theta,\end{cases} \tag{4.3.20}$$

且 $t'=t-\frac{R}{c}$.

由式(4.3.19)和(4.3.20)可以看出，在 $t'=\pm\tau\pm\frac{a}{c}\sin\theta$ 时可观察到辐射的奇异性，由 $t-\left(\frac{R}{c}\pm\frac{a}{c}\sin\theta\right)=\pm\tau$ 可以推断，奇异性是由于 $t=\pm\tau$ 时电流的突变引起的，而且其贡献来自由观察点与 z 轴所决定的平面和电流环相交的两处

电流元.

§4.4 对称线天线的瞬态辐射

对称线天线是线天线的一种基本形式,其辐射特性决定于天线上的电流分布和随时间的变化形式.现在分析当天线上的电流非时谐变化时所产生的辐射场,主要分析的基本形态是行波电流.

设有一置于真空中长度为 $2L$ 的对称线天线,其坐标表示如图 4-3 所示.

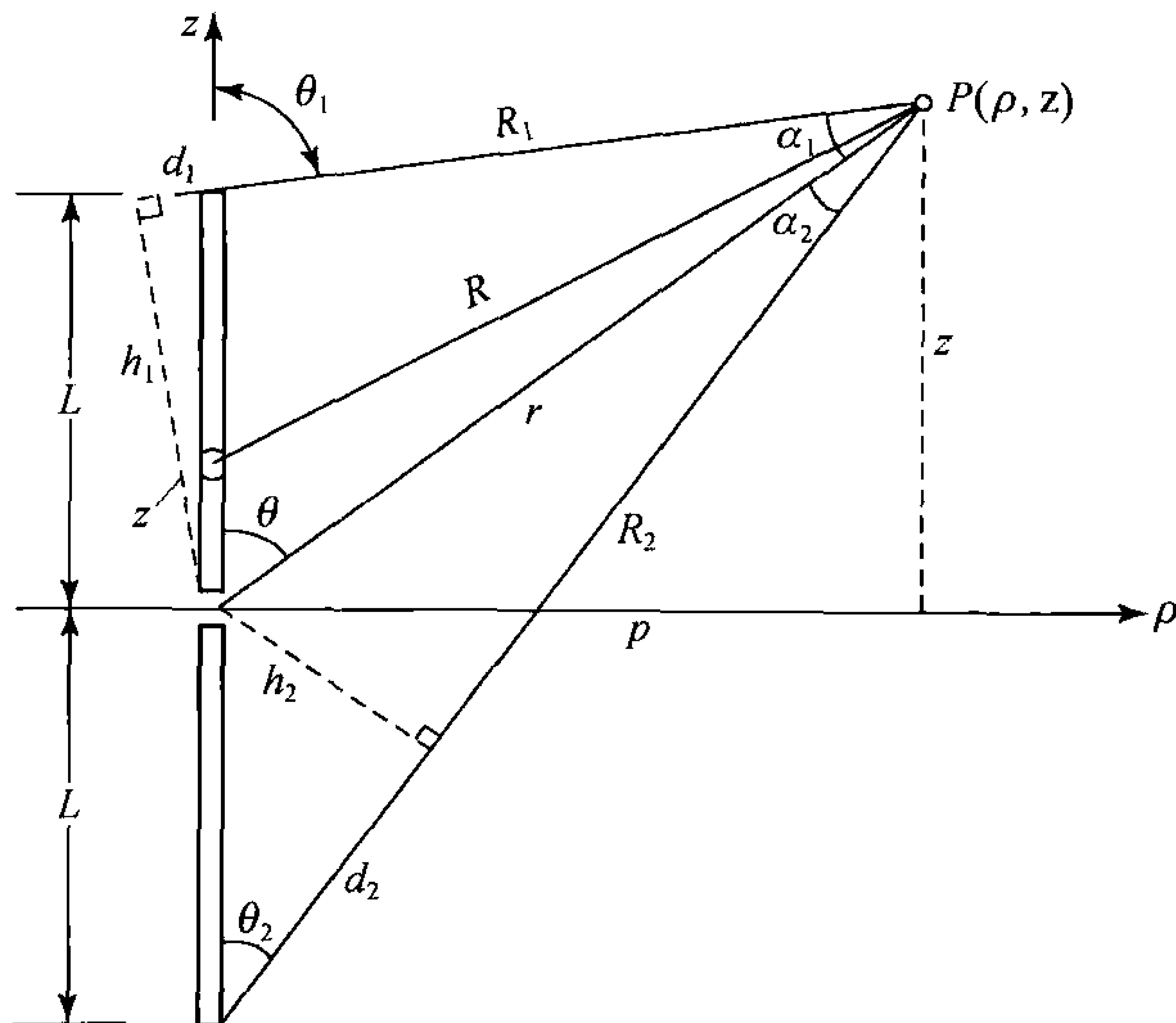


图 4-3 对称线天线的坐标表示

对称中心有一激励,使线上产生如下的线电流分布

$$I(z,t) = I_0(t - |z|/c). \tag{4.4.1}$$

显然,这种行波分布在 $t \leqslant l/c$, $l < L$ 的时间段内是正确的,我们首先限定在这个时段内考察该线天线的辐射场分布.

仍然采用经典的方法,即先求得频域解,然后再变换到时域,为此先求得电流 $I(z,t)$的傅氏变换

$$\hat{I}(z,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \hat{I}_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|z|}, \tag{4.4.2}$$

其中

$$\hat{I}_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z,t)\,|_{z=0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t.$$

由式(1.4.11)可知,该电流在观察点 P 的矢量位函数为

$$\hat{A}(\boldsymbol{r},\omega)=\hat{z}\hat{A}_z(\boldsymbol{r},\omega)=\hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\hat{I}(z',\omega)}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\mathrm{d}z'$$

$$=\hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\hat{I}_0(\omega)\left[\int_{-l}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R-z')}}{R}\mathrm{d}z'+\int_0^l\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+z')}}{R}\mathrm{d}z'\right],\qquad(4.4.3)$$

其中$R=[l^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}$. 根据电流分布的特点可知，天线所激发的磁场在圆柱坐标系中只有φ方向分量，而且

$$\hat{H}_\varphi=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\hat{\boldsymbol{A}})_\varphi=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{A}_z.\qquad(4.4.4)$$

把式(4.4.3)代入上式，可得

$$\hat{H}_\varphi(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{\hat{I}_0(\omega)}{4\pi}\rho\left\{\int_{-l}^{0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R-z')}}{R}\left[\frac{\mathrm{i}k}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right]\mathrm{d}z'+\int_0^l\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+z')}\left[\frac{\mathrm{i}k}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right]\mathrm{d}z'\right\}$$

$$=\frac{\hat{I}_0(\omega)}{4\pi}\rho\left\{\int_{-l}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R-z')}}{R(R+z-z')}\right]\mathrm{d}z'-\int_0^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z'}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R+z')}}{R(R-z+z')}\right]\mathrm{d}z'\right\}$$

$$=\frac{\hat{I}_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[\frac{r-z}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-\frac{R_2-(z+l)}{R_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_2+l)}\right]$$

$$-\frac{\hat{I}_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[\frac{R_1+(z-l)}{R_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1+l)}-\frac{r+z}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\right]$$

$$=\frac{\hat{I}_0(\omega)}{4\pi\rho}[2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-(1+\cos\theta_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1+l)}-(1-\cos\theta_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_2+l)}],$$

$$(4.4.5)$$

其中

$$R_1=[\rho^2+(z-l)^2]^{\frac{1}{2}},\quad R_2=[\rho^2+(z+l)^2]^{\frac{1}{2}},$$
$$\cos\theta_1=(z-l)/R_1,\quad \cos\theta_2=(z+l)/R_2.$$

利用无源区域的麦克斯韦方程$\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\hat{\boldsymbol{E}}$，可求得在圆柱坐标系中的电场分量为

$$\hat{E}_\rho=\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial\hat{H}_\varphi}{\partial z},\quad \hat{E}_z=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\hat{H}_\varphi),$$

于是可由式(4.4.5)求得

$$\hat{E}_\rho(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\eta_0\hat{I}_0(\omega)}{4\pi\rho}[2\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}-(1+\cos\theta_1)\cos\theta_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1+l)}$$
$$-(1-\cos\theta_2)\cos\theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_2+l)}]$$
$$-\frac{\hat{I}_0(\omega)}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\sin\theta_1}{R_1^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_1+l)}-\frac{\sin\theta_2}{R_2^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_2+l)}\right],\qquad(4.4.6)$$

$$\hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega) = -\frac{\eta_0 \hat{I}(\omega)}{4\pi\rho}\left[2\sin\theta e^{ikr} - (1+\cos\theta_1)\sin\theta_1 e^{ik(R_1+l)} - (1-\cos\theta_2)\sin\theta_2 e^{ik(R_2+l)}\right] - \frac{\hat{I}_0(\omega)}{i\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\cos\theta_1}{R_1^2}e^{ik(R_1+l)} - \frac{\cos\theta_2}{R_2^2}e^{ik(R_2+l)}\right], \tag{4.4.7}$$

其中 $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$.

把电场投影到球坐标系中，可得

$$\hat{E}_r = \hat{E}_\rho \sin\theta + \hat{E}_z \cos\theta,$$

$$\hat{E}_\theta = \hat{E}_\rho \cos\theta - \hat{E}_z \sin\theta.$$

为了简化，把结果通过图 4-3 中所示的 α_1 和 α_2 表示，最后可得

$$\hat{E}_r(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\eta_0 \hat{I}(\omega)}{4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}e^{ik(R_1+l)} - \frac{\sin\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}e^{ik(R_2+l)}\right] - \frac{\hat{I}_0(\omega)}{i\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\cos\alpha_1}{R_1^2}e^{ik(R_1+l)} - \frac{\cos\alpha_2}{R_2^2}e^{ik(R_2+l)}\right], \tag{4.4.8}$$

$$\hat{E}_\theta(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\eta_0 \hat{I}(\omega)}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho}e^{ikr} - \frac{\cos\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}e^{ik(R_1+l)} - \frac{\cos\theta_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}e^{ik(R_2+l)}\right] - \frac{\hat{I}_0(\omega)}{i\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1^2}e^{ik(R_1+l)} - \frac{\sin\alpha_2}{R_2^2}e^{ik(R_2+l)}\right]. \tag{4.4.9}$$

对式(4.4.5)，(4.4.8)和(4.4.9)进行傅里叶逆变换，便得到在球坐标系中表示的辐射场的时域结果

$$H_\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho}I_0\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{\cot\frac{\theta_1}{2}}{R_1}I_0\left(t-\frac{R_1+l}{c}\right) - \frac{\tan\frac{\theta_2}{2}}{R_2}I_0\left(t-\frac{R_2+l}{c}\right)\right], \tag{4.4.10}$$

$$E_\theta(\boldsymbol{r},t) = \frac{\eta_0}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho}I_0\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{\cos\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}I_0\left(t-\frac{R_1+l}{c}\right) - \frac{\cos\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}I_0\left(t-\frac{R_2+l}{c}\right)\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1^2}Q\left(t-\frac{R_1+l}{c}\right) - \frac{\sin\alpha_2}{R_2^2}Q\left(t-\frac{R_2+l}{c}\right)\right], \tag{4.4.11}$$

$$E_r(\boldsymbol{r},t) = \frac{\eta_0}{4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}I_0\left(t-\frac{R_1+l}{c}\right) - \frac{\sin\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}I_0\left(t-\frac{R_2+l}{c}\right)\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\alpha_1}{R_1^2}Q\left(t-\frac{R_1+l}{c}\right) - \frac{\cos\alpha_2}{R_2^2}Q\left(t-\frac{R_2+l}{c}\right)\right], \tag{4.4.12}$$

其中 $Q(t)=\int_{-\infty}^{t} I_0(t')\mathrm{d}t'$，它是在时间 t 内的积累电荷.

现在我们对所得结果进行简单分析，以便了解瞬态辐射的一些基本特性. 首先，H_φ 的表达式(4.4.10)共由三部分组成：由到达观察点的时间可以看出，其中第一项表示由天线中心电流产生的辐射；由于 $I_0(t-l/c)$ 表示 t 时刻 $z=l$ 处的电流，所以第二项表示天线上臂电流所达到的最上端 $z=l$ 处所产生的辐射；类似的道理可知，第三项则表示天线下臂电流所达到的最下端 $z=-l$ 处产生的辐射. 以上结果在图 4-4 中得到表述.

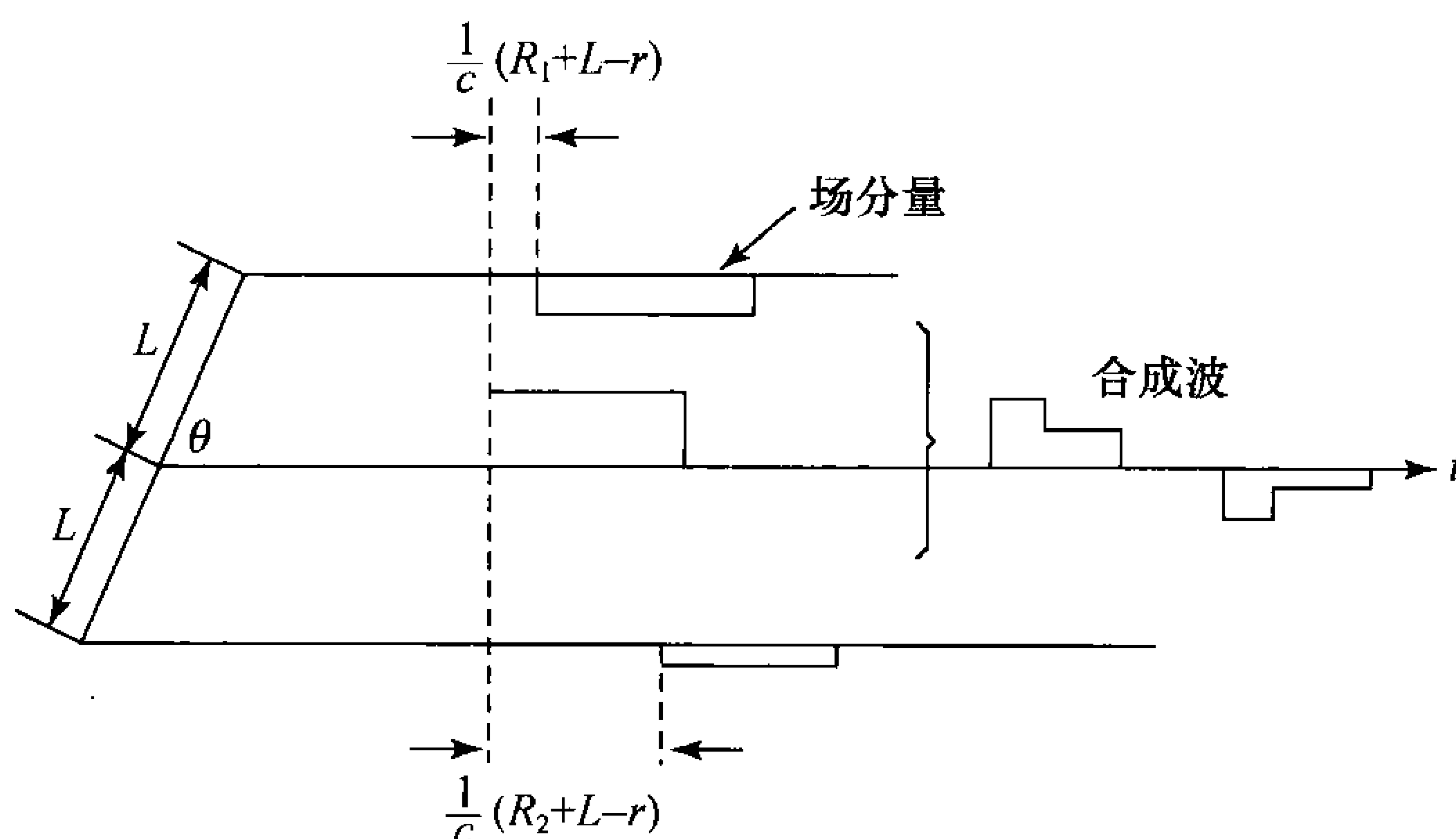


图 4-4　瞬态辐射场

由式(4.4.10)直接可以看出，电流端点产生的辐射场的大小，与端点到观察点的距离 r 成反比，这与时谐场的远区场相似. 我们在分析过程中并没有作远区近似，所得结果对远区和近区都是成立的，这反映出稳态辐射与瞬态辐射的差别. 观察 E_θ 的表达式(4.4.11)即可发现，除了与 H_φ 一样有 3 个辐射点外，还有由电流的两个端点处电荷所产生的辐射，它们的强度与端点到观察点距离的平方成反比，这与似稳场相似. E_r 的特点是，它不包含中心电流所产生的辐射，或者说中心电流的辐射场没有 E_r 分量. 纵观以上结果可以发现，所设置的脉冲电流在天线上传播的过程中不产生辐射，这是因为在这段时间内电荷作匀速直线运动.

由图 4-4 不难看出，中心电流的辐射场最先到达观察点，所以在电流端点辐射场尚未到达观察点而只有中心辐射场的这段时间，观察点处的辐射场为

$$\left.\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{2\pi\rho} I_0\left(r-\frac{r}{c}\right), \\ E_\theta &= \eta_0 H_\varphi, \\ E_r &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.13}$$

这表明，在这一时段内，辐射波的波前为球面，其幅度按 $1/\rho$ 的规律衰减. 而且电场与磁场相互垂直，其比值等于波阻抗，这与时谐场的远区场相似. 但是，对瞬态辐射场而言，这一时段辐射场的以上特性并不分远场还是近场.

以上讨论的辐射特性只在 $t\leqslant L/c$ 时是正确的，因为此后电流将在天线的终点产生反射，天线上的电流不再是行波. 考虑反射电流存在时的天线辐射，也可用类似的方法进行讨论，其特性与行波状态相比将发生明显的变化. 要想不受限制地维持行波状态，条件是要么天线为无限长，要么终端接全吸收负载，而这在实际上是不可能办到的.

§4.5　对称圆柱天线的瞬态辐射

上一节所分析的线天线是一种理想化的模型. 对于实际的天线结构，其横向尺度的影响有时不能忽略. 本节所讨论的圆柱天线就计入了天线的半径 a. 但是，为了简化处理，还是假定 $ka\ll 1$. 天线的坐标如图 4-5 所示.

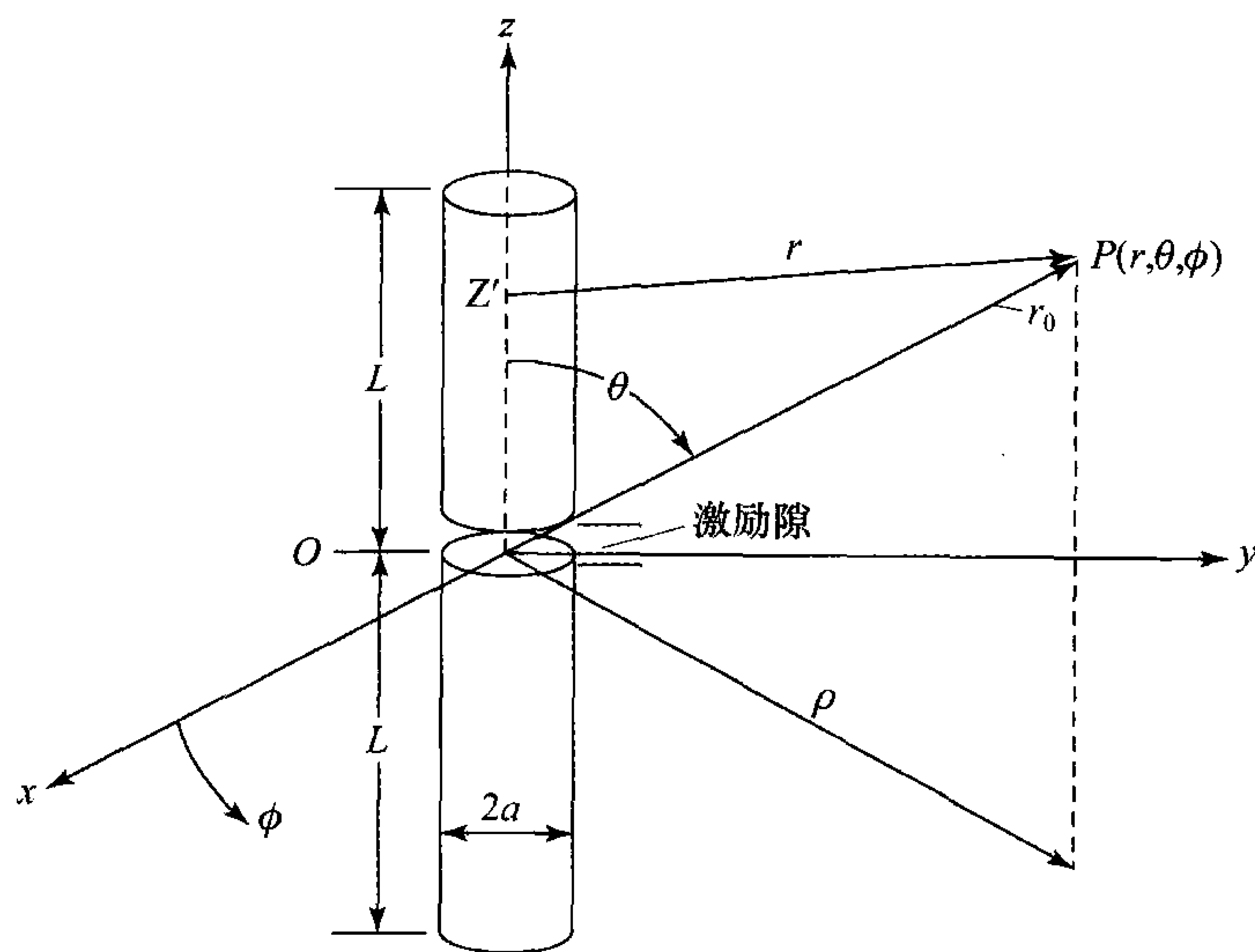


图 4-5　对称圆柱天线

和上节一样，我们假定天线足够长，在观察的时间段内天线电流尚未到达终端，故不必考虑终端对电流的反射作用. 设天线的对称中心无限窄的间隙处接入一理想电压源，其电动势为 $U(t)$，内阻为零，在频域用 $\hat{U}(\omega)$ 表示.

由于天线很细，可认为电流只有 z 分量，于是矢量位 $\boldsymbol{A}$ 也只有 z 分量. 由此可推知，天线所激发的场在柱坐标系中仅有 H_φ，E_ρ 和 E_z 分量. 由频域麦克斯韦

方程可推知,这些场分量之间存在以下关系

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\hat{E}_\rho(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\partial}{\partial z}\hat{H}_\varphi(\boldsymbol{r},\omega),\\
&\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\hat{H}_\varphi(\boldsymbol{r},\omega)],\\
&\mathrm{i}\omega\mu_0\hat{H}_\varphi(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\partial}{\partial z}\hat{E}_\rho(\boldsymbol{r},\omega)-\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{E}_z(\boldsymbol{r},\omega).
\end{aligned}\right\}\tag{4.5.1}$$

根据所给的激励条件,又有

$$\hat{E}_z(a,z,\omega)=-\hat{U}(\omega)\delta(z).\tag{4.5.2}$$

由给定的电流分布和天线结构的旋转对称性可推知,所有场分量均与 φ 无关.为了进一步分析的方便,运用傅里叶变换再隐去一个空间变量 z,如对 $\hat{H}_\varphi(\rho,z,\omega)$ 作以下变换

$$\hat{H}_\varphi(\rho,\zeta,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{H}(\rho,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta z}\,\mathrm{d}z.\tag{4.5.3}$$

为了简化表示符号,这里对新的变换域没有采用新符号,仅用参量 ζ 表示其差别.当对其他场量也采用同样变换后,可由式(4.5.1)得到

$$\left.\begin{aligned}
&\omega\varepsilon_0\hat{E}_\rho(\rho,\zeta,\omega)=-\zeta\hat{H}_\varphi(\rho,\zeta,\omega),\\
&\omega\varepsilon_0\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)=\mathrm{i}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\hat{H}_\varphi(\rho,\zeta,\omega)],\\
&\omega\mu_0\hat{H}_\varphi(\rho,\zeta,\omega)=-\zeta\hat{E}_\rho(\rho,\zeta,\omega)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega).
\end{aligned}\right\}\tag{4.5.4}$$

式(4.5.2)的变换则是

$$\hat{E}(a,\zeta,\omega)=-\hat{U}(\omega).\tag{4.5.5}$$

由方程组(4.5.4),可以得到 $\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)$ 所满足的方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)\right]+(k_0^2-\zeta^2)\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)=0.\tag{4.5.6}$$

这是一个零阶贝塞尔方程.考虑到我们所选择的谐波分量与时间的关系,可把在 $\rho>a$ 的区域的解选作

$$\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)=CH_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}).\tag{4.5.7}$$

利用激励条件(4.5.5),可以确定

$$C=-\hat{U}(\omega)/H_0^{(1)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2}),$$

从而得到在 ζ 域中的解为

$$\hat{E}_z(\rho,\zeta,\omega)=-\hat{U}(\omega)\frac{H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}{H_0^{(1)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}.\tag{4.5.8}$$

变换回到原来空间，即得

$$\hat{E}_z(\rho,z,\omega)=-\frac{\hat{U}(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_0^{(1)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}{H_0^{(1)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\mathrm{d}\zeta. \quad (4.5.9)$$

式中被积函数在 $\zeta=\pm k_0$ 是奇异的，积分实际上不存在，因为积分路径通过奇点. 对该问题的处理方法可以是改用索末菲积分路径，如以前所做的那样.

直接求式(4.5.9)的积分是很困难的，可用最速下降法求其近似值. 为此我们仅考虑远区场，这时可令 $\rho\to\infty$，于是可把 $H_0^{(1)}$ 函数用大宗量近似式代替. 由于

$$H_0^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\frac{\pi}{4})},\quad |x|\to\infty,$$

从而可把式(4.5.9)近似地表示成

$$\begin{aligned}\hat{E}_z(\rho,z,\omega)&=-\frac{\hat{U}(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\mathrm{e}^{\rho(\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}}{\sqrt{\pi\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}}H_0^{(1)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}\mathrm{d}\zeta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\mathrm{e}^{\rho q(\zeta)}\mathrm{d}\zeta, \quad (4.5.10)\end{aligned}$$

其中

$$f(\zeta)=-\frac{\hat{U}(\omega)}{2\pi}\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}}{\sqrt{\pi\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}}H_0^{(1)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}, \quad (4.5.11)$$

$$q(\zeta)=\mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\zeta^2}. \quad (4.5.12)$$

由 § 3.4 中所述最速下降法原理可知，由 $\frac{\mathrm{d}q(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=0$ 可确定该问题的鞍点为 $\zeta_s=0$. 若令

$$\frac{\mathrm{d}^2q(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2}=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0},$$

则由式(4.5.12)可导出，$a=1/k_0$，$\theta_0=\pi/2$. 由此可确定最速下降路径通过鞍点时的方向角为

$$\theta=-\frac{\theta_0}{2}\pm\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}.$$

由此可判定，由索末菲路径变到最速下降路径不会扫过被积函数 $f(\zeta)$ 的奇点. 由于鞍点是一阶的，可根据[2,9]中关于最速下降法的近似积分值得

$$\hat{E}_z(\rho,z,\omega)\approx\mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{a\rho}}f(\zeta_s)\mathrm{e}^{\rho q(\zeta_s)-\mathrm{i}\frac{\theta_0}{2}}=-\mathrm{i}\frac{\hat{U}(\omega)}{\pi\rho}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0\rho}}{H_0^{(1)}(k_0a)}. \quad (4.5.13)$$

如果给定了 $U(t)$ 或 $\hat{U}(\omega)$，则原则上可对上式求傅里叶逆变换，从而得到

$E_z(\rho,z,t)$. 但是,这不是一件轻而易举的事情,尤其更难求得解析表达式. 尽管如此,我们还是可以给出一定的分析,以得到某些基本结论.

把天线视做一个时不变线性系统,可由式(4.5.13)导出它的传递函数. 为了使传递函数与 ρ 无关,定义一个新传递函数 $S(\omega)$,其值为

$$S(\omega)=\frac{\rho}{e^{ik_0\rho}}\frac{\hat{E}_z(\omega)}{\hat{U}(\omega)}=-\frac{i}{\pi}\left[H_0^{(1)}(k_0a)\right]^{-1}. \tag{4.5.14}$$

从原传递函数中消去因子 $e^{ik_0\rho}$,相当于把时间起点推移到 ρ/c. 根据假定 $k_0a\ll1$,可以把式(4.5.14)中的 $H_0^{(1)}(k_0a)$ 用小宗量时的近似式代替,则有

$$S(\omega)\sim\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\omega a}{2c}\right). \tag{4.5.15}$$

这说明,$S(\omega)$ 与 ω 之间是对数关系,即它随 ω 的变化是平缓的. 这一结果意味着,该系统对输入信号的频谱分布影响不大. 也就是说,辐射场的波形与天线的激励源的波形 $U(t)$ 没有明显的改变. 这一结果是可以预想到的,因为我们的分析是在 $k_0a\ll1$ 的条件下进行的,这种情况与上面分析的线天线的性能应该比较接近.

§4.6 分布加载天线的瞬态辐射[17]

从前面所作的分析可知,为使天线系统的时域辐射场保持外加激励信号的波形,必须维持天线电流的行波状态,亦即消除电流在天线终端的反射. 达到上述目标的一种方法是在天线终端加一定的负载,这是一种集中加载方式,其缺点是只对频谱宽度较窄的激励信号有效. 为了扩大有效频带,又提出一种用电阻材料构造的天线,这是一种分布加载方式. 下面对分布加载细柱天线的瞬态辐射特性进行分析.

4.6.1 维持行波电流的加载条件

假设所讨论的天线结构仍如图 4-5 所示,只是现在的天线由阻抗材料构成,且其长度为 $2L$. 天线单位长度的内阻抗是坐标 z 的函数,用 $Z^i(z)$ 表示. 首先需要知道的是,具有怎样的内阻抗分布 $Z^i(z)$ 才能维持有限长细天线上电流的行波状态. 由于已设天线足够细,可假定电流只有 z 向分量,且用 $I(z,t)$ 表示. 和以前一样,先在频域进行分析.

设频域电流为 $\hat{I}(z,\omega)$,则由矢量位与电流的关系可知,$\hat{\boldsymbol{A}}=\hat{z}\hat{A}_z$,且

$$\hat{A}_z(\boldsymbol{r},\omega)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-L}^{L}\hat{I}(z',\omega)\frac{e^{ik_0r}}{r}dz', \tag{4.6.1}$$

当场点取在天线的外表面时 $r=\sqrt{(z-z')^2+a^2}$. 由于

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\left(\hat{\boldsymbol{A}}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{A}}\right),$$

且在天线表面 $\hat{A}_z$ 仅为 z 的函数，于是有

$$\hat{E}_z(z,\omega)=-\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\hat{A}_z,\tag{4.6.2}$$

另一方面又有

$$\hat{E}_z(z,\omega)=-\hat{U}(\omega)\delta(z)+Z^{\mathrm{i}}(z)\hat{I}(z,\omega),\tag{4.6.3}$$

其中 $\hat{U}(\omega)$ 为天线中心 $z=0$ 处所加电压源 $U(t)$ 的傅里叶变换. 于是由式(4.6.2)和(4.6.3)可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\hat{A}_z(z,\omega)=\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0[\hat{U}(\omega)\delta(z)-Z^{\mathrm{i}}(z)\hat{I}(z,\omega)],\tag{4.6.4}$$

由 $\hat{A}_z(z,\omega)$ 的表达式(4.6.1)可知，式(4.6.4)是关于 $\hat{I}(z,\omega)$ 的积分方程.

由于场点取在天线表面，积分(4.6.1)的被积函数在 $z=z'$ 时趋于无限大，故积分值主要取决于在 $z=z'$ 邻域的积分，在此邻域内 $\hat{I}(z',\omega)\approx\hat{I}(z,\omega)$，并可近似地假定，积分结果与 $\hat{I}(z,\omega)$ 成正比. 若比例常数用 ψ 表示，则式(4.6.1)中的积分可近似表示为

$$\int_{-L}^{L}\hat{I}(z',\omega)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0r}}{r}\mathrm{d}z'=\hat{I}(z,\omega)\psi,\tag{4.6.5}$$

把这一结果代入式(4.6.4)中，又可得到 $\hat{I}(z,\omega)$ 近似满足的微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)\hat{I}(z,\omega)=\frac{\mathrm{i}4\pi\omega\varepsilon_0}{\psi}[\hat{U}(\omega)\delta(z)-Z^{\mathrm{i}}(z)\hat{I}(z,\omega)].\tag{4.6.6}$$

当 $z\neq0$ 时，上式为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2+\frac{\mathrm{i}4\pi\omega\varepsilon_0}{\psi}Z^{\mathrm{i}}(z)\right]\hat{I}(z,\omega)=0,\tag{4.6.7}$$

我们的目的是，选择适当的 $Z^{\mathrm{i}}(z)$ 使天线上维持行波电流. 设频域的行波电流具有形式

$$\hat{I}(z,\omega)=C(L-|z|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z|},\tag{4.6.8}$$

其中 C 为待定常数. 把上式代入式(4.6.7)即可得到

$$Z^{\mathrm{i}}(z)=\frac{\eta_0\psi}{2\pi(L-|z|)}.\tag{4.6.9}$$

这便是在天线上维持式(4.6.8)所表示的电流形态天线必须有的阻抗分布，其中 $\eta_0=\sqrt{\mu_0}/\sqrt{\varepsilon_0}$，为自由空间波阻抗. 为了确定式(4.6.8)中的待定常数 C，可利用

洛伦兹规范条件(1.3.17).在天线表面这一条件可表示为

$$\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0\hat{\phi}(z,\omega). \tag{4.6.10}$$

由于已设

$$\hat{A}_z(z,\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{I}(z,\omega)\psi,$$

且 $\hat{I}(z,\omega)$ 由式(4.6.8)给出,则由式(4.6.10)得到

$$\hat{\phi}(z,\omega) = \frac{\psi}{4\pi\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}(\mathrm{i}k_0CL - C - \mathrm{i}k_0C|z|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z|}.$$

当 $z=0^+$ 时,有

$$\hat{\phi}(0^+,\omega) = \frac{\psi}{4\pi\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}(\mathrm{i}k_0L-1)C, \tag{4.6.11}$$

由于对称性,在天线中心有 $\hat{U}(\omega)=\hat{\phi}(0^+)-\hat{\phi}(0^-)=2\hat{\phi}(0^+)$,把这一关系代入上式,即得

$$C = \frac{2\pi\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\hat{U}(\omega)}{\psi(\mathrm{i}k_0L-1)}, \tag{4.6.12}$$

把这一结果代入(4.6.8),即可得到

$$\begin{aligned}\hat{I}(z,\omega) &= \frac{2\pi\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\hat{U}(\omega)}{\psi(\mathrm{i}k_0L-1)}(L-|z|)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0|z|} \\ &= \frac{2\pi\mathrm{i}\omega\tau\hat{U}(\omega)}{\eta_0\psi(\mathrm{i}\omega\tau-1)}\left(1-\frac{|z|}{L}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\frac{|z|}{c}},\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

其中 $\tau=\dfrac{L}{c}$,为信号通过半个天线长度的渡越时间.

精确地考察积分(4.6.5)不难发现,ψ 并不是常数,而是与 z 和 ω 有关.例如,在 $z=0$ 处,ψ 的值可表示成

$$\psi = \frac{1}{\hat{I}(0,\omega)}\int_{-L}^{L}\hat{I}(z',\omega)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0R}}{R}\mathrm{d}z', \quad R=(z'^2+a^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.6.14}$$

计算表明,ψ 随频率的变化缓慢,这就说明 $\hat{I}(z,\omega)$ 与 $\hat{U}(\omega)$ 的频谱接近,进而 $\hat{A}_z(z,\omega)$ 与 $\hat{U}(\omega)$ 的频谱也接近,从而使这种分布加载结构具有较宽的频带特性.

在实际应用中常常用电阻性加载,并表示成

$$R^{\mathrm{i}}(z) = \frac{\eta_0\alpha}{L-|z|}, \tag{4.6.15}$$

其中 $\alpha=|\psi|/2\pi$.该式表明,$R^{\mathrm{i}}(z)$ 在 $z=0$ 附近其值最小且变化比较平缓,而在

$|z|$接近 L 时迅速增大. 加载电阻过大会带来一些问题,一方面实现起来有困难,此外也影响天线效率.

4.6.2 远区辐射场分析

详细全面地分析这种天线结构的辐射场有较大的难度,下面仅就一定条件下远区场的时域场特性加以分析. 首先,通过对传递函数的分析来了解这类天线的某些特性,为此仍用类似式(4.5.14)的传递函数的定义,针对现在的问题定义为

$$\hat{S}(\theta,\omega) = \frac{\hat{E}_\theta(r,\theta,\omega)}{\hat{U}(\omega)} \frac{r}{e^{ik_0 r}}, \tag{4.6.16}$$

与经典的传递函数的定义相比,$e^{ik_0 r}$的作用仅是使起始时间作了改变,因此求得 $\hat{S}(\theta,\omega)$后,就可用关系

$$r\hat{E}_\theta(r,\theta,\omega) = \hat{S}(\theta,\omega)\hat{U}(\omega)$$

求得 $\hat{E}_\theta$. 另一方面,如果已知道了天线上的电流分布 $\hat{I}(z,\omega)$,就可通过式(4.3.4)求得 $\hat{E}_\theta$,即

$$\hat{E}_\theta(r,\theta,\omega) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ik_0 r}}{r}\sin\theta\int_{-L}^{L}\hat{I}(z',\omega)e^{ikz'\cos\theta}dz', \tag{4.6.17}$$

其中 $\hat{I}(z,\omega)$由式(4.6.13)给出. 令 $\psi=2\pi\alpha$,则有

$$\hat{S}(\theta,\omega) = \frac{\sin\theta}{4\pi\alpha}\frac{(i\omega\tau)^2}{(1-i\omega\tau)}\int_{-L}^{L}\left(1-\frac{|z|}{L}\right)e^{i\omega\frac{|z|}{c}}e^{-ik_0 z'\cos\theta}dz',$$

再令 $\zeta=z'/L$,上式又化做

$$\hat{S}(\theta,\omega) = \frac{\sin\theta(i\omega\tau)^2}{4\pi\alpha(1-i\omega\tau)}\int_{-1}^{1}(1-|\zeta|)e^{i\omega\tau|\zeta|-i\omega\tau\zeta\cos\theta}d\zeta. \tag{4.6.18}$$

如果只考虑 $\theta=\pi/2$ 这一特殊角度,则有

$$\begin{aligned}\hat{S}\left(\frac{\pi}{2},\omega\right) &= \frac{1}{4\pi\alpha}\frac{(i\omega\tau)^2}{(1-i\omega\tau)}\int_{-1}^{1}(1-|\zeta|)e^{i\omega\tau|\zeta|}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1+\frac{e^{i\omega\tau}-2}{1-i\omega\tau}\right).\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

由此很容易分析 $\hat{S}\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)$的低频和高频特性,由 $e^{i\omega\tau}$的近似展开得知

$$\hat{S}\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)\to-\frac{(\omega\tau)^2}{4\pi\alpha},\quad 当\ \omega\tau\ll 1\ 时,$$

$$\hat{S}\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)\to\frac{1}{2\pi\alpha},\quad 当\ \omega\tau\gg 1\ 时.$$

由此可见，在低频时 $\hat{S}(\pi/2,\omega)$ 虽然与频率高度相关，但辐射很弱；在高频段 $\hat{S}(\pi/2,\omega)$ 几乎与频率无关，可近似认为是非色散的.

为了具体求得远区辐射场的时域波形，需要给出激励电压的函数表示. 假定 $U(t)$ 为一高斯脉冲，即令

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}}, \tag{4.6.20}$$

则有

$$\hat{U}(\omega) = \sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2}\omega^2}, \tag{4.6.21}$$

从而可知

$$\begin{aligned} r\hat{E}_\theta\left(\frac{\pi}{2},\omega\right) &= \hat{S}\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)\hat{U}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}-2}{1-\mathrm{i}\omega\tau}\right)\sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2}\omega^2}. \end{aligned} \tag{4.6.22}$$

为求得 $rE_\theta(\pi/2,t)$，需要求上式的傅里叶逆变换. 式(4.6.22)的傅里叶逆变换取决于以下两部分的逆变换结果，即

$$\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega\tau}\sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2}\omega^2}, \tag{4.6.23}$$

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}}{1-\mathrm{i}\omega\tau}\sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-\frac{T^2}{2}\omega^2}. \tag{4.6.24}$$

由于

$$\mathrm{e}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases}\dfrac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0,\end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2T^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-\xi)}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\xi}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right]^2+\frac{T^2}{2\tau^2}}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

令 $\zeta=\left(\dfrac{\xi}{T}-\dfrac{T}{\tau}\right)$，则有

$$f_1(t) = \frac{T}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{\frac{T^2}{2\tau^2}}\int_{-\infty}^{\left(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\mathrm{d}\zeta. \tag{4.6.25}$$

利用关系

$$1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 erf 表示误差函数. 即可得到

$$f_1(t)=\frac{T}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{\frac{T^2}{2\tau^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right]. \tag{4.6.26}$$

观察 $\hat{f}_2(\omega)$与 $\hat{f}_1(\omega)$的关系不难发现，$f_2(t)$与 $f_1(t)$的差异仅是把 t 换做 $t-\tau$. 这样一来，利用式(4.6.20)和(4.6.26)便可得到

$$rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\frac{1}{2\pi\alpha}\left\{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}}-\frac{2T}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{T^2}{2\tau^2}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{T}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{T^2}{2\tau^2}}\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\cdot\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t-\tau}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right)\right]\right\}. \tag{4.6.27}$$

这一结果显示，天线辐射场由几部分组成. 式(4.6.27)中的第一项为激励源所在点发出的辐射，其波形就是激励源电压随时间变化的高斯脉冲波形. 从天线中心开始向两端延伸是连续加大的电阻加载，使得沿天线运动的电荷被连续减速，而且接近终点减速迅速加大，由此便产生了其余两项所表示的辐射. 由式(4.6.27)还可以看出，如果天线无限长，即 $\tau\to\infty$，则近似有

$$rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},t\right)\to\frac{1}{2\pi\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2T^2}}. \tag{4.6.28}$$

这时只有激励中心发出的辐射，其波形与激励源相同. 这是因为，当天线为无限长时按式(4.6.15)设定的电阻将变得无限小且均匀，其效果接近于无限长的理想导体细天线，其辐射特性与式(4.4.13)所示的结果类似.

如果 $\theta\neq\pi/2$，可利用式(4.6.18)求得结果，结论基本类似，但辐射幅度会减弱.

第五章　频域数值解到时域的变换

到现在为止，主要讨论了如何求得电磁场问题的时域解析解. 不难发现，只有对一些较简单的特殊问题才能做到，对比较复杂的问题只能借助于数值方法求得近似解. 一种较早使用的数值方法是先求得频域数值解，再把结果变换到时域. 求频域数值解的方法主要有求解积分方程的矩量法和求解微分方程的有限元法. 把频域数值解变换到时域主要采用快速傅里叶变换法（FFT）. 此外，奇点展开法也可归入这一类，只是变换的方法不同.

§5.1　算子方程近似求解的加权余量法

加权余量法是近似求解算子方程的一系列方法的总称，其主要特点是直接从算子方程——微分方程或积分方程出发求得近似数值解，因此有非常广泛的用途. 内域积分形式的加权余量法就是被很多领域广泛应用的矩量法，有限元法的一个主要出发点也是基于加权余量原理.

5.1.1　加权余量法的基本公式

为了明确起见，仅以微分算子方程为例说明加权余量法的基本原理. 设有由线性微分算子 A 和 B 构成的边值问题

$$\begin{aligned} &Au(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in \Omega, \\ &Bu(\boldsymbol{r}_b) = g(\boldsymbol{r}_b), \quad \boldsymbol{r}_b \in \Gamma(\Gamma \text{ 为 } \Omega \text{ 的边界}), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

其中 $f(\boldsymbol{r})$ 和 $g(\boldsymbol{r}_b)$ 均为已知. 这是一种确定性问题的形式，如果 $f(\boldsymbol{r})=\lambda u(\boldsymbol{r})$，就成为特征值问题. 若用近似解 $u^{(n)}(\boldsymbol{r})$ 替代问题的精确解 $u(\boldsymbol{r})$，则在一般情况下，控制方程和边界条件都不会得到精确满足，把由此产生的误差称为余量，并分别用 R_e 和 R_b 表示，则有

$$\begin{aligned} &R_e(\boldsymbol{r}) = Au^{(n)}(\boldsymbol{r}) - f(\boldsymbol{r}), \\ &R_b(\boldsymbol{r}_b) = Bu^{(n)}(\boldsymbol{r}_b) - g(\boldsymbol{r}_b). \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

对精确解而言，余量应该等于零，余量的大小决定于近似解的精确程度. 问题是用什么方法来估算余量的大小呢？ 余量作为 $\boldsymbol{r}$ 的函数，如果仅要求在平均意义下等于零，则不可能限制实际可能存在的最大误差. 比较合理的一种方法是对余量进行加权平均，从而更有效地控制误差.

加权余量平均的做法是，在算子 A 的值域中选取线性无关的函数序列(w_μ)作为权函数，然后逐个对方程的余量 $R_e(\boldsymbol{r})$作内积，并用权函数边值的适当变换$Pw_\mu(\boldsymbol{r}_b)$对边界条件的余量进行内积，令这些内积等于零，就得到

$$\langle R_e, w_\mu\rangle_\Omega + \langle R_b, Pw_\mu\rangle_\Gamma = 0, \quad \mu = 1,2,\cdots,m, \tag{5.1.3}$$

此式被称为加权余量法的基本公式. 满足该式的 $u^{(n)}(\boldsymbol{r})$就称做所求问题的加权余量近似解.

式(5.1.3)又可分为两种情况，若所选取的近似解已经满足了边界条件，只是不能精确地满足控制方程，即有 $R_b(\boldsymbol{r}_b)=0$，这时方程(5.1.3)为

$$\langle R_e, w_\mu\rangle_\Omega = 0,$$

也就是

$$\langle Au^{(n)}(\boldsymbol{r}), w_\mu(\boldsymbol{r})\rangle = \langle f(\boldsymbol{r}), w_\mu(\boldsymbol{r})\rangle, \quad \mu = 1,2,\cdots,m. \tag{5.1.4}$$

这是一种内域积分形式的加权余量法，或广义地被称为矩量法.

如果所选取的近似解已能精确地满足控制方程，只剩下余量 $R_b(\boldsymbol{r}_b)\neq 0$，由此得到的是边界积分形式的加权余量法. 下面仅较详细地讨论矩量法. 由于积分方程没有单独的边界条件问题，所以矩量法也适用于积分算子方程的近似求解.

5.1.2 内域积分形式的加权余量法——矩量法

如上所述，内域积分的加权余量法所选的近似解必须已满足边界条件，做到这一点并不总是容易的. 但是，对于积分方程而言，没有单独的边界条件，因此运用矩量法求解更加容易. 也正因为这一点，在电磁场的计算中矩量法主要用于求解积分方程.

为了表示近似解，需要在算子 A 的定义域 Ω 中选取 n 个线性无关的函数以构成序列(φ_ν)，作为未知函数近似解展开的基函数，未知函数即可表示成

$$u^{(n)}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(\boldsymbol{r}). \tag{5.1.5}$$

如果 A 是微分算子，就假定 $u^{(n)}(\boldsymbol{r})$已经满足了所需的边界条件. 这时内域积分的加权余量公式(5.1.4)就成为

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \langle A\varphi_\nu, w_\mu\rangle_\Omega = \langle f, w_\mu\rangle_\Omega, \\ \mu = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.1.6}$$

对于特征值问题，相应的方程具有如下形式

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu [\langle A\varphi_\nu, w_\mu\rangle_\Omega - \lambda^{(n)} \langle \varphi_\nu, w_\mu\rangle_\Omega] = 0, \\ \mu = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.1.7}$$

用以上方法构成的方程组(5.1.6)和(5.1.7)都是以 c_ν 为未知量的代数方

程组，可以进行数值求解．所以，矩量法是把微分或积分算子方程化作代数方程进行求解的一种近似方法．

权函数序列(w_μ)可以有各种不同的选取方式，由此又可将矩量法分为几种不同的类型，最常用的有以下三种：

1．伽辽金(Galerkin)法

在内域积分形式的加权余量法中，如果选取的权函数序列(w_μ)与基函数序列(φ_ν)相同，即

$$(w_\mu)=(\varphi_\mu),\quad \mu=1,2,\cdots,n,$$

则称之为伽辽金法．在这种情况下，式(5.1.6)与(5.1.7)为

$$\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\langle A\varphi_\nu,\varphi_\mu\rangle_\Omega=\langle f,\varphi_\mu\rangle_\Omega,\\ \mu=1,2,\cdots,n,\end{cases}\tag{5.1.8}$$

$$\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu[\langle A\varphi_\nu,\varphi_\mu\rangle_\Omega-\lambda^{(n)}\langle\varphi_\nu,\varphi_\mu\rangle_\Omega]=0,\\ \mu=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{5.1.9}$$

这一方法具有较高的精度，但要进行大量的积分计算．

2．点配法

只要求在一些离散点上使方程得到满足的方法称为点配法，这种情形相当于选择δ函数作为权函数序列，即

$$w_\mu(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mu),\quad \mu=1,2,\cdots,n.$$

根据δ函数的性质，相应的确定性问题和特征值问题的加权余量近似解可表示为

$$\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu A\varphi_\nu(\boldsymbol{r}_\mu)=f(\boldsymbol{r}_\mu),\\ \mu=1,2,\cdots,n,\end{cases}\tag{5.1.10}$$

$$\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu[A\varphi_\nu(\boldsymbol{r}_\mu)-\lambda^{(n)}\varphi_\nu(\boldsymbol{r}_\mu)]=0,\\ \mu=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{5.1.11}$$

显然，在现在的情况下，余量$R_e(\boldsymbol{r})$已不是在全域加权平均意义下等于零，而只是在n个离散点上等于零．这样，所求的近似解$u^{(n)}(\boldsymbol{r})$也只是在n个离散点上才满足方程，误差的大小与n数的大小直接相关．这种方法的优点是免去了繁杂的内积计算，缺点则是精度较差．

3．子域法

如果把解域分成一定的子域，只要求在每个子域内余量的算术平均值等于

零，即相当于取权函数为

$$\begin{cases} w_\mu(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r} \in \Delta\Omega\mu, \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin \Delta\Omega\mu, \end{cases} \\ \mu = 1,2,\cdots,n, \quad \sum_{\mu=1}^{n} \Delta\Omega\mu = \Omega. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

在这种情况下，式(5.1.6)和(5.1.7)成为

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int_{\Delta\Omega_\mu} A\varphi_\nu \mathrm{d}\Omega = \int_{\Delta\Omega_\mu} f \mathrm{d}\Omega, \\ \mu = 1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{5.1.13}$$

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \left[\int_{\Delta\Omega_\mu} A\varphi_\nu \mathrm{d}\Omega - \lambda^{(n)} \int_{\Delta\Omega_\mu} \varphi_\nu \mathrm{d}\Omega \right] = 0, \\ \mu = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \tag{5.1.14}$$

这种子域法的优点在于使内积的积分域缩小为子域，且权函数在子域中恒等于1，使积分过程得以简化. 但是，由于只要求在每个子域中余量的算术平均值等于零，使得它未必比点配法更优越.

以上仅是矩量法的基本形式，根据不同的问题和不同的需要可选取各种类型的基函数和权函数，这也正是矩量法在求解电磁场问题时其作用发挥得丰富多彩的重要原因.

5.1.3 有限元法的基本原理

有限元法也是加权余量法思想的一种发展，其原理之一就是以加权余量法为出发点，只有基函数的构造有其独特之处.

有限元法的特色之一是把解域划分为有限个基本单元，然后在每个单元内构造其未知函数展开的基函数. 以二维平面解域为例，其基本单元常常选为三角形，因为它比较容易逼近复杂形状的任意边界.

现在考虑任意一个三角单元，其3个顶点的坐标分别为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).$$

三个顶点1,2,3的排列按逆时针顺序，以保证用下式表示的三角形的面积Δ是正的，且

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{5.1.15}$$

若未知函数$u(x,y)$在3个顶点的值分别记做u_1, u_2和u_3，而其内部任一点的值用线性插值函数

$$u(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \tag{5.1.16}$$

表示，则有

$$\begin{cases} u_1 = \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 y_1, \\ u_2 = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 y_2, \\ u_3 = \beta_1 + \beta_2 x_3 + \beta_3 y_3. \end{cases} \tag{5.1.17}$$

由此可解得

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{1}{2\Delta}(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3), \\ \beta_2 = \dfrac{1}{2\Delta}(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3), \\ \beta_3 = \dfrac{1}{2\Delta}(c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3), \end{cases} \tag{5.1.18}$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = y_2 - y_3, \\ b_2 = y_3 - y_1, \\ b_3 = y_1 - y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = x_3 - x_2, \\ c_2 = x_1 - x_3, \\ c_3 = x_2 - x_1. \end{cases} \tag{5.1.19}$$

把式(5.1.18)代入式(5.1.16)，即得到

$$u(x,y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \tag{5.1.20}$$

其中

$$\begin{cases} N_1(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta}(a_1 + b_1 x + c_1 y), \\ N_2(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta}(a_2 + b_2 x + c_2 y), \\ N_3(x,y) = \dfrac{1}{2\Delta}(a_3 + b_3 x + c_3 y). \end{cases} \tag{5.1.21}$$

我们称之为形函数，它们仅与单元顶点的坐标有关. 由式(5.1.20)可知，一个三角单元的形函数就是该单元内未知函数展开的基函数，其展开系数就是单元顶点未知函数的值.

这样一来，每个单元都有自身的基函数，其中的未知函数用该基函数进行展开. 对全域而言，总的基函数由各单元的基函数联合构成，全域的未知函数就由这个组合基函数展开，其系数就是单元各顶点上的未知函数值.

如果令

$$\boldsymbol{N} = (N_1, N_2, N_3),$$

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}},$$

则式(5.1.20)可以写做

$$u(x,y) = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}. \tag{5.1.22}$$

如果待解的是边值问题(5.1.1)，则每一个单元的 Δ 可由控制方程所产生的余量 R_Δ 表示为

$$R_\Delta = A(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}) - f. \tag{5.1.23}$$

如果选权函数为 w,则按加权余量法的要求,应该有

$$\langle R_\Delta, w\rangle = \iint_\Delta R_\Delta w \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta [A(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}) - f] w \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{5.1.24}$$

若采用伽辽金法,即可选 $w=N_m$,其中 m 可以是 1,2 和 3.给每个单元一个编号 l,当全域共分 n 个单元时,则对全域而言,有

$$\sum_{l=1}^{n}\iint_{\Delta_l}[A(\boldsymbol{N}^l\cdot\boldsymbol{u}^l) - f^l]N_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{5.1.25}$$

值得注意的是,这样表示的未知函数并没有自动地满足边界条件,但落在边界上的单元顶点的未知函数按边界条件是已知的,可把这些条件直接加到方程中去,最后导出未知量所满足的代数方程.

有限元法的另一个出发点是变分原理,先把要求解的微分方程的边值问题化作等价的泛函的极值问题,而由后者导出所需求解的代数方程.

假定所需求解的算子方程为

$$Au(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}\in\Omega. \tag{5.1.26}$$

若 A 为自伴的正算子,则方程(5.1.26)与泛函

$$J[u] = \langle Au, u\rangle - \langle u, f\rangle - \langle f, u\rangle \tag{5.1.27}$$

的极小值问题等价.对于实函数,上式成为

$$J[u] = \langle Au, u\rangle - 2\langle u, f\rangle. \tag{5.1.28}$$

由变分理论可知,泛函 $J[u]$取极值的必要条件为

$$\delta J[u] = 0. \tag{5.1.29}$$

基于变分原理的有限元法,就可由此方程出发构造有限元方程.

和前面一样,也是先把解域 Ω 划分为 n 个基本单元,然后构建单元的形函数,用以作为未知函数展开的基函数.若以二维问题为例,就像上面所做的那样.在求得了式(5.1.28)之后,可求得任一单元 Δ_l 的泛函表达式

$$J_{\Delta_l}[u] = \iint_{\Delta_l} u^l A u^l \mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2\iint_{\Delta_l} u^l f^l \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.1.30}$$

其中 l 为单元编号.于是,全域的泛函式即为

$$J[u] = \sum_{l=1}^{n} J_{\Delta_l}[u^l], \tag{5.1.31}$$

而泛函取极值可通过改变单元顶点上未知函数的值来实现,于是待求的函数满足

$$\frac{\partial J[u]}{\partial u_r} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial J_{\Delta_l}[u^l]}{\partial u_r} = 0, \quad r = 1,2,\cdots,n, \tag{5.1.32}$$

其中 r 为未知量 u 的编号. 由此可建立起以单元顶点函数值为未知量的代数方程，称为有限元方程.

有限元法的这一种原理的前提是必须先求得原问题的等效变分问题，而这一点并不是对所有的问题都能做到的，故有一定的局限性. 相比较而言，建立在加权余量法基础上的有限元法却没有这一限制.

§5.2　频域积分方程及其矩量解法

在求解电磁场问题的频域数值方法中，用矩量法求解电磁场积分方程是发展最完善，用途最广泛的方法之一. 积分方程法最主要的优点是对有些问题的解域维度可以降低，从而可大大减少未知量的个数. 由于这种方法在很多计算电磁学的书籍中都有详细论述，同时也考虑到后续章节的需要，这里只作简要说明.

5.2.1　表面积分方程

考虑分区均匀媒质中的电磁场，以 S 为边界的区域 V 内为一种均匀媒质，其外部为另一种均匀媒质. 设 S 面外的媒质特性由 ε 和 μ 描述，区域 V 内分布有电流源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$，将 S 外的无限大曲面用 S_{inf} 表示.

对于频域电磁场，我们的出发点是方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}), \tag{5.2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}). \tag{5.2.2}$$

为了简便，在本章讨论频域方法时，我们不再特别标出频域量，而采用时域中同样的符号. 只要记住这项声明，就不会产生混乱.

由式(5.2.1)和(5.2.2)容易导出 S 面外部电场所满足的方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}), \tag{5.2.3}$$

利用满足下列方程的格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$，即

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') - k^2 G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \tag{5.2.4}$$

和矢量格林定理可以得到

$$\begin{aligned}&\int_V \left[\mathrm{i}\omega\mu G\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') + \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}\nabla' G\right]\mathrm{d}V' \\ &\quad - \int_{S+S_{\text{inf}}} [-\mathrm{i}\omega\mu G\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\nabla' G]\mathrm{d}S' \\ &\quad = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'), \boldsymbol{r}' \in V.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

用类似的方法，还可以得到

$$\int_V [\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G] \mathrm{d}V' +$$
$$\int_{S+S_{\inf}} [-\mathrm{i}\omega\varepsilon G \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') \nabla' G] \mathrm{d}S'$$
$$= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}'), \boldsymbol{r}' \in V, \tag{5.2.6}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 面的法向单位矢量.

对于电磁散射问题,S 面所包围的为散射体,在有限距离内没有源存在,只考虑来自无穷远的入射波.在这种情况下,式(5.2.5)和(5.2.6)中的体积分均为零,而在 $S_{\inf}$ 上的面积分就是入射波.若用 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 和 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}$ 表示入射波的电场和磁场,则有

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \int_S [\mathrm{i}\omega\mu G \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') \nabla' G] \mathrm{d}S'$$
$$= \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r} \in V, \tag{5.2.7}$$
$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \int_S [-\mathrm{i}\omega\varepsilon G \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}') \nabla' G] \mathrm{d}S'$$
$$= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r} \in V. \tag{5.2.8}$$

通过以上方程,把空间的场通过对 S 面上场的积分表达出来,但是 S 面上的场还是未知的,故这种表示还只是形式上的.

为了导出 S 面上的场所满足的表面积分方程,需要将观察点 $\boldsymbol{r}$ 移到 S 面上.由于 G 的奇异性,这可能导致面积分的发散.当处理了这种奇异性后,便可得到[7]

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) - \text{P. V.} \int_S \left[-\mathrm{i}\omega\mu G \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G - \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon} \nabla' \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \nabla' G\right] \mathrm{d}S'$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S, \tag{5.2.9}$$
$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \text{P. V.} \int_S \left[\mathrm{i}\omega\varepsilon G \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G + \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu} \nabla' \cdot \boldsymbol{M}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \nabla' G\right] \mathrm{d}S'$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S, \tag{5.2.10}$$

其中 P. V. 表示主值积分. $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}$,为 S 面上的等效面电流; $\boldsymbol{M}_{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}$,为 S 面上的等效面磁流.

如果散射体为理想导体,则在 S 上电场需满足边界条件 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = 0$,于是得到

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \times \text{P. V.} \int_S \left[\mathrm{i}\omega\mu \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') + \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon} \nabla' \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \nabla' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\right] \mathrm{d}S' = 0, \quad \boldsymbol{r} \in S, \tag{5.2.11}$$
$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n} \times \text{P. V.} \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \times \nabla' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S. \tag{5.2.12}$$

在这些方程中，只有 $\boldsymbol{J}_s$ 为未知量，故这些方程成为 $\boldsymbol{J}_s$ 的积分方程.

5.2.2 辅助函数表示的积分方程

借助于矢量势函数建立电磁场的积分方程是另一种常用的方法，下面用此方法讨论前面的电磁散射问题，并仍用上面约定的符号. 若用 $\boldsymbol{E}^s$ 和 $\boldsymbol{H}^s$ 表示在入射场 $\boldsymbol{E}^i$ 和 $\boldsymbol{H}^i$ 的作用下散射体在无界空间中产生的散射场，则空间中的总场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{r}), \tag{5.2.13}$$

而根据等效原理和 § 1.3 中的结果，散射场可表示为

$$\boldsymbol{A}^s = \mu\int_S \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{5.2.14}$$

$$\boldsymbol{A}_m^s = \varepsilon\int_S \boldsymbol{M}_s(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{5.2.15}$$

其中 $\boldsymbol{J}_s$ 和 $\boldsymbol{M}_s$ 为 S 面上的等效面电流和等效面磁流. 如果散射体为理想导体，则 $\boldsymbol{M}_s=0$，于是有

$$\boldsymbol{E}^s = \mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{A}^s + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^s\right), \tag{5.2.16}$$

$$\boldsymbol{H}^s = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}^s. \tag{5.2.17}$$

再利用式(5.2.13)，即可得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) + \mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{A}^s + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^s\right), \tag{5.2.18}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}^s. \tag{5.2.19}$$

再利用理想导体的边界条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=0$，可由式(5.2.18)得到

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{n}\times\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{A}^s + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}^s\right), \quad \boldsymbol{r}\in S. \tag{5.2.20}$$

由式(5.2.14)可知，该方程是关于 $\boldsymbol{J}_s$ 的积分方程. 利用条件 $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$，可由式(5.2.19)得到另一种关于 $\boldsymbol{J}_s$ 的积分方程

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}\in S. \tag{5.2.21}$$

对于无限长的理想导体柱，当入射波垂直于导体柱时，便成为二维电磁场问题. 若柱体沿 z 轴放置，而入射波电场只有 E_z 分量，则称为 TM_z 波. 这时导体柱上的等效面电流只有 z 向分量，且 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s=0$，相应的有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}^s=0$，于是这时的积分方程成为

$$E^i(\boldsymbol{\rho}) = -\mathrm{i}\omega A_z^s(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma,$$

或

$$E_z^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\omega\mu}{4}\int_\Gamma J_{sz}(\boldsymbol{\rho}) H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\Gamma', \tag{5.2.22}$$

其中 Γ 为导体柱横截面的边界. 这里用到了二维空间的格林函数

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|).$$

如果入射波为 TE_z,即入射波磁场只有 z 分量,则等效面电流只有横向分量 J_{st},且 $J_{st}=-H_z$. 于是由式(5.2.21)得到

$$H_z^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{\rho}) = -J_{st}(\boldsymbol{\rho}) - \left[\frac{1}{\mu}\hat{z}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\rho})\right], \quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma, \tag{5.2.23}$$

其中

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mathrm{i}\mu}{4}\int_\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{\rho}') J_{st}(\boldsymbol{\rho}') H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)\mathrm{d}\Gamma'. \tag{5.2.24}$$

5.2.3 矩量法求解积分方程

如上所述,用矩量法求解积分方程是计算电磁学中的一种流行做法. 下面仅以理想导体的电磁散射问题为例,说明这种方法的一些特点. 作为导体散射问题,直接求解的是表面电流,首先要考虑表示电流的基函数.

有一类被称为屋顶函数的矢量基函数,它不仅能保持单元交界处切向或法向的连续性,而且为设置未知场或电流的边界条件提供了方便. 为了将散射体的表面离散化,可采用三角形面元或矩形面元,并定义相应的屋顶函数.

三角形面元最有利于对任意曲面的精确模拟,因而得到了最广泛的应用. 针对三角形面元,S. M. Rao 等人提出一种屋顶函数,后来被称为 RWG 矢量基函数(全称为 Rao-Wilton-Glisson 矢量基函数).

Rao 等人用三角形面元逼近任意形状的导体表面 S,并将有公共边的三角形面元用公共边进行编号. 图 5-1 给出任意一对三角形面元 T_n^+ 和 T_n^-($n=1$,

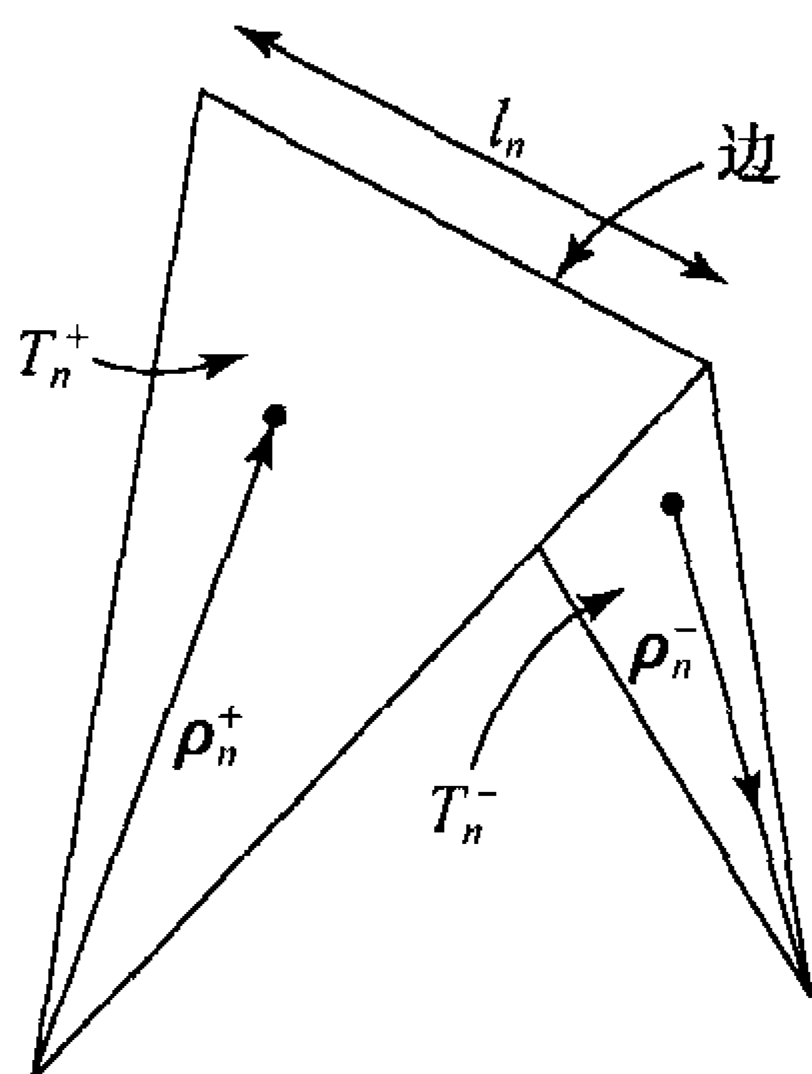


图 5-1 一对三角形面元的模型

2,…),其公共边及其长度用 l_n 表示,面积分别用 A_n^+ 和 A_n^- 表示. 为了方便,定义两类位矢来表示面元上各点的位置: $\boldsymbol{\rho}_n^+$ 和 $\boldsymbol{\rho}_n^-$ 分别定义为由 T_n^+ 的自由顶点指向面元的内点和由 T_n^- 的内点指向其自由顶点, $\boldsymbol{r}_n^+$ 和 $\boldsymbol{r}_n^-$ 分别定义为由坐标原点 O 指向 T_n^+ 和 T_n^- 的内点. T_n^+ 和 T_n^- 中心点的位置矢量分别用 $\boldsymbol{\rho}_n^{c+}$ 和 $\boldsymbol{\rho}_n^{c-}$ 以及 $\boldsymbol{r}_n^{c+}$ 和 $\boldsymbol{r}_n^{c-}$ 表示. 与 l_n 相联系的 RWG 矢量基函数可定义为

$$\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{l_n}{2A_n^+}\boldsymbol{\rho}_n^+, & \boldsymbol{r} \in T_n^+, \\ \dfrac{l_n}{2A_n^-}\boldsymbol{\rho}_n^-, & \boldsymbol{r} \in T_n^-, \quad n = 1,2,\cdots, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \tag{5.2.25}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为由原点 O 到任一点的位置矢量. 待求的表面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 可近似表示为

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N} j_n \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}), \tag{5.2.26}$$

其中 j_n 是未知电流展开系数, N 为除边界棱边(只与某个面元相关的棱边)外所包含的面元的边数. 显然,当用 RWG 矢量基函数展开表面电流时,电流方向就与式(5.2.25)中 $\boldsymbol{\rho}_n^+$ 和 $\boldsymbol{\rho}_n^-$ 的方向相一致. 定义与 l_n 相关的电流以由 T_n^+ 流向 T_n^- 为正方向,则电流展开基函数具有以下几个特点:

(1) 由三角形面积的计算公式可知, $2A_n^\pm/l_n$ 等于从 $T_n^\pm$ 的自由顶点到 l_n 的垂直距离. 由式(5.2.25)可推知,如果 $\boldsymbol{r}$ 表示 $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$ 对 l_n 的正交交点,则必有 $|\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r})| = 1$. $T_n^\pm$ 上的电流取向与 $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$ 一致,说明 $T_n^\pm$ 上对 l_n 正交的电流为常数,在跨越 l_n 时具有连续性. 这也说明在 l_n 上没有线电荷的积累,从而保证不会由此引起计算误差. 此外,由于代表电流方向的 $\boldsymbol{\rho}_n^\pm$ 不可能在除公共边 l_n 之外的 $T_n^\pm$ 的其他边上有正交分量,所以在其他这些边上没有垂直于 $T_n^\pm$ 边界的电流分量,故也没有线电荷积累.

(2) 求 $\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r})$ 的面散度,可得

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \nabla_s \cdot \left(\dfrac{l_n}{2A_n^+}\boldsymbol{\rho}_n^+\right) = \dfrac{l_n}{2A_n^+}\nabla_s \cdot \boldsymbol{\rho}_n^+ = \dfrac{l_n}{A_n^+}, & \boldsymbol{r} \in T_n^+, \\ \nabla_s \cdot \left(\dfrac{l_n}{2A_n^-}\boldsymbol{\rho}_n^-\right) = \dfrac{l_n}{2A_n^-}\nabla_s \cdot \boldsymbol{\rho}_n^- = -\dfrac{l_n}{A_n^-}, & \boldsymbol{r} \in T_n^-, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{5.2.27}$$

其中 $\nabla_s \cdot$ 表示求面散度. 上式的计算中用到了 $\nabla_s \cdot \boldsymbol{\rho}_n^+ = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{\rho}_n^- = 2$. 这表明 $\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r})$ 的面散度在每个面元上均为常数. 由于在连续性方程中 $\nabla_s \cdot \boldsymbol{J}_n/\mathrm{i}\omega$ 代表电荷密度,所以 T_n^+ 和 T_n^- 上的电荷密度为常数,电荷总量分别为

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla_s \cdot \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}_n^+)A_n^+ = \frac{l_n}{\mathrm{i}\omega}, \quad \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla_s \cdot \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}_n^-)A_n^- = -\frac{l_n}{\mathrm{i}\omega}, \tag{5.2.28}$$

该式说明 T_n^+ 和 T_n^- 上所带的电荷等量、异号，总电荷为零. 也就是说，基函数具有偶极子的形式.

(3) $\boldsymbol{f}_n$ 的电矩为 $(A_n^+ + A_n^-)\boldsymbol{f}_{\text{ave}}$，可表示为

$$(A_n^+ + A_n^-)\boldsymbol{f}_{\text{ave}} = \int_{T_n^+ + T_n^-} \boldsymbol{f}_n \mathrm{d}S$$

$$= \frac{l_n}{2}(\boldsymbol{\rho}_n^{c+} + \boldsymbol{\rho}_n^{c-}) = l_n(\boldsymbol{r}_n^{c+} + \boldsymbol{r}_n^{c-}). \tag{5.2.29}$$

这说明面元对的电矩可用相应的几何参数表示.

电场积分方程(5.2.20)对闭合的和开放的理想导体都适用. 为了求解任意形状导体的散射问题，本小节将推导理想导体散射问题的电场积分方程. 将方程(5.2.20)改写为另一种形式，即

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{n} \times (-\mathrm{i}\omega \boldsymbol{A} + \nabla\varphi), \quad \boldsymbol{r} \in S, \tag{5.2.30}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 分别为矢量势函数和标量势函数. 对三维散射问题，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S', \tag{5.2.31}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \sigma_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}') \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'. \tag{5.2.32}$$

等效面电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 和面电荷 σ_{s} 满足方程

$$\nabla_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \mathrm{i}\omega\sigma_{\mathrm{s}}. \tag{5.2.33}$$

将式(5.2.26)代入方程(5.2.30)，为了确定 $j_n(n=1,2,\cdots,N)$，用 N 个权函数对方程(5.2.30)进行加权平均. 若采用伽辽金法，则权函数就用 RWG 矢量基函数，于是有

$$\langle \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{f}_m \rangle = -\mathrm{i}\omega\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{f}_m \rangle + \langle \nabla\varphi, \boldsymbol{f}_m \rangle, \quad m = 1,2,\cdots,N, \tag{5.2.34}$$

其中矢量内积定义为

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}^* \mathrm{d}S. \tag{5.2.35}$$

对任意面元对，由矢量基函数在面元上的性质可知

$$\langle \nabla\varphi, \boldsymbol{f}_m \rangle = -\int_{\Delta_m} \varphi \nabla_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{f}_m \mathrm{d}S, \tag{5.2.36}$$

其中 Δ_m 表示面元对 $T_m^{\pm}$. 考虑到式(5.2.36)，可得

$$\int_{\Delta_m} \varphi \nabla_{\mathrm{s}} \cdot \boldsymbol{f}_m \mathrm{d}S = \int_{T_m^+} \varphi \frac{l_m}{A_m^+}\mathrm{d}S + \int_{T_m^-} \varphi \left(-\frac{l_m}{A_m^-}\right)\mathrm{d}S$$

$$\approx l_m[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{c+}) - \varphi(\boldsymbol{r}_m^{c-})]. \tag{5.2.37}$$

类似地，$\langle \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}, \boldsymbol{f}_m \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{f}_m \rangle$ 也可近似地分别表示为

$$\left\langle \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{A} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{f}_m \right\rangle = \frac{l_m}{2}\left[\frac{1}{A_m^+}\int_{T_m^+} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{\rho}_m^+ \mathrm{d}S + \frac{1}{A_m^-}\int_{T_m^-} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{Bmatrix} \cdot \boldsymbol{\rho}_m^- \mathrm{d}S\right]$$

$$\approx \frac{l_m}{2}\left[\begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\end{Bmatrix}\cdot \boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+} + \begin{Bmatrix}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\end{Bmatrix}\cdot \boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}\right]. \tag{5.2.38}$$

将以上两式代入方程(5.2.34)，即有

$$-\mathrm{i}\omega l_m\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right]+l_m[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})-\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})]$$
$$=l_m\left[\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right],\quad m=1,2,\cdots,N, \tag{5.2.39}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm})=\frac{\mu}{4\pi}\int_S\sum_{n=1}^{N}j_n\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{j_n\mu}{4\pi}\int_{\Delta_n}\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S', \tag{5.2.40}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla_s'\cdot\boldsymbol{J}_s\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{i}j_n}{4\pi\omega\varepsilon}\int_{\Delta_n}\nabla_s'\cdot\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S', \tag{5.2.41}$$

于是，方程(5.2.39)又可写为

$$\sum_{n=1}^{N}l_m j_n\left[-\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{A}_{mn}^{+}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{A}_{mn}^{-}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right)+(\varphi_{mn}^{\mathrm{c}-}-\varphi_{mn}^{\mathrm{c}+})\right]$$
$$=l_m\left[\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right],\quad m=1,2,\cdots,N, \tag{5.2.42}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{mn}^{\pm}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Delta_n}\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}}\mathrm{d}S',$$

$$\varphi_{mn}^{\pm}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi\omega\varepsilon}\int_{\Delta_n}\nabla_s'\cdot\boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}}\mathrm{d}S',\quad R_m^{\pm}=|\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm}-\boldsymbol{r}'|.$$

将方程(5.2.42)写成矩阵形式，则有

$$[z_{mn}][j_n]=[v_m],\quad m,n=1,2,\cdots,N, \tag{5.2.43}$$

其中

$$z_{mn}=l_m\left[-\mathrm{i}\omega\left(\boldsymbol{A}_{mn}^{+}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{A}_{mn}^{-}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right)+(\varphi_{mn}^{\mathrm{c}-}-\varphi_{mn}^{\mathrm{c}+})\right],$$

$$v_m=l_m\left[\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}}{2}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}}{2}\right].$$

求解方程(5.2.43)可得到 $j_n(n=1,2,\cdots,N)$，再将其代入式(5.2.26)，即可求得

表面电流分布 $\boldsymbol{J}_s$.

用矩量法求解散射问题的积分方程时，一般都能得到比较精确的数值解，但有时也会出现例外. 例如，如果散射体是半径为 a 的圆柱体，当 TM 波的入射频率满足条件 $ka=2.405$ 时，计算结果将出现严重的误差. 即使划分更精细的单元，也得不到改善. 这类现象是由散射体的内谐振导致方程出现非唯一解造成的.

分析表明，很多电磁场问题，尤其是电磁场的散射和辐射问题，都可以用积分方程来描述. 这些方程以第一类和第二类弗雷德霍姆积分方程为主，积分核为自由空间的格林函数或其微商(或二者的混合体). 对这类积分方程解的存在性和唯一性的讨论是一个经典的课题. 对第一类弗雷德霍姆积分方程的讨论更困难. 在数学基础知识中，有关于退化核的第二类弗雷德霍姆积分方程的解存在唯一性的结论. 这一结论实际上也适用于一般的线性算子方程.

设有线性算子方程

$$Lf = g. \tag{5.2.44}$$

若相应的齐次方程

$$Lf = 0 \tag{5.2.45}$$

有一个非平凡解，则方程(5.2.44)的解就不是唯一的；反之，若方程(5.2.44)的解不是唯一的，则方程(5.2.45)就有一个非平凡解.

以上结论的证明很简单. 如果 f 满足方程(5.2.44)，设方程(5.2.45)有一个非平凡解 f_0，则有

$$Lf = g, \quad Lf_0 = 0.$$

将两式相加，并根据算子 L 的线性特性，可得

$$L(f + f_0) = g. \tag{5.2.46}$$

这说明 f 和 $f+f_0$ 都满足方程(5.2.44)，即方程的解不是唯一的. 反过来，若方程(5.2.44)的解不是唯一的，则至少存在两个解. 设其为 f 和 $f+f_0$，且 f_0 是非平凡的，于是方程(5.2.44)和(5.2.46)成立. 将两式相减，并利用 L 的线性特性，就可得到 $Lf_0=0$. 这说明齐次方程有非平凡解.

由于本章所导出的积分方程均为线性算子方程，故以上结论都适用. 如果在理想导体柱的 TM 波散射问题中与方程(5.2.22)对应的齐次方程

$$\int_\Gamma J_{sz}(u') H_0^{(1)}(kR)\mathrm{d}u' = 0 \tag{5.2.47}$$

有非平凡解，则方程(5.2.22)的解就是非唯一的. 实际上，上式正是将导体柱内的媒质参数换成 ε 和 μ 所形成的波导的 TM 模满足的方程. 对于适当的波数 k，该方程存在非平凡解，这时电磁场的形态表现为一种横向谐振. 在相应的频率下，方程(5.2.22)的散射解与横向谐振解叠加，就会引起严重的误差. 如果谐振

频率不只一个且比较密集，就会对散射问题的计算结果造成严重的影响．理论上，齐次方程的解构成算子的零空间，在物理上对应于谐振解．如果用矩量法求解对应的非齐次方程，所形成的矩阵可能是严重病态的，即使求得解，也可能包含很大误差．以上分析对三维散射问题也是适用的．

如果散射体是可穿透的，虽然散射问题的积分方程所对应的齐次形式也存在非零的零空间，但这些非零解在物理上对应于开放式谐振腔的谐振模．这类谐振腔由波数 k 不同的两个区域组成，类似于介质谐振腔．由于存在谐振阻尼，开放式谐振腔的谐振频率 ω 为复数．对于 ω 总是实数的时谐波而言，上述齐次方程就不存在非零解了，相应地，散射问题的积分方程中也就不存在谐振问题了．

在克服谐振问题的方法中，最主要的是混合积分方程法和扩展边界条件法等．

5.2.4　快速算法的发展[7]

作为基本的经典方法之一，积分方程矩量法求解的最大特点是所导出的线性代数方程组的系数矩阵为满阵．高斯消元法求解这类矩阵方程所需的存储量与 $O(N^2)$ 成正比（N 为未知量的个数），所需的计算时间则与 $O(N^3)$ 成正比，这样的计算复杂度限制了矩量法的应用范围．为了将矩量法运用于未知量数目更多的问题（如电大目标的散射计算），需要对其加以改进．在 20 世纪 90 年代，已出现了使计算效率大大提高的几种方法．

矩量法求解积分方程的计算复杂度与所建立的矩阵方程的性质及其求解方法有关．当采用迭代法时，与直接求解相比，所需的存储空间和计算时间有可能减少．虽然迭代法所需的存储空间仍与 $O(N^2)$ 成正比，但每次迭代的计算时间只与 $O(N^2)$ 成正比．如果迭代次数为 i，则总的计算时间将与 $O(iN^2)$ 成正比．若迭代次数较少，就可能优于直接求解．目前发展的一些专门技巧已将所需的存储空间和每次迭代的计算时间大大减少，因此称之为快速算法．

1. 快速傅里叶变换法与共轭梯度法

仔细观察可以发现，在这类积分方程中都包含卷积核．如果这些积分是在均匀网格中离散的，则在进行矩阵和矢量乘积时可采用快速傅里叶变换（fast Fourier transform，简称 FFT），所需的计算量仅为 $O(N\log N)$，而不是直接解法中的 $O(N^2)$．该算法最早由 N. N. Bojarski 提出．若将快速傅里叶变换与共轭梯度（conjugate gradient，简称 CG）法联合用于求解矩阵方程，可进一步减小复杂度，称之为 CG-FFT 法．

快速傅里叶变换最严重的缺点是需要采用均匀网格（如矩形网格），在模拟任意形状的几何结构时会产生明显的误差．采用三角形单元可解决这个问题，但这时快速傅里叶变换不能直接用于加速矩阵和矢量的计算．为此，E. Bleszynski

等提出了一种自适应积分法，将三角形分域中的基函数映射到矩形网格上，但此方法仍然受到均匀网格的限制.

2. 快速多极子方法

与上述方法功能类似但不受网格限制的一种方法称为快速多极子方法，已在各种电磁场问题中得到了广泛的应用. 快速多极子方法由 V. Rokhlin 于 20 世纪 80 年代提出[13]，最初用于求解静态问题，90 年代开始用于电磁散射问题[14]. 这种算法的基本物理依据是：源对远区的作用可适当减少信息量，对计算精度不产生明显的影响，却可以使由矩量法所形成的满阵成为稀疏矩阵，从而适于迭代求解，大大降低计算复杂度. 传统的矩量法不加区别地处理各离散单元间的相互作用. 而快速多极子方法先将所有离散单元分为若干组，组内单元之间都是近区作用，再将所有组分为近区组集合和远区组集合，对近区组集合中单元之间的相互作用仍采用传统的矩量法进行计算，而对远区组集合内单元之间的作用则采用特殊的方法. 矩量法和快速多极子方法对单元间相互作用的处理分别如图 5-2 和图 5-3 所示.

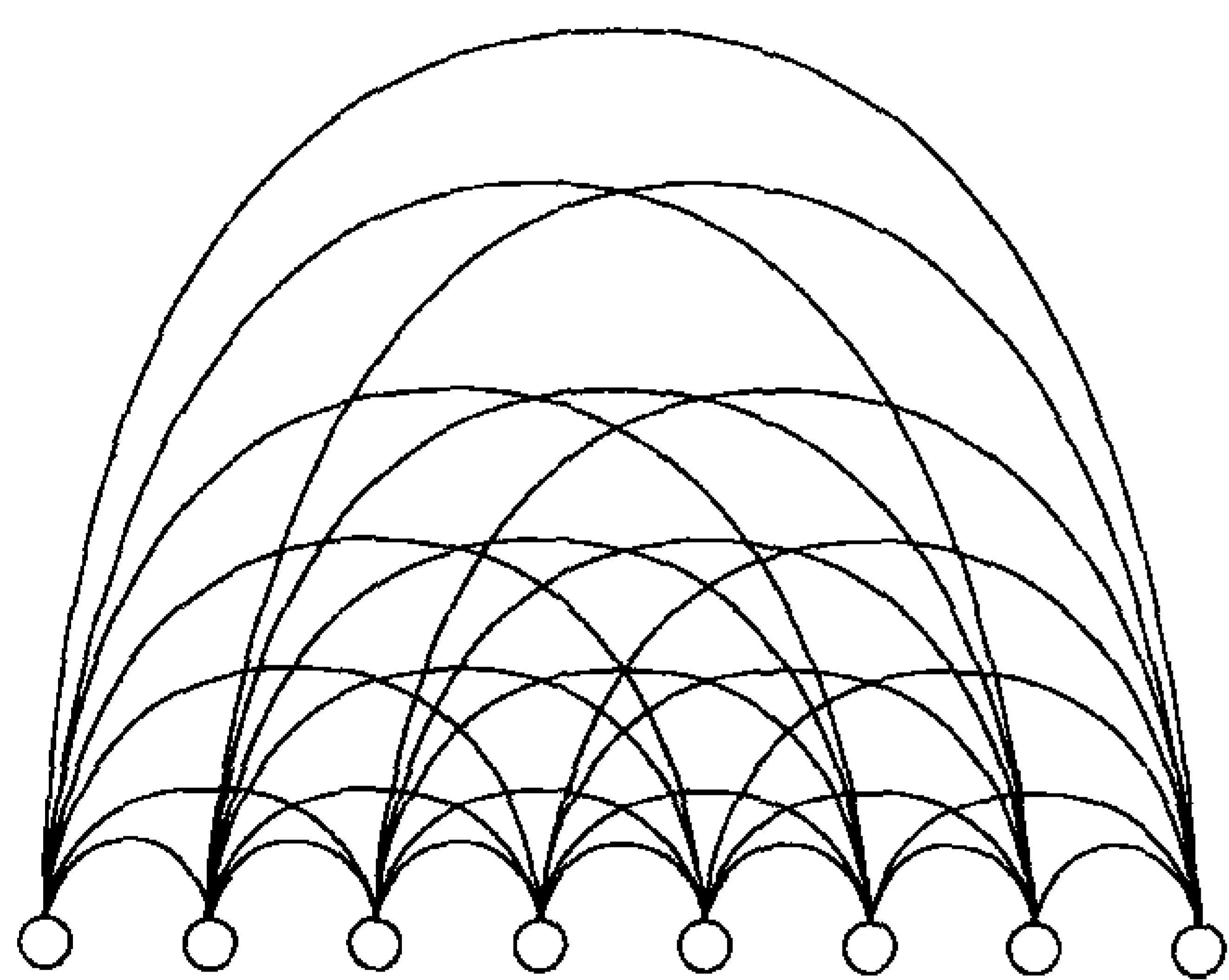


图 5-2　矩量法对单元间相互作用的处理

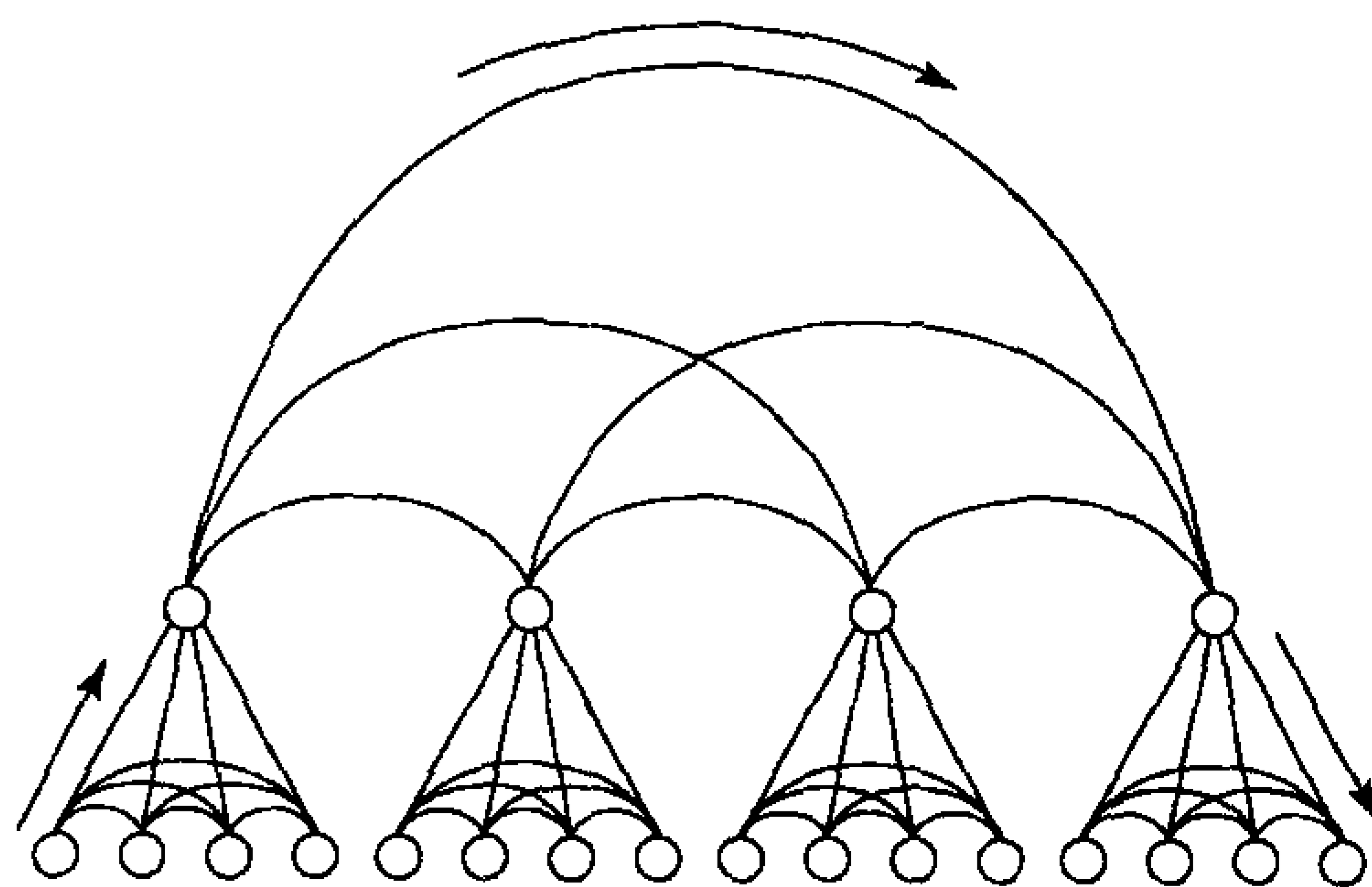


图 5-3　快速多极子方法对单元间相互作用的处理

图 5-2 说明矩量法考虑的是所有单元之间的相互作用. 图 5-3 说明快速多极子方法对远区组集合的处理分成 3 个过程：首先，统一求出各源点单元与所在组中心之间的作用，这一过程称为聚合；然后，求出源点所在组中心与观察点单元所在组中心之间的作用，这一过程称为转移；最后，统一求出观察点单元所在组的中心与各观察点单元之间的作用，这一过程称为解聚. 借助这种特殊的技术，可使存储空间和计算量由原来的 $O(N^2)$ 减少到 $O(N^{1.5})$，甚至可以达到 $O(N\log N)$.

经过大批科学家的不懈努力，快速多极子方法不断地有所发展，进一步提高了计算效率，逐渐接近预期的计算复杂度.

快速多极子方法发展的最突出的一个成果是多层快速多极子算法. 该算法

对所划分的单元在多个层级上进行分组，按照层间嵌套、逐层递推的原则实现快速多极子方法. 具体实施步骤是：先用一个足够大的立方体包围整个散射体，再将该立方体分为若干个子立方体，构成第一层级；每个子立方体再分为更小的立方体，构成第二层级；依此类推，形成多个层级. 最后一个层级的小立方体的边长不大于入射波的半个波长，以保证一定的计算精度. 在此基础上，先找出最细层级上经过事先编号的每个基函数所在的子立方体，并选出其中的非空子立方体，再在各个层级上将非空子立方体用树形结构标记. 类似于传统的快速多极子方法，在最细层级上，邻近组单元间的相互作用仍然用矩量法进行计算，只对非邻近组单元采用快速多极子方法，从最细层级开始逐层向上聚合，直到第二层（因为在一般分法中第二层是区分邻近组和非邻近组的最粗层级），然后逐层向下配置，并在此过程中计算转移因子. 显然，这种多层算法适用于电大目标. 目标尺度越大，未知量的数目越多，越容易显现计算的高效率.

提高快速多极子方法计算效率的途径之一是减少每次迭代的计算量. 其中一种方法称为最陡下降快速多极子方法（steepest-descent fast-multipole method，简称 SDFMM），用该方法对三维格林函数的谱域积分作渐近近似，并表示成若干个二维格林函数的叠加. 另外一种方法称为射线传播快速多极子方法（ray-propagation fast-multipole method，简称 RPFMM），用射线传播法对快速多极子算法进行近似. 第三种称为远场近似快速多极子方法（far-field approximation in fast-multipole method，简称 FFAFMM），其主要特点是当远区组之间的距离足够大时，转换因子中的特殊函数可用相应的大宗量近似表示. 还有一种提高计算效率的途径是加快迭代的收敛速度，详细讨论可参考有关文献.

3. 小波基函数法

20 世纪 90 年代以来，在积分方程快速求解的研究中又开辟了一个新的方向——将正在快速发展的小波分析的研究成果用于积分方程的求解，并迅速地应用于电磁场问题. 虽然这方面的研究还很不成熟，但却蕴藏着巨大的潜力.

数学家最早发现用小波作为基函数求解积分方程可产生稀疏矩阵，从而使求解速度加快. 具有 Calderón-Zygmund 型核的积分方程可使计算量降至 $O(N\log N)$（N 为未知量的个数）. 虽然电磁场问题中的积分方程没有如此光滑的核，且往往是振荡型的，但将小波作为矩量法中的基函数却具有明显的加速效果. 这是因为小波具有平移和伸缩特性，能自动适应不同的尺度，以满足待求量分布的不同情况. 而且，小波函数在频域的局域性使其展开系数表现出非相关性. 将小波函数在不同分辨率下展开，可起到多重网格的作用.

小波正交基除了直接作为矩量法中的基函数和权函数可以使所得的矩阵稀疏化外，也可以构造矩阵，使其作用于矩量法中所得到的满阵也变为稀疏矩阵. 而且，这两者具有一定的等价关系.

前面提到将小波正交基用于积分方程的两种方法：一种是直接法，即将小波正交基直接用做矩量法求解积分方程时的基函数和权函数；另一种是间接法，即先用传统的矩量法求解积分方程，然后通过小波矩阵对矩量法所得到的矩阵方程进行变换. 两种方法的原理是等价的，效果也十分相近，都能使最后的矩阵成为稀疏的，从而使原问题的计算复杂度有所降低.

当积分核比较光滑时，这两种方法的应用可达到与快速多极子方法相当的水平. 但是，在实际的电磁场问题中，当积分核为格林函数时，积分核的振荡特性使得效果很不理想. 为了改善小波基函数在电磁场积分方程快速求解中的作用，必须选用更合适的小波基. 最近的研究趋势是选用小波包基函数来解决这一问题.

§5.3 频域微分方程和有限元法

麦克斯韦方程一般都以微分形式给出，所以通过微分方程描述电磁场问题是最直接的. 在频域求解微分方程，最重要的数值方法之一是有限元法. 有限元法的最大优点是单元划分灵活，从而能更精确地逼近各种复杂的几何结构.

5.3.1 电磁场问题的频域微分方程及其定解问题

电磁场是分布在空间中的物理量，一般情况下都是位矢和时间的函数. 电磁场的运动规律可由微分形式的麦克斯韦方程组描述，由其导出的电场或磁场单独满足的波动方程则是二阶偏微分方程. 由此可知，电磁场问题的基本数学模型是偏微分方程，所以求解微分方程是解决电磁场问题的一种基本方法，称为微分方程法.

频域微分方程可由频域麦克斯韦方程(1.1.24)和(1.1.25)导出. 在通常情况下，如果媒质为非均匀且各向异性的，则从方程(1.1.24)和(1.1.25)中分别消去磁场和电场，即可得到电场和磁场分别满足的微分方程

$$\nabla\times\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}^{-1}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\omega^2\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\tag{5.3.1}$$

$$\nabla\times\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{-1}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})-\omega^2\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}).\tag{5.3.2}$$

若媒质为各向同性的，且又是均匀的，方程将取式(1.2.11)～(1.2.16)的形式. 当用辅助函数表示电磁场时，可以得到矢量位和标量位所满足的频域微分方程，如式(1.3.15)和(1.3.16).

由数学物理方程理论可知，前面所提到的微分方程反映的是电磁场运动的一般规律. 若只得到其通解，则还包括待定的未知常数或未知函数，故称之为泛定方程. 为了求得待定问题的解，还要给出必要的定解条件，用以确定通解中的未知常数或未知函数. 由于微分形式的麦克斯韦方程组在媒质的不连续处是不

成立的，因此以上微分方程在媒质的不连续处不适用，这时电磁场所满足的关系需由其他的方法确定. 媒质的不连续部分称为边界，电磁场在边界上所满足的关系称为边界条件. 电磁场问题的解与求解区域的边界形状及其物理特性有直接关系，所以边界条件是决定微分方程解的重要条件之一（对于开域问题，还需包括辐射条件）.

泛定方程和定解条件构成了一个完整的电磁场的定解问题. 但是，并非每个定解问题都是可解的，还必须考虑其适定性问题，即解的存在性、唯一性和稳定性. 若其中任一特性不成立，定解问题就是不适定的. 一个定解问题是否适定，还取决于泛定方程和定解条件是否正确地描述了所要求解的物理问题. 一个物理问题往往是很复杂的，在建立数学模型时常需要作一定的简化假设. 如果处理不当，这些简化假设可能在物理或数学上不够合理. 电磁场问题中的泛定方程由麦克斯韦方程组直接导出，只要能正确地反映解域媒质的特性，一般不容易出现错误；而边界条件则不然，在确定边界条件时，不仅要正确地描述边界的物理特性，同时还要符合解的唯一性定理的要求. 边界条件既不能少也不能多，更不能相互矛盾. 在用数值方法求解定解问题时，如果问题描述不当，将导致数值解的明显误差或严重错误. 在以后讨论时，我们总是假设所给的定解问题是适定的.

5.3.2 电磁场问题的变分原理

当用有限元法求解微分方程时，只要已知与其等价的变分问题，即可用一套较完整且较成熟的方法由泛函方程导出有限元方程. 因此，用有限元法求解电磁场问题的关键是得到与其等价的变分问题，这正是变分原理所要解决的问题.

1. 齐次边界条件下矢量波动方程的变分原理

考虑在非均匀各向同性媒质中电场所满足的矢量波动方程

$$\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-\mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in V. \tag{5.3.3}$$

定义线性算子

$$L=\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times-\mu^{-1}k^2. \tag{5.3.4}$$

对均匀媒质算子 L 变为$\nabla\times\nabla\times-k^2$. 算子$\nabla\times\nabla\times$在齐次边界条件下是自伴的. 不难证明，当 k^2 为实函数时，算子$\nabla\times\nabla\times-k^2$ 也是自伴的.

对更普遍的情况，若算子由式(5.3.4)表示，且 μ 和 k^2 为实函数，则有

$$\langle L\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2\rangle=\int_V(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1-\mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{E}_2^*\,\mathrm{d}V.$$

利用矢量恒等式$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$，有

$$\boldsymbol{E}_2^*\cdot\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1=\nabla\times\boldsymbol{E}_1\cdot\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_2^*-\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2^*\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1.$$

由

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2^*\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}_1\mathrm{d}V=\oint_S\mu^{-1}\boldsymbol{E}_2^*\times\nabla\times\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

可知，只要 $\boldsymbol{E}$ 满足边界条件 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，上式等号右侧的面积分即等于零. 这时，有

$$\langle L\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2\rangle=\int_V\mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E}_1)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}_2^*)\mathrm{d}V-\int_V\mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*\,\mathrm{d}V. \tag{5.3.5}$$

不难看出，$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 在上式中是对称的. 也就是说，算子 L 满足

$$\langle L\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2\rangle=\langle\boldsymbol{E}_1,L\boldsymbol{E}_2\rangle.$$

这说明算子 L 是自伴的.

如果媒质不是无耗的（μ 和 k^2 是复函数），L 也就不再是自伴的，这就需要求得 L 的伴随算子 L_a，即

$$L_a=\nabla\times\mu^{*-1}\nabla\times-(\mu^*)^{-1}(k^*)^2. \tag{5.3.6}$$

若媒质是无耗的，在齐次边界条件下，与方程(5.3.3)等价的变分问题的泛函为

$$\begin{aligned}J[\boldsymbol{E}]&=\langle L\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}\rangle-\langle\boldsymbol{E},\mathrm{i}\omega\boldsymbol{J}\rangle-\langle\mathrm{i}\omega\boldsymbol{J},\boldsymbol{E}\rangle\\&=\int_V\boldsymbol{E}^*\cdot(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}-\mu^{-1}k^2\boldsymbol{E})\mathrm{d}V+\mathrm{i}\omega\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*-\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

利用第一矢量格林定理

$$\begin{aligned}&\int_V[\phi\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times(\phi\nabla)\times\boldsymbol{B}]\mathrm{d}V\\&=\oint_S\phi(\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

和齐次边界条件，可得

$$\begin{aligned}J[\boldsymbol{E}]=&\int_V(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}^*-\mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\mathrm{d}V\\&+\mathrm{i}\omega\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*-\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{J})\mathrm{d}V.\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

借助伴随算子的辅助方程，可构造与标量算子类似的非自伴矢量算子的泛函.

以上方法也可用于对磁场波动方程的研究.

2. 非齐次边界条件下的修正变分原理

在无耗媒质的标量波动方程和矢量波动方程中，只要边界条件是齐次的，所对应的算子就是自伴的，这时，很容易构造相应的变分问题. 如果边界条件是非齐次的，即使媒质是无耗的，算子仍然是非自伴的. 下面将给出一种修正方法，使得只要算子在齐次边界条件下是自伴的，在非齐次边界条件下也能方便地构造其变分问题，称为修正变分原理.

设有算子方程

$$L\varphi=f. \tag{5.3.8}$$

对于满足非齐次边界条件的 φ,算子 L 是非自伴的,但在齐次边界条件下却是自伴的.引入一个新的未知函数 φ'

$$\varphi' = \varphi - u, \tag{5.3.9}$$

其中 u 为满足给定非齐次边界条件的任意函数,φ' 即为满足齐次边界条件的函数.于是,对 φ' 而言,L 成为自伴算子.关于 φ' 的方程可写为

$$L\varphi' = f', \tag{5.3.10}$$

其中 $f' = f - Lu$. 与上式等价的变分问题的泛函为

$$J[\varphi'] = \langle L\varphi', \varphi' \rangle - \langle \varphi', f' \rangle - \langle f', \varphi' \rangle, \tag{5.3.11}$$

由此可得

$$J[\varphi] = \langle L(\varphi - u), \varphi - u \rangle - \langle \varphi - u, f - Lu \rangle - \langle f - Lu, \varphi - u \rangle.$$

在变分问题中,该泛函对 φ 取变分,故去掉与 φ 无关的项对结果没有影响.这样,上式可简化为

$$J[\varphi] = \langle L\varphi, \varphi \rangle - \langle L\varphi, u \rangle + \langle \varphi, Lu \rangle - \langle \varphi, f \rangle - \langle f, \varphi \rangle, \tag{5.3.12}$$

其中 u 在应用边界条件后消失.于是,使上式取驻值的 φ 就是满足方程(5.3.8)及给定的非齐次边界条件的解.

现在讨论波动方程(5.3.3)在非齐次边界条件下的变分原理,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{g}, & \text{在 } S_1 \text{ 上}, \\ \boldsymbol{n} \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{q}, & \text{在 } S_2 \text{ 上}, \end{cases} \tag{5.3.13}$$

其中 $S_1 + S_2 = S$,$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 为已知函数.在前一小节中已证明,当 μ 和 k^2 为实函数时,式(5.3.4)表示的算子在齐次边界条件下是自伴的.对非齐次边界条件,与方程(5.3.3)等价的变分问题中的泛函为

$$\begin{aligned} J[\boldsymbol{E}] = &\int_V \boldsymbol{E}^* \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} - \mu^{-1} k^2 \boldsymbol{E}) \mathrm{d}V \\ &- \int_V \boldsymbol{u}^* \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} - \mu^{-1} k^2 \boldsymbol{E}) \mathrm{d}V \\ &+ \int_V \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{u}^* - \mu^{-1} k^2 \boldsymbol{u}^*) \mathrm{d}V \\ &+ \int_V (\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{i}\omega \boldsymbol{J}^* - \mathrm{i}\omega \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}^*) \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

考虑到 $\boldsymbol{E}^* \cdot \nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} = \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}^* - \nabla \cdot \boldsymbol{E}^* \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}$ 以及与其类似的其他各项,运用高斯定理,就可得到

$$\begin{aligned} J[\boldsymbol{E}] = &\int_V \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}^* \mathrm{d}V - \int_V \mu^{-1} k^2 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \mathrm{d}V \\ &+ \mathrm{i}\omega \int_V (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}^* - \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}^*) \mathrm{d}V - \oint_S (\boldsymbol{E}^* \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} \\ &+ \boldsymbol{E} \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}^* \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

注意到 $\boldsymbol{E}^* \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^* \cdot \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{n} \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}$ 以及与

其类似的其他各项，将式(5.3.13)代入式(5.3.15)，并去掉与 $\boldsymbol{E}$ 无关的各项，可以得到

$$J[\boldsymbol{E}]=\int_V \mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}^*-k^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\mathrm{d}V$$
$$+\mathrm{i}\omega\int_V(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}^*-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}^*)\mathrm{d}V+\int_{S_2}\mu^{-1}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{q}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{q}^*)\mathrm{d}S. \tag{5.3.16}$$

3. 广义变分原理

由前面的讨论可以发现，电磁场算子的自伴性与媒质是否有耗有直接关系，只有无耗媒质才能使算子具有自伴性. 由于自伴算子的变分问题具有最简洁的形式，因此希望其类似的特性能得到更广泛的应用. 有耗媒质的特点是其电磁特性参数为复函数，而在希尔伯特空间的内积的定义中有对被积函数取复共轭的运算，这就导致有耗媒质中的电磁场算子是非自伴的. 如果将内积定义为

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_\Omega\varphi\psi\mathrm{d}\Omega, \tag{5.3.17}$$

对复算子的限制就消失了. 这样定义的内积只有作用于实函数时才与希尔伯特空间中的内积是一致的，所以通常称为对称积. 如果算子 L 满足以下对称积关系

$$\langle\varphi,L\psi\rangle=\langle\psi,L\varphi\rangle, \tag{5.3.18}$$

就称 L 是对称的. 这时，方程

$$L\varphi=f$$

的解使泛函

$$J[\varphi]=\langle L\varphi,\varphi\rangle-2\langle\varphi,f\rangle \tag{5.3.19}$$

取驻值，其中的〈 〉表示对称积.

为了证明这一结论，对 J 取一阶变分，得

$$\begin{aligned}\delta J[\varphi]&=\langle L\delta\varphi,\varphi\rangle+\langle L\varphi,\delta\varphi\rangle-2\langle\delta\varphi,f\rangle\\&=\langle L\delta\varphi,\varphi\rangle+\langle\varphi,L\delta\varphi\rangle-2\langle\delta\varphi,f\rangle.\end{aligned}$$

若 φ 满足式(5.3.19)，则有 $L\delta\varphi=\delta f$，于是有

$$\delta J[\varphi]=\langle\delta f,\varphi\rangle+\langle\varphi,\delta f\rangle-2\langle\delta\varphi,f\rangle=0,$$

即满足式(5.3.19)的 φ 使 $J[\varphi]$取驻值.

式(5.3.4)表示的矢量算子在齐次边界条件下对有耗媒质也是非自伴的，但很容易证明，按如下定义的矢量函数对称积

$$\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=\int_V\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V, \tag{5.3.20}$$

却是对称的. 于是，与方程(5.3.3)等价的变分问题中的泛函为

$$J[\boldsymbol{E}]=\int_V\mu^{-1}|\nabla\times\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}V-\int_V\mu^{-1}k^2|\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}V-2\mathrm{i}\omega\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V. \tag{5.3.21}$$

通常,按对称积导出等价变分问题的方法称为广义变分原理,与经典的变分原理有明显的区别.按希尔伯特空间中内积定义的经典变分原理所得到的泛函是实泛函,而按对称积定义的对称算子所得到的泛函对有耗媒质是复泛函.经典变分原理中的泛函往往对应一种物理量(如能量等),而广义变分原理中的泛函却缺乏这种对应性.这时,显然不能再讨论复数泛函的最小值、最大值等,而只能讨论其驻定性.

5.3.3 基于变分原理的有限元法

电磁场问题的变分原理是应用有限元法的基础.本节将有限元法直接用于解决几种典型的三维电磁场问题,但仅限于有界域的情况.

1. 区域剖分和插值函数的构造

设问题的解域为 V,其边界为 S.利用有限元法计算这类问题的第一步是将解域 V 剖分为有限个单元.在计算三维问题时,较多地采用四面体单元.用四面体单元对 V 进行剖分后,S 将被三角形单元所代替.用 e 表示四面体单元的编号,单元 e 的顶点称为节点,分别用 1,2,3,4 表示,如图 5-4 所示.设四面体单元的总数为 M,则 $e=1,2,\cdots,M$.

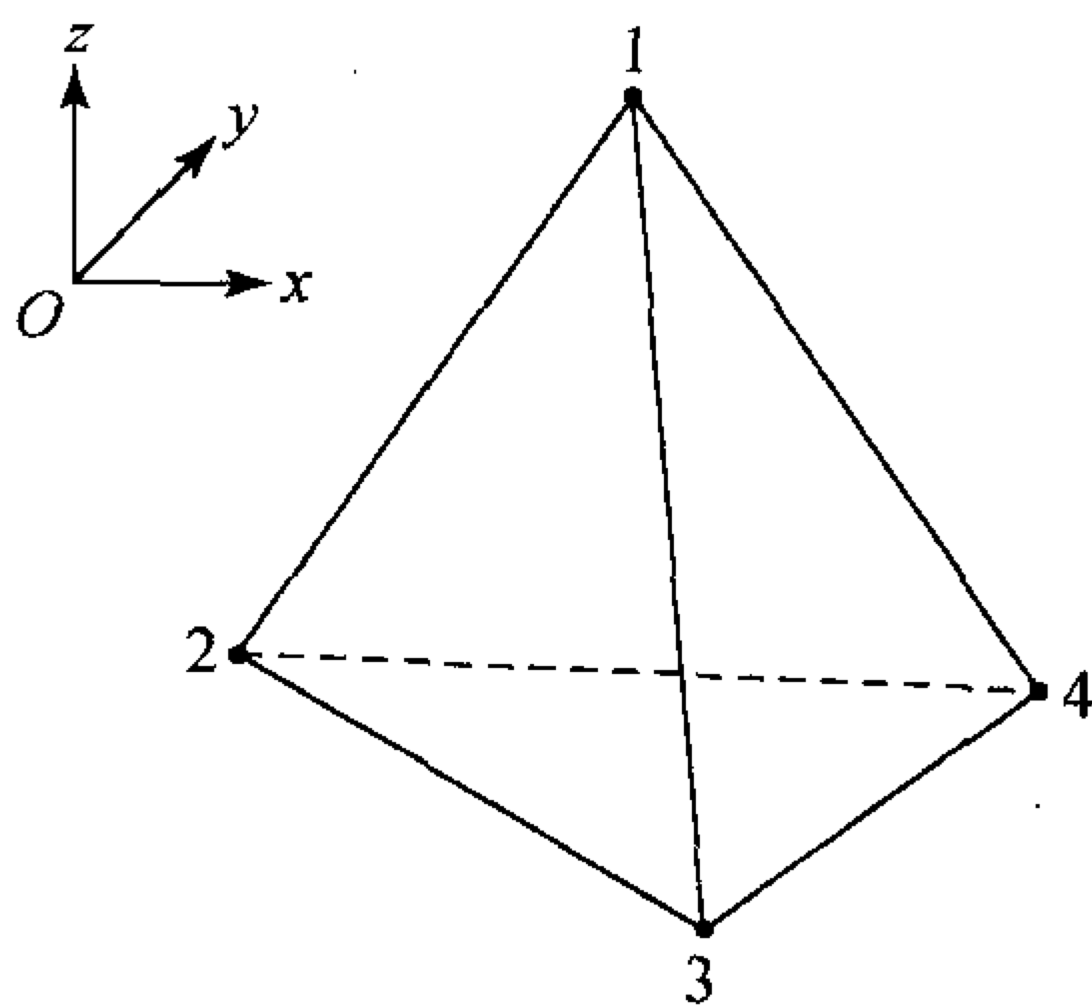


图 5-4 四面体单元

若用线性插值函数,则任一四面体单元 e 内的未知函数 φ 可近似表示为

$$\varphi^e(x,y,z)=\beta_1^e+\beta_2^e x+\beta_3^e y+\beta_4^e z, \tag{5.3.22}$$

其中 $\beta_i^e(i=1,2,3,4)$ 为待定系数.4 个节点上的未知函数值可分别表示为

$$\begin{aligned}
\varphi_1^e &= \beta_1^e+\beta_2^e x_1^e+\beta_3^e y_1^e+\beta_4^e z_1^e,\\
\varphi_2^e &= \beta_1^e+\beta_2^e x_2^e+\beta_3^e y_2^e+\beta_4^e z_2^e,\\
\varphi_3^e &= \beta_1^e+\beta_2^e x_3^e+\beta_3^e y_3^e+\beta_4^e z_3^e,\\
\varphi_4^e &= \beta_1^e+\beta_2^e x_4^e+\beta_3^e y_4^e+\beta_4^e z_4^e,\\
e &= 1,2,\cdots,M,
\end{aligned}$$

其中 x_i^e,y_i^e 和 $z_i^e(i=1,2,3,4)$ 为单元 e 中的节点坐标.由以上四式可解出

$$\beta_1^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(a_1^e\varphi_1^e + a_2^e\varphi_2^e + a_3^e\varphi_3^e + a_4^e\varphi_4^e),$$

$$\beta_2^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(b_1^e\varphi_1^e + b_2^e\varphi_2^e + b_3^e\varphi_3^e + b_4^e\varphi_4^e),$$

$$\beta_3^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(c_1^e\varphi_1^e + c_2^e\varphi_2^e + c_3^e\varphi_3^e + c_4^e\varphi_4^e),$$

$$\beta_4^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(d_1^e\varphi_1^e + d_2^e\varphi_2^e + d_3^e\varphi_3^e + d_4^e\varphi_4^e),$$

其中

$$V^e = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix}$$

为单元 e 的体积，系数 a_i^e, b_i^e, c_i^e 和 $d_i^e(i=1,2,3,4)$ 由节点坐标决定. 例如，当 $i=1$ 时，有

$$a_1^e = \begin{vmatrix} x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix}, \quad b_1^e = -\begin{vmatrix} 1 & y_2^e & z_2^e \\ 1 & y_3^e & z_3^e \\ 1 & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix},$$

$$c_1^e = \begin{vmatrix} 1 & x_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & z_3^e \\ 1 & x_4^e & z_4^e \end{vmatrix}, \quad d_1^e = -\begin{vmatrix} 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \\ 1 & x_4^e & y_4^e \end{vmatrix}.$$

其他系数可由下角标循环依次获得.

将 $\beta_i^e(i=1,2,3,4)$ 代入式(5.3.22)，可得

$$\varphi^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{4} N_i^e(x,y,z)\varphi_i^e, \tag{5.3.23}$$

其中 N_i^e 称为形函数，且

$$N_i^e(x,y,z) = \frac{1}{6V^e}(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z). \tag{5.3.24}$$

可以证明，$N_i^e(x,y,z)$具有如下性质

$$N_i^e(x_j,y_j,z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases} \quad i,j=1,2,3,4, \tag{5.3.25}$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克(Kronecker)δ 函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

若观察点位于四面体单元 e 中与第 i 个节点相对的三角形内，则 $N_i^e(x,y,z)$为零，使得单元之间的连续性得到了保证. 式(5.3.23)表明，N_i^e 相当于单元 e 内的基函数，所以也被称为插值函数或基函数.

2. 矢量波动方程构成的边值问题

由矢量波动方程(5.3.3)和齐次边界条件所构成的边值问题为

$$\begin{cases} \nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}), & \boldsymbol{r}\in V, \\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{r}\in S_1, \\ \boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{r}\in S_2, \end{cases} \tag{5.3.26}$$

其中 $S=S_1+S_2$，为 V 的边界. 在对称积的定义下，其等价变分问题中的泛函为

$$J[\boldsymbol{E}] = \int_V \mu^{-1}|\nabla\times\boldsymbol{E}|^2\mathrm{d}V - \int_V \mu^{-1}k^2|\boldsymbol{E}|^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + 2\mathrm{i}\omega\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V, \tag{5.3.27}$$

在直角坐标系中具有以下形式，即

$$\begin{aligned} J[\boldsymbol{E}] = &\int_V \mu^{-1}\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}V \\ &- \int_V \mu^{-1}k^2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\mathrm{d}V + 2\mathrm{i}\omega\int_V (E_xJ_x + E_yJ_y + E_zJ_z)\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

按式(5.3.23)的形式，在任一单元 e 上 $\boldsymbol{E}$ 的 3 个分量可分别展开为

$$E_x^e = \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{xj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_x^e], \tag{5.3.29}$$

$$E_y^e = \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{yj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_y^e], \tag{5.3.30}$$

$$E_z^e = \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{zj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_z^e], \tag{5.3.31}$$

其中

$$[N^e]=[N_1^e,N_2^e,N_3^e,N_4^e]^{\mathrm{T}},$$

$$[E_p^e]=[E_{p1}^e,E_{p2}^e,E_{p3}^e,E_{p4}^e]^{\mathrm{T}},\quad p=x,y,z.$$

将上式代入式(5.3.28),求得对体积 V^e 的 $J^e[E^e]$,并分别取其对 E_{xi}^e,E_{yi}^e 和 E_{zi}^e ($i=1,2,3,4$)的偏导,所得结果用矩阵形式表示为

$$\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_x^e}\right]=[K_{xx}^e][E_x^e]+[K_{xy}^e][E_y^e]+[K_{xz}^e][E_z^e]-[b_x^e],\tag{5.3.32}$$

$$\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_y^e}\right]=[K_{yx}^e][E_x^e]+[K_{yy}^e][E_y^e]+[K_{yz}^e][E_z^e]-[b_y^e],\tag{5.3.33}$$

$$\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_z^e}\right]=[K_{zx}^e][E_x^e]+[K_{zy}^e][E_y^e]+[K_{zz}^e][E_z^e]-[b_z^e],\tag{5.3.34}$$

其中$[K_{pq}^e]$是矩阵,$[b_p^e]$是列矢量,

$$\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_p^e}\right]=\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_{p_1}^e},\frac{\partial J^e}{\partial E_{p_2}^e},\frac{\partial J^e}{\partial E_{p_3}^e},\frac{\partial J^e}{\partial E_{p_4}^e}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$K_{xxij}^e=2\int_{V^e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}+\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z}-k^2N_i^eN_j^e\right)\mathrm{d}V,\tag{5.3.35}$$

$$K_{yyij}^e=2\int_{V^e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z}+\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}-k^2N_i^eN_j^e\right)\mathrm{d}V,\tag{5.3.36}$$

$$K_{zzij}^e=2\int_{V^e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}-k^2N_i^eN_j^e\right)\mathrm{d}V,\tag{5.3.37}$$

$$K_{pqij}^e=-2\int_{V^e}\mu^{-1}\frac{\partial N_i^e}{\partial p}\frac{\partial N_j^e}{\partial q}\mathrm{d}V,\quad p\neq q,\tag{5.3.38}$$

$$b_{pi}^e=-2\mathrm{i}\omega\int_{V^e}N_i^eJ_p\mathrm{d}V,\tag{5.3.39}$$

$$p,q=x,y,z;i,j=1,2,3,4.$$

将以上矩阵和列矢量扩展,并对所有单元进行增广组合,再令 $\delta J=0$,可得

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_x}\right]=\sum_{e=1}^{M}\{[\bar{K}_{xx}^e][\bar{E}_x^e]+[\bar{K}_{xy}^e][\bar{E}_y^e]+[\bar{K}_{xz}^e][\bar{E}_z^e]-[\bar{b}_x^e]\}=[0],\tag{5.3.40}$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_y}\right]=\sum_{e=1}^{M}\{[\bar{K}_{yx}^e][\bar{E}_x^e]+[\bar{K}_{yy}^e][\bar{E}_y^e]+[\bar{K}_{yz}^e][\bar{E}_z^e]-[\bar{b}_y^e]\}=[0],\tag{5.3.41}$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_z}\right]=\sum_{e=1}^{M}\{[\bar{K}_{zx}^e][\bar{E}_x^e]+[\bar{K}_{zy}^e][\bar{E}_y^e]+[\bar{K}_{zz}^e][\bar{E}_z^e]-[\bar{b}_z^e]\}=[0].\tag{5.3.42}$$

组合相加以后,可写为

$$K_{xx}E_x+K_{xy}E_y+K_{xz}E_z=b_x,\tag{5.3.43}$$

$$K_{yx}E_x + K_{yy}E_y + K_{yz}E_z = b_y, \tag{5.3.44}$$

$$K_{zx}E_x + K_{zy}E_y + K_{zz}E_z = b_z, \tag{5.3.45}$$

最终组合为一个总矩阵方程，即

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}. \tag{5.3.46}$$

除此之外，还要在 S_1 上强加上作为基本边界条件的第一类齐次边界条件；在 S_2 上作为自然边界条件的第二类边界条件已自动得到满足. 在 V 中的媒质不连续处，还应加上连接条件.

5.3.4 基于加权余量法的有限元方程

对于有些电磁场问题，要找到与之等价的变分问题可能有困难，这时可以采用基于加权余量法的有限元法，它可直接从算子方程出发得到有限元方程. 为简单起见，这里只考虑标量波动方程的情况. 电磁场问题中常遇到的一类标量波动方程为

$$\nabla \cdot p(\boldsymbol{r}) \nabla\varphi(\boldsymbol{r}) + k^2 p(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r}) = s(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in V. \tag{5.3.47}$$

如果仍用 φ 表示近似解，则由波动方程所产生的余量 R 为

$$R = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + k^2 p\varphi - S. \tag{5.3.48}$$

单元 $e(e=1,2,\cdots,M)$ 上余量的加权积分为

$$\begin{aligned} R_i^e &= \int_{V^e} N_i^e R^e \mathrm{d}V \\ &= \int_{V^e} N_i^e \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial y}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(p^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial z}\right) + k^2 p^e\varphi^e - S^e\right]\mathrm{d}V, \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{5.3.49}$$

利用

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(p^e N_i^e \frac{\partial\varphi^e}{\partial q}\right) = p^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial q}\frac{\partial N_i^e}{\partial q} + \left[\frac{\partial}{\partial q}\left(p^e\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)\right]N_i^e, \quad q = x,y,z,$$

上式可表示为

$$\begin{aligned} R_i^e &= \int_{V^e}\left[-p^e\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial\varphi^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial\varphi^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial\varphi^e}{\partial z}\right) + (k^e)^2 p^e N_i^e\varphi^e\right]\mathrm{d}V \\ &\quad - \int_{V^e} N_i^e S^e \mathrm{d}V + \int_{V^e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p^e N_i^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p^e N_i^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial y}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(p^e N_i^e\frac{\partial\varphi^e}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V, \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{5.3.50}$$

运用高斯定理，上式等号右侧的最后一项可表示为$\oint_{S^e} p^e N_i^e \boldsymbol{D}^e \cdot \boldsymbol{n}^e \mathrm{d}S$，其中

$$\boldsymbol{D}^e = \hat{x}\frac{\partial \varphi^e}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi^e}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi^e}{\partial z} = \nabla \varphi^e, \tag{5.3.51}$$

S^e 为包围 V^e 的表面，$\boldsymbol{n}^e$ 为其上的外法向单位矢量. 将式(5.3.23)代入式(5.3.50)，即可得到

$$R_i^e = \sum_{j=1}^{4} \varphi_j^e \left[-p^e \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) + (k^e)^2 p^e N_i^e N_j^e \right] \mathrm{d}V$$

$$- \int_{V^e} N_i^e S^e \mathrm{d}V + \int_{S^e} p^e N_i^e \nabla \varphi^e \cdot \boldsymbol{n}^e \mathrm{d}S, \quad i = 1,2,3,4. \tag{5.3.52}$$

令全域各单元的余量之和等于零，就可得到所需的有限元方程.

上式也可用矩阵形式表示，最终所得到的有限元方程可以和基于变分原理所导出的方程完全相同.

5.3.5 矢量有限元法

利用节点插值导出的标量基函数所构成的有限元方法存在一些明显的缺点(如伪解的存在). 如果求解区域内媒质不连续，还需增加连续性条件. 此外，处理导体和介质的棱角时也会遇到困难. 本节介绍的矢量有限元法克服了这些缺点，其研究与应用受到广泛重视. 与节点插值的标量基函数的展开方法不同，矢量有限元法将单元棱边上的切向场分量作为待求量，用矢量函数构造基函数，直接将场量进行展开，从而使其特别适用于求解矢量场. 由于未知量取在棱边上，这种方法也称为棱边元法.

1. 矢量基函数

讨论适用于三维问题中四面体单元的矢量基函数，令

$$L_i = N_i, \quad i = 1,2,3,4, \tag{5.3.53}$$

其中 N_i 如式(5.3.24)所定义. 四面体单元的顶点和棱边命名如图 5-5 所示.

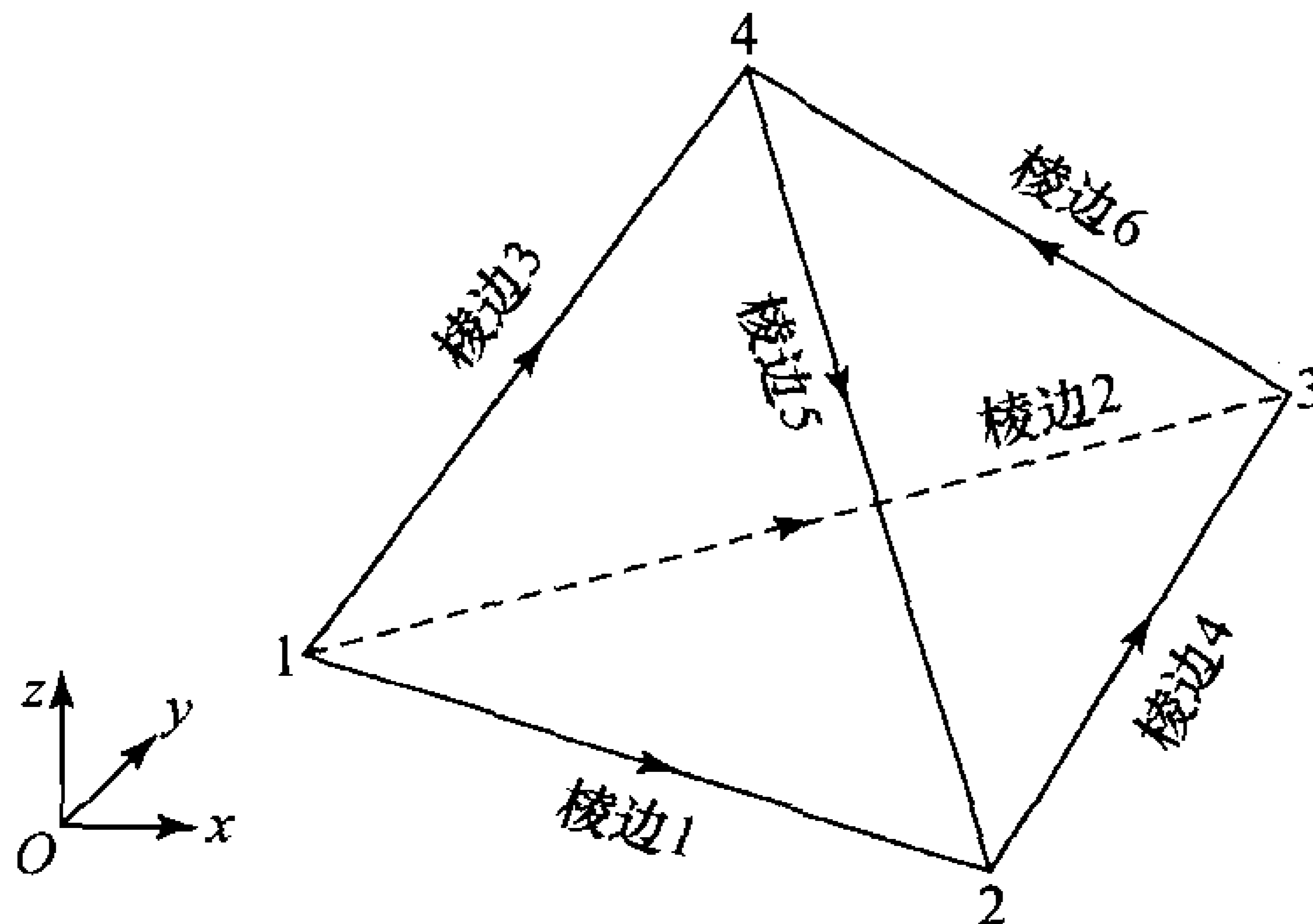


图 5-5 四面体单元

定义 Whitney 矢量函数

$$\boldsymbol{W}_{12} = L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1, \tag{5.3.54}$$

很容易证明 $\boldsymbol{W}_{12}$ 具有如下性质

$$\nabla \cdot \boldsymbol{W}_{12} = 0, \tag{5.3.55}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{W}_{12} = 2 \nabla L_1 \times \nabla L_2. \tag{5.3.56}$$

由式(5.3.24)和(5.3.25)可以看出,$L_i(i=1,2,3,4)$为线性函数. L_1 的值从节点 1 处的 1 变化到节点 2 处的 0,L_2 的值从节点 2 处的 1 变化到节点 1 处的 0. 所以,若用 $\boldsymbol{e}_1$ 表示从节点 1 指向节点 2 的单位矢量,则有

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \nabla L_1 = -\frac{1}{l_1}, \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{l_1}, \tag{5.3.57}$$

其中 l_1 为棱边 1 的长度. 由此可得

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{W}_{12} = \frac{L_1 + L_2}{l_1} = \frac{1}{l_1}. \tag{5.3.58}$$

这说明 $\boldsymbol{W}_{12}$ 沿棱边 1 有一个不变的切向分量. 而且,由于 L_1 沿棱边 4,5,6 为零,L_2 沿棱边 2,3,6 为零,故 $\boldsymbol{W}_{12}$ 沿这五条棱边都没有切向分量. 又由于 L_1 在由节点 2,3,4 所定义的三角形平面上为零,L_2 在由节点 1,3,4 定义的三角形平面上为零,故 $\boldsymbol{W}_{12}$ 在这两个三角形平面上也没有切向分量. 可见,$\boldsymbol{W}_{12}$ 的切向分量只出现在棱边 1 上以及分别由节点 1,2,4 和 1,2,3 定义的两个三角形平面内. 这样,$\boldsymbol{W}_{12}$ 具备了作为与棱边 1 相关的棱边场的矢量基函数所需的特性. 与三角形单元中类似,可定义与棱边 1 相关的矢量基函数 $\boldsymbol{N}_1$,即

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{W}_{12} l_1 = (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1. \tag{5.3.59}$$

一般地,可将与棱边 $i(i=1,2,\cdots,6)$相关的矢量基函数定义为

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{W}_{i_1 i_2} l_i = (L_{i_1} \nabla L_{i_2} - L_{i_2} \nabla L_{i_1}) l_i, \tag{5.3.60}$$

其中 l_i 为棱边 i 的长度. 棱边 i 与节点 i_1 和 i_2 的关系列于表 5-1 中.

表 5-1 四面体单元中棱边 i 与节点 i_1 和 i_2 的关系

棱边 i	节点 i_1	节点 i_2
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

这样,就可以将四面体单元内任一点的电场矢量表示为

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{6} \boldsymbol{N}_i E_i, \tag{5.3.61}$$

其中 E_i 为沿棱边 i 的切向场分量.

2. 单元矩阵的计算

按照有限元法的求解步骤,一旦确定了区域剖分的单元形式,也就确定了对场进行近似展开所用的矢量基函数.下一个主要问题是将近似表达式代入所选定的泛函公式并计算单元方程.由关于矢量波动方程边值问题的讨论可知,获得单元方程的计算量主要集中在矩阵的计算中.如果未知量是电场,则主要需要计算以下两类积分,即

$$\int_V \mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \quad 和 \quad \int_V \mu^{-1}k^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V.$$

如果解域 V 内的媒质是均匀的,或在一个单元内的媒质参量可用一个平均值代替,则 μ^{-1} 和 k^2 可提到积分号外.于是,将场的展开式代入上式,并对 $E_i(i=1,2,\cdots,6)$ 取偏导,上述积分就归结为以下积分的计算,即

$$P_{ij}^e=\int_{V^e}\nabla\times\boldsymbol{N}_i^e\cdot\nabla\times\boldsymbol{N}_j^e\mathrm{d}V, \tag{5.3.62}$$

$$Q_{ij}^e=\int_{V^e}\boldsymbol{N}_i^e\cdot\boldsymbol{N}_j^e\mathrm{d}V, \tag{5.3.63}$$

$$i,j=1,2,\cdots,6,$$

其中 e 表示任一单元的编号,V^e 表示单元 e 的积分范围.

根据式(5.3.56)和(5.3.60),可知

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{N}_i^e&=2l_i^e\nabla L_{i_1}^e\times\nabla L_{i_2}^e\\&=\frac{l_i^e}{(6V^e)^2}[(c_{i_1}^e d_{i_2}^e-d_{i_1}^e c_{i_2}^e)\boldsymbol{e}_x+(d_{i_1}^e b_{i_2}^e-b_{i_1}^e d_{i_2}^e)\boldsymbol{e}_y\\&\quad+(b_{i_1}^e c_{i_2}^e-c_{i_1}^e b_{i_2}^e)\boldsymbol{e}_z],\quad i=1,2,\cdots,6.\end{aligned} \tag{5.3.64}$$

其中 $b_{i_1}^e,b_{i_2}^e,c_{i_1}^e,c_{i_2}^e,d_{i_1}^e$ 和 $d_{i_2}^e$ 的表达式已在5.3.3小节中说明,下角标 i_1 和 i_2 的取值已在表5-1中给出.可见,$\nabla\times\boldsymbol{N}_i^e$ 也是常矢量.于是,将上式代入式(5.3.62),很容易得到

$$\begin{aligned}P_{ij}&=\frac{l_il_jV^e}{(6V^e)^4}[(c_{i_1}^e d_{i_2}^e-d_{i_1}^e c_{i_2}^e)(c_{j_1}^e d_{j_2}^e-d_{j_1}^e c_{j_2}^e)+(d_{i_1}^e b_{i_2}^e-b_{i_1}^e d_{i_2}^e)(d_{j_1}^e b_{j_2}^e-b_{j_1}^e d_{j_2}^e)\\&\quad+(b_{i_1}^e c_{i_2}^e-c_{i_1}^e b_{i_2}^e)(b_{j_1}^e c_{j_2}^e-c_{j_1}^e b_{j_2}^e)],\quad i,j=1,2,\cdots,6.\end{aligned} \tag{5.3.65}$$

对于式(5.3.63),利用

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_i^e\cdot\boldsymbol{N}_j^e&=\frac{l_i^el_j^e}{(6V^e)^2}[L_{i_1}^eL_{j_1}^ef_{i_2j_2}-L_{i_1}^eL_{j_2}^ef_{i_2j_1}-L_{i_2}^eL_{j_1}^ef_{i_1j_2}\\&\quad+L_{i_2}^eL_{j_2}^ef_{i_1j_1}]\quad(i,j=1,2,\cdots,6),\end{aligned} \tag{5.3.66}$$

其中 $f_{ij}=b_i^eb_j^e+c_i^ec_j^e+d_i^ed_j^e$,以及公式

$$\int_{V^e}(L_1^e)^k(L_2^e)^l(L_3^e)^m(L_4^e)^n\mathrm{d}V=\frac{k!l!m!n!}{(k+l+m+n+3)!}6V^e,$$

可以得到 $Q_{ij}(i,j=1,2,\cdots,6)$ 的表达式. 由于 F_{ij} 涉及的元素较多,这里不再一一列出,需要时可参看文献[9].

5.3.6　有限元法用于开域问题

在经常遇到的电磁场问题中,电磁散射和辐射具有至关重要的意义. 这类问题的求解区域为开放的无限大空间,称为开域问题. 像有限元法这样的内域基函数插值法不可能直接在无限大的解域中应用,因为任何计算机的内存都是有限的,而且过大的计算量也是不能接受的.

1. 吸收边界条件法

一类解决开域问题的实际可行的方法是:用一假设的虚拟边界将散射体或辐射体包围起来,边界内的场用有限元方法求解,边界外的场用其他方法求解,然后将这两种场通过连续性条件耦合起来,得到统一的方程. 这类方法已发展了若干种,重要的一种是吸收边界条件法.

吸收边界条件法产生的是边界场之间的局部关系,即只将边界上一个节点的场与其邻近节点的场联系起来,得到高度稀疏的矩阵方程,这样就保留了有限元法十分宝贵的优点. 但是,吸收边界条件往往不能对所有入射角产生零反射,只能是一种近似条件,这会给最终的解带来附加误差.

2. 边界积分法

用于开域问题的另外一种方法是边界积分法,这种方法的基本思路是: 设置一个包围散射体的虚拟边界,边界外的场称为外场,边界内的场称为内场,内场仍用有限元法求解,将外场表达成一个积分,利用连续条件将二者耦合起来. 内外场耦合的方法是,通过积分把边界场与其法向导数联系起来,而法向导数成为内场的边界条件,这也是称其为边界积分法的原因.

为了与后面将要讨论的时域有限元法相呼应,这里将简略讨论边界积分法的基本原理,并直接讨论三维矢量场问题.

用一虚拟曲面 S 包围三维散射体,S 面应尽量靠近散射体,将 S 外和 S 内的区域分别记为 V_∞ 和 V. 在三维问题中,一般要考虑场的矢量解. 在 V_∞ 中电场所满足的方程为

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-k_0^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in V_\infty. \tag{5.3.67}$$

为了求解散射场,可利用满足以下方程的自由空间的并矢格林函数 $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$,

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-k_0^2\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{r}'\in V_\infty. \tag{5.3.68}$$

用 $\boldsymbol{G}_0$ 右乘方程(5.3.67)并在 V_∞ 内积分,便得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_\infty}[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-k_0^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V\\&=\mathrm{i}\omega\mu_0\int_{V_s}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{5.3.69}$$

其中 V_s 表示源电流所在的区域. 利用矢量-并矢格林第二定理，有

$$\int_{V_\infty}(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{G}_0-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0)\mathrm{d}V$$

$$=\oint_{S_\infty}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{G}_0+\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{G}_0)\mathrm{d}S,\tag{5.3.70}$$

其中 S_∞ 为 V_∞ 的表面. 将方程(5.3.69)写为

$$\int_{V_\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot[\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-k_0^2\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V$$

$$=\mathrm{i}\omega\mu_0\int_{V_\infty}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V-\oint_{S_\infty}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\times\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$+\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S,\tag{5.3.71}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S_∞ 上的外法向单位矢量. 考虑到方程(5.3.68)且 $\boldsymbol{r}'\in V_\infty$，方程(5.3.71)的等号左侧为

$$\int_{V_\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{I}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}').\tag{5.3.72}$$

又由于 $\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足辐射条件，使得式(5.3.71)等号右侧的第二项在无穷远处的面积分消失，故可将方程(5.3.71)写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})+\oint_S[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\times\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$+\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}S',\tag{5.3.73}$$

其中

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})=\mathrm{i}\omega\mu_0\int_{V_s}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V',\tag{5.3.74}$$

$\boldsymbol{n}'$ 表示 S 上的外法向单位矢量. 利用

$$\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\left(\boldsymbol{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'),\tag{5.3.75}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{G}_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\nabla'G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{I},\tag{5.3.76}$$

式(5.3.73)可改写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})+\oint_S\Big[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$+\frac{1}{k_0^2}\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}S'$$

$$=\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})+\oint_S\Big[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$+\frac{1}{k_0^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\,\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}S'.\tag{5.3.77}$$

最后，为了利用连续性条件，令 $\boldsymbol{r}$ 趋于 S，再用 $\boldsymbol{n}$ 叉乘方程(5.3.77)，得到

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{n}\times\oint_S\Big[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$+\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$
$$+\frac{1}{k_0^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{n}'\times\nabla'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\,\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}S'. \tag{5.3.78}$$

该式给出了 S 上 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E}$ 之间的关系.

在 V 中,假定媒质是非均匀的,但是无耗的,电场满足无源的矢量波动方程

$$\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})-k_0^2\varepsilon_r\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0,\quad \boldsymbol{r}\in V. \tag{5.3.79}$$

为简单起见,仍假定 V 内的媒质是连续的(否则需增加连接条件),但假定在 S 上满足边界条件,即

$$\boldsymbol{n}\times\mu_r^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\Psi},\quad \boldsymbol{r}\in S, \tag{5.3.80}$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 是未知的. 根据式(5.3.16),V 内电场等价变分问题中的泛函可写为

$$J[\boldsymbol{E}]=\int_V(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}-k_0^2\varepsilon_r\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\mathrm{d}V+2\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\Psi}\mathrm{d}S. \tag{5.3.81}$$

假定用四面体单元对 V 进行剖分,内部单元和边界单元分别为 M 个和 M_s 个. $\boldsymbol{E}$ 在 V 内及其边界单元上可表示为

$$\boldsymbol{E}^e=\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{N}_i^eE_i^e=[\boldsymbol{N}^e]^{\mathrm{T}}[E^e]=[E^e]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}^e], \tag{5.3.82}$$

其中$[\boldsymbol{N}^e]=[\boldsymbol{N}_1^e,\boldsymbol{N}_2^e,\boldsymbol{E}_3^e,\boldsymbol{N}_4^e]^{\mathrm{T}}$,而 $\boldsymbol{\Psi}$ 在边界单元中表示为

$$\boldsymbol{\Psi}^s=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{N}_i^s\Psi_i^s=[\boldsymbol{N}^s]^{\mathrm{T}}[\Psi^s]=[\Psi^s]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}^s], \tag{5.3.83}$$

其中 $\boldsymbol{M}_i=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{N}_i$. 将式(5.3.82)和(5.3.83)代入式(5.3.81),在相应单元上对各节点的电场分量求导并令其为零,便有

$$\sum_{e=1}^{M}[K^e][E^e]+\sum_{s=1}^{M_s}[B^s][\Psi^s]=\boldsymbol{0}, \tag{5.3.84}$$

其中$[K^e]$和$[B^s]$是矩阵

$$K_{ij}^e=\int_{V^e}[(\mu_r^e)^{-1}\nabla\times\boldsymbol{N}_i^e\cdot\nabla\times\boldsymbol{N}_j^e-k_0^2\varepsilon_r^e\boldsymbol{N}_i^e\cdot\boldsymbol{N}_j^e]\mathrm{d}V$$
$$i,j=1,2,3,4, \tag{5.3.85}$$

$$B_{ij}^s=\oint_{\Delta^s}\boldsymbol{N}_i^s\cdot\boldsymbol{N}_j^s\mathrm{d}S,\quad i,j=1,2,3, \tag{5.3.86}$$

式中 V^e 是四面体单元 e 的体积,Δ^s 是边界单元 S 的面积. 经增广组合,可由方程(5.3.84)获得内域场的有限元方程

$$\boldsymbol{KE}+\boldsymbol{B\Psi}=\boldsymbol{0}. \tag{5.3.87}$$

然而,方程(5.3.87)还不足以确定全部未知量,所需的另一组方程可通过式(5.3.78)获得.

在虚拟边界 S 上,场的连续性条件为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}|_{S_+}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}|_{S_-},\quad \boldsymbol{n}\times\nabla\times\boldsymbol{E}\Big|_{S_+}=\boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu_r}\nabla\times\boldsymbol{E}\Big|_{S_-},\tag{5.3.88}$$

其中 S_+ 和 S_- 分别表示 S 的外侧和内侧. 考虑到式(5.3.80)对 S_- 上 $\boldsymbol{r}$ 的作用,方程(5.3.78)成为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{n}\times\oint_{S}\Big[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\times\nabla'G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$
$$+\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}')G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+\frac{1}{k_0^2}\nabla'\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{r}')\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\Big]\mathrm{d}S'.\tag{5.3.89}$$

在边界单元 s 上,将 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^s$ 展开成

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^s=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{N}_i^sE_i^s=[\boldsymbol{N}^s]^{\mathrm{T}}[E^s]=[E^s]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{N}^s].\tag{5.3.90}$$

将上式和式(5.3.83)代入方程(5.3.89),可得

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{n}\times\sum_{s=1}^{M_s}\oint_{\Delta^s}\Big\{[\boldsymbol{N}^s]^{\mathrm{T}}[E^s]\times\nabla'G_0$$
$$+[\boldsymbol{M}^s]^{\mathrm{T}}[\Psi^s]G_0+\frac{1}{k_0^2}[\nabla'\cdot\boldsymbol{M}^s]^{\mathrm{T}}[\Psi^s]\nabla G_0\Big\}\mathrm{d}S'.\tag{5.3.91}$$

取上式与$[\boldsymbol{N}^t]$($t=1,2,\cdots,M_s$)的点乘,并在 Δ^t 上积分,便有

$$[B^t][E^t]=[b^t]-\sum_{s=1}^{M_s}\{[P^{ts}][E^s]+[Q^{ts}][\Psi^s]\},\tag{5.3.92}$$

其中$[B^t]$与式(5.3.86)给出的形式相同,即

$$b_i^t=-\oint_{\Delta^s}\boldsymbol{M}_i^t\cdot\boldsymbol{E}^{i}\mathrm{d}S,\tag{5.3.93}$$

$$P_{ij}^{ts}=\oint_{\Delta^t}\boldsymbol{M}_i^t\cdot\oint_{\Delta^s}[\boldsymbol{M}_j^s]^{\mathrm{T}}\times\nabla'G_0\mathrm{d}S'dS,\tag{5.3.94}$$

$$Q_{ij}^{ts}=\oint_{\Delta^t}\boldsymbol{M}_i^t\cdot\oint_{\Delta^s}\Big\{[\boldsymbol{M}_j^s]^{\mathrm{T}}G_0+\frac{1}{k_0^2}[\nabla\cdot\boldsymbol{M}_j^s]^{\mathrm{T}}\nabla G_0\Big\}\mathrm{d}S'\mathrm{d}S,\tag{5.3.95}$$

$$i,j=1,2,3.$$

可将方程(5.3.92)增广组合为矩阵方程

$$\boldsymbol{BE}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{PE}-\boldsymbol{Q\Psi}.\tag{5.3.96}$$

再与方程(5.3.87)联立,就成为求解 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的完整的方程组.

最后指出一点,虽然边界积分法使有限元法求解开域问题成为可能,可精确地应用于不同的问题.但这种方法存在一个严重的缺点,即当虚构边界封闭时,会出现所谓“内部谐振”问题.也就是说,存在“奇异频率”,在这些频率上所得的结果偏离其解而出现错误.经分析发现,这个问题的存在与使用边界积分有关.此外,外域场采用边界积分法描述,使得与之相联系的矩阵是满秩的,这与全部采用有限元法时所得到的稀疏矩阵相比是个明显的不足.

§5.4　频域到时域的变换

当考虑一个电磁系统通过频域数值解而获得所需的时域数值解时，一开始就要对整个计算过程进行统筹规划. 首先，根据对时域解的要求确定场源或激励信号的波形及其时域表达，然后决定计算的频域范围以及采样间隔. 在频域计算的每一次运行所获得的往往仅是时域解频谱的一个采样点，如何由获得的采样序列，精确、快速地获得时域解也是一个关键性的问题.

5.4.1　频域计算的采样问题

正如讨论传统的电磁场计算的频域方法时所看到的，频域方法是针对时谐场所建立的，其中的场源设定为随时间的变化为简谐的. 因此，在用频域方法计算时，一次计算只给出当场源为某一特定频率时所对应的场量. 如果需要知道场源在某个频率范围内所对应的场量，则一次计算只能给出在这一频率范围内对应某一个频率点的场量，或者说只是某一采样点的场量.

如果计算的目的是对系统进行时域分析，这时的场源应随时间按所要求的规律变化，我们需要求得对应于该场源系统的场随时间的变化规律. 场源所对应的时间信号有其固有的频谱，频域计算就是要获得这一频谱范围内一系列采样点的场量，并由这些频域数据获得场的时域信息. 因此，在计算的开始，就要针对计算的要求设计好计算的整体安排，其目的是如何高效、精确地获得所需的时域结果. 为达到这一要求，首先需要确定待计算的频率范围和频率采样密度.

例如，需要计算一个时不变线性电磁系统对某一种激励源的时域响应，假如激励源用 $u(\boldsymbol{r},t)$ 表示，响应场量用 $v(\boldsymbol{r},t)$ 表示，它们的傅里叶变换(频谱)分别用 $\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega)$ 和 $\hat{v}(\boldsymbol{r},\omega)$ 表示. 频域方法是当 $\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega)$ 在一系列频率点取值时计算出在同样频率样点下的一系列 $\hat{v}(\boldsymbol{r},\omega)$ 值，而目的是通过这一系列 $\hat{v}(\boldsymbol{r},\omega)$ 的离散值，尽量精确地通过傅里叶逆变换求得时域响应 $v(\boldsymbol{r},t)$. 这里首先遇到的关键问题是，什么样的 $\hat{v}(\boldsymbol{r},\omega)$ 的系列离散值，才能不失真地决定时域响应 $v(\boldsymbol{r},t)$ 信号——采样定理回答了这一问题.

采样定理告诉我们，一个频带受限的时域信号 $f(t)$，如果其频谱所占的频率范围为 $0\sim f_c$，则信号可用等间隔的采样值来唯一地表示，采样间隔不得大于 $\Delta t=1/2f_c$，或者说最低采样率为 $2f_c$，且称该采样率为奈奎斯特(Nyquest)率.

对采样定理可作如下的物理上的解释：一个频带受限的信号波形决不可能在很短的时间产生独立的、实质的变化，其最高变化速度受最高频率分量 f_c 的限制. 为了保留这一频率分量的全部信息，在一个周期的间隔内至少采样两次.

采样定理也可以用频域信号加以说明：若 $f(t)$ 是时间受限信号，时间范围

为 $0 \sim t_c$，若 $f(t)$ 的频谱为 $\hat{f}(\omega)$，则在频域中以不大于 $\Delta f = 1/2t_c$ 的频率间隔对 $\hat{f}(\omega)$ 进行采样，则这些采样值可以唯一地表示原信号.

在数值计算的实践中，无论是时域信号还是频域信号，都要按时间受限或频带受限信号来处理. 如果时限和频限仍用 t_c 和 f_c 表示，且限内都按 N 份等分，则按采样定理要求，在时域的采样间隔最大为 Δt 时有 $N\Delta t = t_c$，在频域的最大采样间隔为 Δf 时有 $N\Delta f = f_c$，且

$$\Delta t = \frac{1}{2N\Delta f}, \tag{5.4.1}$$

根据以上讨论可知，在电磁场问题的时域分析中若采用频域方法，首先要根据给定的场源 $u(\boldsymbol{r},t)$ 计算其频谱 $\hat{u}(\boldsymbol{r},\omega)$，这时就要根据 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的特点和采样定理的要求确定应取的 Δt 和 N，由此也就确定了 $t_c = N\Delta t$，进而决定了 Δf 和 f_c.

用这种方法进行时域分析，其缺点是对不同的 $u(\boldsymbol{r},t)$，都要重新进行计算，以获得新的全部所需的频域信息. 但是，如果对时不变线性电磁系统，我们计算得到了它的冲激响应 $h(t)$，则可用卷积方法求得对任意场源 $u(\boldsymbol{r},t)$ 的场量响应，其关系为

$$v(\boldsymbol{r},t) = \int_0^\infty h(\tau)u(\boldsymbol{r},t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{5.4.2}$$

这正是频域方法进行时域分析的一大优点. 而用频域方法进行时域分析的主要限制，是不能处理非线性和时变系统的问题.

5.4.2 频域-时域数值变换

以上所讲到的求场源信号的离散频谱和由计算所得相应频域场量求系统对场源的时域响应，都要通过离散傅里叶变换和离散傅里叶逆变换来完成. 当要求场源信号的离散频谱时，可利用

$$\hat{u}(\boldsymbol{r},n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} u(\boldsymbol{r},k\Delta t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nk/N}, \quad n = 0,1,2,\cdots,N-1. \tag{5.4.3}$$

利用 $\hat{u}(\boldsymbol{r},n\Delta f)$ 作为场源，用频域方法计算得到相应的频域响应的离散频谱 $\hat{v}(\boldsymbol{r},n\Delta f)$，再利用此结果求得时域响应的离散值 $v(\boldsymbol{r},k\Delta t)$，其关系是

$$v(\boldsymbol{r},k\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{v}(\boldsymbol{r},n\Delta f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nk/N}, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1. \tag{5.4.4}$$

但是，无论是离散傅里叶变换，还是傅里叶逆变换，都是有条件的. 它们是

- 时域函数是周期性的.
- 时域函数是频带有限的.
- 采样周期满足 Nyquest 采样率的要求.
- 函数的长度必须精确地按一个周期截断. 如果函数是非周期的，则通过

延拓视为周期函数.

如上所述,在实际计算中无论时域函数还是频域函数,都是通过人为截断而成为时间或频带有限的信号,这种截断方法相当于与一个矩形窗相乘,其结果是引起变换函数出现波纹,即所谓吉布斯(Gibbs)效应.这种对信号的人为截断所引起的误差是无法避免的.降低误差的方法是增大窗口的宽度,使得被截断部分的函数值尽量小,其代价是增加计算量.

还有一点值得注意:如果通过式(5.4.2)计算场量的时域响应,由于离散傅里叶变换的周期特性,以上所提到的人为截断会引起所求响应函数的终端效应,造成时域响应函数早期波形的破坏.

分析表明,直接利用式(5.4.3)或(5.4.4)进行离散变换的计算量与 N^2 成正比.当 N 很大时,这种计算量是巨大的,往往不现实.在实际应用中往往采用离散傅里叶变换的一种快速算法,称为快速傅里叶变换(FFT).在这种方法中要求 $N=2^n$,其中 n 为整数,其计算量与 $N\log_2 N$ 成正比.

§5.5 奇点展开法

奇点展开法(Singularity Expansion Method,SEM)是一种特殊的求解瞬态电磁场问题的频域法,其特点是先在拉普拉斯变换域内求得解的奇点分布,然后根据复变函数理论求得相应时域解的展开式.由于奇点分布可用于目标识别,人们曾对这种方法寄予厚望,并开展过一定的研究.但由于其理论尚不完善,计算效率也受到比较大的限制,故在瞬变电磁场问题的求解中没有获得广泛的应用.但作为一种思路还是应该有所了解,因此只作简短介绍.

奇点展开法首先由鲍姆(C. E. Baum)于 1971 年提出,最初是通过观察各种电磁散射体的瞬态响应波形发现的,这些波形在后期主要受衰减正弦曲线支配.再联想到以下事实,一个衰减的正弦函数 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t \quad (\alpha > 0),$$

其拉氏变换为

$$L[f(t)] = \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2},$$

它在复平面 p 上有两个极点

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{i}\omega.$$

也就是说,复平面上的一对共轭一阶极点对应时域上的一个衰减正弦振荡.如果时域解是由一系列衰减正弦振荡叠加而成,则它对应着复平面上的一系列一阶极点.于是人们设想,如果先在复平面上找到解所对应的奇点,则通过反演可求得相应的时域解,这就是奇点展开法的初步设想.

马林(L. Marin)从理论上对这一问题进行了早期研究,结果证明在无耗空间中体积有限的理想导体,其散射场在复平面上的奇点为极点.对圆球和长导线而言,极点为一阶的;对其他形状的散射体而言,极点是否为一阶的没有给出理论证明.

对理想导体的散射问题而言,已证明其表面电流满足频域积分方程(5.2.12),根据已知的变换规则,即可得到在拉氏变换域的表达形式.如果仍用原来的符号,则在复频域的积分方程仍可表示为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},p)+\boldsymbol{n}\times \mathrm{P.V.}\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},p)\times\nabla' G\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},p),\quad \boldsymbol{r}\in S. \tag{5.5.1}$$

令 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}$,则上式又可写成

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{n}\times \mathrm{P.V.}\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\times\nabla' G\mathrm{d}S'=\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}. \tag{5.5.2}$$

定义表面积分算子

$$L[\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}]=\boldsymbol{n}\times \mathrm{P.V.}\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}\times\nabla' G\mathrm{d}S',$$

则积分方程(5.5.2)可简化为

$$\left[\frac{1}{2}I-L\right]\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}, \tag{5.5.3}$$

其解即可表示为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}=\left[\frac{1}{2}I-L\right]^{-1}\boldsymbol{J}^{\mathrm{i}}. \tag{5.5.4}$$

于是研究算子 L 的性质就可了解 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 的结构,这要由积分方程的理论研究给出.马林所做的研究指出,对体积有限的理想导电的散射体而言,解 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$[式(5.5.4)]是 p 的亚纯函数,即在复平面 p 上只有可数个极点而无其他类型的奇点,但极点的阶数没有在一般情况下给出证明.

根据亚纯函数的部分公式展开定理,$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 可表示为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},p)=\sum_i\frac{\eta_i(p)\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{r})}{(p-p_i)}+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r},p), \tag{5.5.5}$$

其中 $\boldsymbol{M}_i$ 为整函数,即除∞点外在 p 平面上处处解析的函数;$\boldsymbol{W}$ 主要表示解中高频分量的贡献,在时域上则反映在散射场解波形的早期响应上.式(5.5.5)中的 η_i 为耦合系数,$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{r})$为自然模矢量,$p_i$ 为极点.奇点展开法要解决的问题就是要确定 p_i 的分布,并确定 η_i 和 $\boldsymbol{M}_i$ 等参量.

如果散射体为非理想导体或其体积是非有限的,则极点可能不是一阶的,还可能是支点等其他类型的奇点.这会使问题变得更加复杂,使奇点展开法的有效性更难证明.

奇点展开法的数值计算途径可用相应问题的积分方程的矩量法求解加以说明. 正如在 § 5.2 中所指出的,用矩量法求解散射问题的积分方程时可归结为下述代数矩阵方程的计算

$$Z(p)\cdot J(p)=U(p). \tag{5.5.6}$$

其中 $Z(p)$ 为广义阻抗矩阵,$J(p)$ 为待求电流矢量,$U(p)$ 为源矢量. 方程(5.5.6)的解可表示成

$$J(p)=Z(p)^{-1}U(p). \tag{5.5.7}$$

由矩阵求逆方法可知

$$Z(p)^{-1}=Y(p)/\Delta(p), \tag{5.5.8}$$

其中 $Y(p)$ 为 $Z(p)$ 的伴随矩阵,$\Delta(p)$ 为 $Z(p)$ 的行列式. 由反演定理可知,$J(p)$ 所对应的时域量可表示为

$$J(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\frac{Y(p)}{\Delta(p)}\cdot U(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p. \tag{5.5.9}$$

由此式通过数值计算直接求解,就是一般的频域-时域变换方法. 奇点展开法的特点是,通过由 γ 线及半无限大圆弧线构成闭合回路,使其中包含被积函数的所有奇点,通过对被积函数的解析性分析找出其极点分布,而后通过留数定理求得时域响应. 为了真正求得所需的时域解,人们已经发展了一些方法来确定极点分布,并计算所有参数. 一般情况下这些工作都比较复杂,使得整个问题的计算效率相对低下,与当前已经发展起来的其他直接时域方法相比,其发展前景并不乐观. 由于极点在复平面 P 上的分布只取决于系统本身,而与外部激励无关,从而可用于对系统的分类和识别,故在这方面奇点展开法具有一定的特色.

第六章　时域积分方程法

到现在为止，已讨论的求解时域电磁场问题的解析方法和数值方法，都是先求得频域解再变换为时域解，故均属间接法. 还存在另外一类方法，即直接从时域方程出发而求得电磁场问题的时域解，故称为直接时域法. 这类方法有其独特的优越性，是正在迅速发展中的一类电磁场的数值计算方法.

在各种直接时域法中，时域积分方程法的研究起步最早，主要是由于积分与分段求和的简单关系. 由于早期的方法计算效率不高，没能得到广泛的应用. 时域积分方程法在近期的发展不断克服了存在的问题，已显示出很好的发展前景.

§6.1　时域积分方程的导出

利用时域积分方程法解决时域电磁场问题，首要的当然是导出相应问题所满足的时域积分方程. 下文将以电磁散射问题为例，说明导出时域积分方程的主要方法，如由已知的频域积分方程经傅里叶逆变换而得到其时域形式、由时域麦克斯韦方程出发直接导出，以及用势函数直接加以表达.

6.1.1　由频域积分方程导出时域积分方程

如果已知频域积分方程，可以通过傅里叶逆变换求得相应的时域积分方程. 为具体起见，我们以理想导体散射问题为例讨论这种变换的方法. 根据假定，所有场量的傅里叶逆变换都是存在的.

已在§5.2中给出了理想导体散射问题的频域积分方程(5.2.11)和(5.2.12). 利用频域麦克斯韦方程，可得

$$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{E}}=\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}=-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{J}}.$$

把上式代入方程(5.2.11)中，并把场量与频率的关系清晰地表现出来，就可得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},\omega)+\boldsymbol{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S&[\mathrm{i}\omega\mu\hat{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\hat{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}',\omega)\\&-\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',\omega)\nabla'\hat{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)]\mathrm{d}S'=0,\boldsymbol{r}\in S,\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

$$\boldsymbol{n}\times\hat{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},\omega)+\boldsymbol{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\hat{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}',\omega)\times\nabla'\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},\omega),\quad\boldsymbol{r}\in S.\tag{6.1.2}$$

利用标量函数 $f(t)$和 $g(t)$的卷积定理

$$F[f(t) * g(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F[f(t)]F[g(t)],$$

可以证明,对矢量函数 $\boldsymbol{A}(t)$和 $\boldsymbol{B}(t)$有

$$F[\boldsymbol{A}(t) * f(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F[\boldsymbol{A}(t)] \cdot F[f(t)], \tag{6.1.3}$$

$$F[\boldsymbol{A}(t) \otimes \boldsymbol{B}(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{A}(\tau) \times \boldsymbol{B}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F[\boldsymbol{A}(t)] \times F[\boldsymbol{B}(t)]. \tag{6.1.4}$$

其中 $F[\cdot]$表示傅里叶变换.将以上两式用于方程(6.1.1)和(6.1.2),然后进行傅里叶逆变换.根据假设,傅里叶逆变换可与原积分调换顺序,于是有

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{n} \times \mathrm{P.V.}\int_S \{\mu F^{-1}[\mathrm{i}\omega \hat{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}',\omega)] * F^{-1}[\hat{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)] - F^{-1}[\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}',\omega)] * F^{-1}[\nabla'\hat{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)]\}\mathrm{d}S' = 0,\ \boldsymbol{r} \in S, \tag{6.1.5}$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{n} \times \mathrm{P.V.}\int_S F^{-1}[\hat{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}',\omega)] \otimes F^{-1}[\nabla'\hat{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)]\mathrm{d}S', = \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r} \in S. \tag{6.1.6}$$

其中 $F^{-1}[\cdot]$表示傅里叶逆变换.令 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$,$\boldsymbol{e}_R=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/R$,将 $\hat{G}(R,\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}/4\pi R$ 代入

$$F^{-1}[\nabla'\hat{G}(R,\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \nabla'\hat{G}(R,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

由于

$$\nabla'\hat{G}(R,\omega) = \boldsymbol{e}_R\left[-\mathrm{i}k\hat{G}(R,\omega) + \frac{1}{R}\hat{G}(R,\omega)\right],$$

则有

$$F^{-1}[\nabla'\hat{G}(R,\omega)] = \frac{\boldsymbol{e}_R}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{v} + \frac{1}{R}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega.$$

其中 v 为电磁波的传播速度.利用

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega = \delta\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} -\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega = \frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

可得

$$F^{-1}[\nabla'\hat{G}(R,\omega)] = \frac{\boldsymbol{e}_R}{4\pi R}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R}\right)\delta\left(t-\frac{R}{v}\right), \tag{6.1.7}$$

$$F^{-1}[\hat{G}(R,\omega)] = \frac{1}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi R}\delta\left(t-\frac{R}{v}\right). \tag{6.1.8}$$

再利用以上两式,可得

$$
\begin{aligned}
& F^{-1}[-\mathrm{i}\omega \hat{\boldsymbol{J}}_s(\boldsymbol{r}',\omega)] * F^{-1}[\hat{G}(R,\omega)] \\
&= \frac{1}{4\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\delta\left(t-\frac{R}{v}-\tau\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4\pi R}\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau),
\end{aligned}
\tag{6.1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
& F^{-1}[\hat{\boldsymbol{J}}_s(\boldsymbol{r}',\omega)] \otimes F^{-1}[\nabla'\hat{G}(R,\omega)] \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R}\right)\delta\left(t-\frac{R}{v}-\tau\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R},
\end{aligned}
\tag{6.1.10}
$$

其中 $\tau=t-\dfrac{R}{v}$ 表示延迟时间,$\dfrac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)=\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\Big|_{t=\tau}$.

利用以上结果,由方程(6.1.5)和(6.1.6)可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{n}\times\frac{1}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int_S\bigg\{&\frac{\mu}{R}\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau) \\
&-\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\tau)\bigg\}\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in S,
\end{aligned}
\tag{6.1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{n}\times\frac{1}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int_S\left\{\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{R}\right)\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\times\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}\right\}\mathrm{d}S' \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t),\ \boldsymbol{r}\in S.
\end{aligned}
\tag{6.1.12}
$$

引入等效面电荷

$$
\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}',\tau) = \frac{1}{\varepsilon}\rho_s(\boldsymbol{r}',\tau),
\tag{6.1.13}
$$

方程(6.1.11)可写成如下的形式,即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{n}\times\frac{1}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int_S\bigg\{&\frac{\mu}{R}\frac{\partial}{\partial \tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau) \\
&-\frac{\boldsymbol{e}_R}{\varepsilon R}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{R}\right)\rho_s(\boldsymbol{r}',\tau)\bigg\}\mathrm{d}S',\ \boldsymbol{r}\in S.
\end{aligned}
\tag{6.1.14}
$$

方程(6.1.12)和(6.1.14)分别称为时域磁场积分方程和电场积分方程.

6.1.2 由时域麦克斯韦方程直接导出

时域积分方程也可借助于时域势函数由时域麦克斯韦方程组直接导出.

设在由 ε 和 μ 描述的均匀媒质空间中存在源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\rho(\boldsymbol{r},t)$,则电磁场满足的时域麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t),\tag{6.1.15}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t),\tag{6.1.16}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r},t),\tag{6.1.17}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0.\tag{6.1.18}$$

由于 $\boldsymbol{H}$ 具有无散性，可引入时域矢量势函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$，将 $\boldsymbol{H}$ 表示为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t).\tag{6.1.19}$$

将上式代入方程(6.1.15)，得

$$\nabla\times\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right]=0.\tag{6.1.20}$$

这表明 $\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ 为无旋场. 于是，可引入时域标量势函数 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$，将其表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t).\tag{6.1.21}$$

将式(6.1.19)和(6.1.21)代入方程(6.1.16)，可以得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\left[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{r},t)\right]-\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t).\tag{6.1.22}$$

引入洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{r},t)=0,\tag{6.1.23}$$

便由方程(6.1.22)得到 A 满足的非齐次波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=-\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t).\tag{6.1.24}$$

对式(6.1.21)取散度，并利用方程(6.1.17)和式(6.1.23)，即可得到 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 满足的非齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\varepsilon}\rho(\boldsymbol{r},t).\tag{6.1.25}$$

由此可见，只要由方程(6.1.24)和(6.1.25)分别解得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$，就可以通过式(6.1.19)和(6.1.21)分别求出 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$. 利用满足方程

$$\nabla^2 G-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')\tag{6.1.26}$$

的时域格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')=-\frac{1}{4\pi R}\delta\left(t-t'-\frac{R}{v}\right),\tag{6.1.27}$$

其中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. 方程(6.1.24)和(6.1.25)的解分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= -\mu\int_V\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t')\,\frac{\delta(t-t'-R/v)}{R}\mathrm{d}t'\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}V',\end{aligned} \tag{6.1.28}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_V\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t,t')\rho(\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}V',\end{aligned} \tag{6.1.29}$$

其中 V 是 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 均不为零的区域.

将以上两式代入式(6.1.21),考虑到

$$\nabla R^n = nR^{n-1}\boldsymbol{e}_R(n\in \mathrm{Z}),\quad \nabla f(R) = \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\boldsymbol{e}_R,$$

可得到

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right)\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}\rho(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}V' - \frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}V'. \tag{6.1.30}$$

假设存在以 S 为表面的理想导体,由其上的面电流 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)$和面电荷 $\rho_s(\boldsymbol{r},t)$ 产生的散射场 $\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t)$可根据上式表示为

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right)\frac{\boldsymbol{e}_R}{R}\rho_s(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}S' - \frac{\mu}{4\pi}\int_S\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\mathrm{d}S'. \tag{6.1.31}$$

将场点 $\boldsymbol{r}$ 移至 S 上将出现奇异积分,这时可用主值积分代替上式等号右侧的两项积分. 如果 $\boldsymbol{J}_s$ 和 ρ_s 是由入射场 $\boldsymbol{E}^i$ 和 $\boldsymbol{H}^i$ 所引起的,则在导体表面上应满足边界条件

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}^i+\boldsymbol{E}^s) = 0. \tag{6.1.32}$$

将式(6.1.31)代入上式,便可得到时域电场积分方程(6.1.14).

类似地,可导出时域磁场积分方程(6.1.12).

6.1.3 用势函数直接表示的时域积分方程

考虑一个表面为 S 的理想导体被一脉冲电磁波照射,其表面感生电流为 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)$,由此产生的散射电场 $\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t)$可表示为

$$\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{J}_s) = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \tag{6.1.33}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu\int_S\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}S',\tag{6.1.34}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\int_S\frac{\rho_s(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}S',\tag{6.1.35}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，$\varepsilon$ 和 μ 分别为导体外均匀媒质的介电常量和磁导率，v 为电磁波的传播速度，$v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. $\boldsymbol{J}_s$ 和 ρ_s 满足方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\boldsymbol{r},t)=0,\tag{6.1.36}$$

由此可得

$$\rho_s=-\int_0^t\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s\mathrm{d}\tau.\tag{6.1.37}$$

于是，$\varphi(\boldsymbol{r},t)$可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_S\int_0^{t-R/v}\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)}{4\pi R}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau.\tag{6.1.38}$$

如果用 $\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)$表示入射电场，则在散射体表面 S 上满足边界条件

$$[\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{J}_s)+\boldsymbol{E}^i]_t=\boldsymbol{0},\tag{6.1.39}$$

其中下角标 t 表示 S 上的切向分量. 将式(6.1.33)代入上式，可得到

$$\left[\frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t)\right]_t=\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)\,|_t,\quad 在\ S\ 上.\tag{6.1.40}$$

显然，方程(6.1.40)是以 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)$为未知量的积分方程. 可以认为，这是电场积分方程的一种新形式.

设

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\int_S\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}S',\tag{6.1.41}$$

对方程(6.1.40)取时间偏导数，可得

$$\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}+\nabla\psi(\boldsymbol{r},t)\right]_t=\frac{\partial\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\bigg|_t.\tag{6.1.42}$$

这是电场积分方程的另一种形式.

此外，散射磁场 $\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{r},t)$可由式(6.1.19)表示为

$$\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{J}_s)=\frac{1}{\mu}\nabla\times A,\tag{6.1.43}$$

在 S 上需满足边界条件

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{H}^s(\boldsymbol{J}_s)+\boldsymbol{H}^i],\tag{6.1.44}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 上的外法向单位矢量，$\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{r},t)$为入射磁场. 式(6.1.43)和(6.1.44)就构成以 $\boldsymbol{J}_s$ 为未知量的磁场积分过程. 可以看出，磁场积分方程只能用于闭合的几何结构.

§6.2 任意形状细导线散射问题的时域积分方程法[24]

下面开始以具体问题为例讨论时域积分方程的数值解法. 细导线问题在电磁场理论中具有重要意义,以其为基础的细导线网模型可以模拟任意形状的导体. 现代时域积分方程的数值解方法是,对空间变量采用矩量法,对时间变量则采用有限差分方式,两者的结合形成一种时间步进法. 时间步进方法又分为显式和隐式两种. 为了提高计算效率,又发展了时域平面波法,如同频域积分方程求解中的快速多极子方法.

6.2.1 任意形状细导线问题的描述

考虑长度有限任意弯曲均匀的理想细导线,其半径为 a. 设 a 很小,即当用 $\lambda_{\min}$表示入射波频谱上限频率所对应的波长时,满足 $a\ll\lambda_{\min}$. 在这种情况下,导线表面电流的横向分量可以忽略不计,而仅考虑沿导线轴向流动的部分. 进一步假定导线的表面电流密度是均匀的,导线轴线用曲线坐标 l 表示,则表面电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(l,t)$可表示为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(l,t)=I(l,t)\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{s}}, \tag{6.2.1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{s}}$ 为沿轴线切向的单位矢量.

式(6.1.33)至(6.1.35)给出了散射场由矢量势和标量势构成的表示式. 对细导线而言,矢量势 $\boldsymbol{A}$ 和标量势 φ 化为如下的形式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\mu\int\frac{\hat{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{s}}'I(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}l', \tag{6.2.2}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{q_l(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}l', \tag{6.2.3}$$

其中 $R=(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2+a^2)^{1/2}$,$q_l$ 为线电荷密度. 根据连续性定理,q_l 与电流 I 之间满足

$$\frac{\partial q_l}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial l}. \tag{6.2.4}$$

于是,利用式(6.2.3)和(6.2.4),式(6.1.41)所定义的 ψ 可表示为

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\partial I(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R\partial l}\mathrm{d}l'. \tag{6.2.5}$$

利用以上关系,就可根据给定的入射场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 得到由式(6.1.42)表示的描述细导线散射问题的时域积分方程,其未知量为电流 $I(l,t)$.

6.2.2 显式时间步进法

为了对时域积分方程(6.1.42)进行数值计算,首先要把细导线进行离散化

处理，最简单的是利用直线段构成的折线来近似地模拟弯曲的细导线，如图 6-1 所示：其中(a)图为原细导线的形状；(b)图为用 N 个直线段的近似表示，m 表示任意一段，其位矢为 $\boldsymbol{r}_m$.

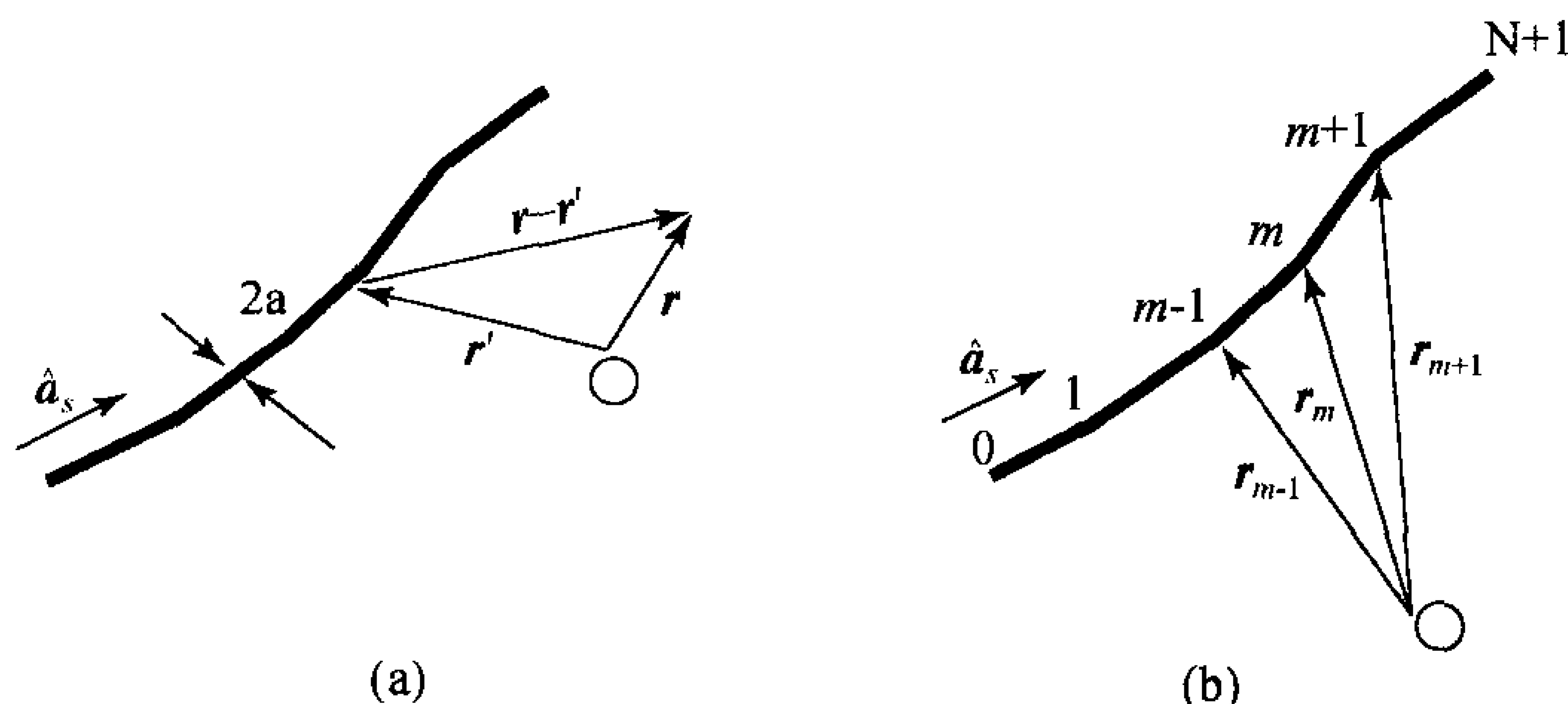


图 6-1　细导线的离散化模型

在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_m$ 处定义单位切向分量 $\hat{\boldsymbol{a}}_{sm}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{sm}=\frac{\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}}{|\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}|}. \tag{6.2.6}$$

对离散后的细导线，时域积分方程的空间部分可用矩量法求解，为此定义基函数

$$f_m(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{r}\in(\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}},\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{6.2.7}$$

若采用伽辽金法，且用矢量函数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的对称积作为其内积，即

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\int\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\mathrm{d}l', \tag{6.2.8}$$

则由式(6.1.42)可得

$$\left\langle f_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm},\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\nabla\psi\right]\right\rangle=\left\langle f_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm},\frac{\partial\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}}{\partial t}\right\rangle, \tag{6.2.9}$$

其中 $f_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm}$为检验函数. 对于时间变量，用间隔 Δt 进行等分，且令 $t_n=n\Delta t,n=0,1,2,\cdots$. 把函数的时间导数用中心差分近似，可以得到

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}\approx\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n+1})-2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})}{\Delta t^2}. \tag{6.2.10}$$

检验函数与矢量势函数的内积可用 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{r}_m$ 的值与所在单元的长度 Δl_m 的乘积近似表示，其中 $\Delta l_m=|\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}|$，即有

$$\langle f_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle\approx\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n)\cdot\Delta l_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm}. \tag{6.2.11}$$

类似地，检验函数与入射波电场的内积取以下近似

$$\left\langle f_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm}, \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}, t_n)}{\partial t} \right\rangle \approx \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m, t_n)}{\partial t} \cdot \Delta l_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm}. \tag{6.2.12}$$

考虑到梯度的单向运算性质，又可得

$$\langle f_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm}, \nabla \psi(\boldsymbol{r}, t_n) \rangle \approx \psi(\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}, t_n) - \psi(\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}, t_n). \tag{6.2.13}$$

利用以上近似，式(6.2.9)可以表示为

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m, t_{n+1}) - 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m, t_n) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m, t_{n-1})}{\Delta t^2}\right] \cdot \Delta l_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm} + \psi(\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}, t_n) - \psi(\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}, t_n) = \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m, t_n)}{\partial t} \cdot \Delta l_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm},$$

$$m = 1, 2, \cdots, N. \tag{6.2.14}$$

所求解的方程的未知函数是沿轴线电流，需要把电流用基函数近似表示，设

$$I(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{k=1}^{N} I_k(t) f_k(\boldsymbol{r}_k), \tag{6.2.15}$$

其中 $I_k(t)$为未知系数，是该方法中的待求量.

把式(6.2.15)代入(6.2.2)，可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t_n) = \mu \int \frac{\hat{\boldsymbol{a}}'_s \sum_{k=1}^{N} I_k(t_n - R/v) f_k(\boldsymbol{r}')}{4\pi R} \mathrm{d}l'$$

$$\approx \mu \sum_{k=1}^{N} I_k(t_n - R_{mk}/v) K_{m,k} \hat{\boldsymbol{a}}_{sk}, \tag{6.2.16}$$

其中

$$K_{m,k} = \int \frac{f_k \mathrm{d}l'}{4\pi R_m}, \tag{6.2.17}$$

$$R_m = (|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2)^{1/2}, \tag{6.2.18}$$

$$R_{mk} = |\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_k|. \tag{6.2.19}$$

而对 $K_{m,k}$的计算不像初看上去那么简单，需要作以下区分，即

$$K_{m,k} = \begin{cases} \dfrac{\Delta l_k}{4\pi(|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2)^{1/2}}, & \text{当 } k \neq m, \\ K_{m,m}, & \text{当 } k = m, \end{cases} \tag{6.2.20}$$

其中

$$K_{m,m} = \frac{1}{4\pi}[l_m \langle s_2 + (s_2^2 + a^2)^{1/2} \rangle - \ln \langle s_1 + (s_1^2 + a^2)^{1/2} \rangle],$$

$$s_1 = |\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}|,$$

$$s_2 = |\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}|. \tag{6.2.21}$$

为了建立时间步进法递推方程，把式(6.2.16)中的 $\boldsymbol{A}$ 表示成

$$\boldsymbol{A} = K_{m,m} I_m(t_n) \hat{\boldsymbol{a}}_{sm} + \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}, t_n), \tag{6.2.22}$$

其中 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ 表示把 $k=m$ 项提出以后 $\boldsymbol{A}$ 的剩余部分. 这样处理后, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ 中的所有元素计算的时间都早于 t_n,因为 $R_{mk} \neq 0$. 也就是说,在计算 $I_m(t_n)$ 之前, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ 中的所有元素都应该是已知的.

最后还需要 $\psi(\boldsymbol{r}_m, t_n)$ 的离散形式,为此把式(6.2.15)代入式(6.2.5),可得

$$\psi(\boldsymbol{r}_m, t_n) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{N} \int \frac{\partial [I_k(t_n - R_m/v) f_k]/\partial l}{4\pi R_m} \mathrm{d}l'. \tag{6.2.23}$$

由于 f_k 是矩形脉冲,其导数为在 $\boldsymbol{r}_{k+\frac{1}{2}}$ 和 $\boldsymbol{r}_{k-\frac{1}{2}}$ 的 δ 函数,并可把它的作用延伸为从 $\boldsymbol{r}_{k-1}$ 到 $\boldsymbol{r}_{k+1}$,这样,式(6.2.23)可表示为

$$\psi(\boldsymbol{r}_m, t_n) = \sum_{k=1}^{N} [\psi^+(\boldsymbol{r}_m, t_n) - \psi^-(\boldsymbol{r}_m, t_n)], \tag{6.2.24}$$

其中

$$\psi^+(\boldsymbol{r}_m, t_n) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{I_k(t_n - R_{mk}^+/v)}{\Delta l_k^+} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\Delta l'}{\sqrt{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2}}, \tag{6.2.25}$$

$$\psi^-(\boldsymbol{r}_m, t_n) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{I_k(t_n - R_{mk}^-/v)}{\Delta l_k^-} \int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\mathrm{d}l'}{\sqrt{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2}},$$

$$R_{mk}^{\pm} = (|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{k\pm\frac{1}{2}}|^2 + a^2)^{1/2},$$

$$\Delta l_k^- = |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1}|,$$

$$\Delta l_k^+ = |\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k|. \tag{6.2.26}$$

至此,所有有关参量都已进行了离散化处理,具备了总体计算的基础. 为了得到时间步进的递推形式的计算程序,把式(6.2.22)代入式(6.2.14),并用 $n-1$ 替代 n,于是便有

$$\begin{aligned} K_{m,m} I_m(t_n) \Delta l_m &= \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m, t_{n-1})}{\partial t} \cdot \Delta l_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm} \\ &\quad - \left[\frac{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}, t_n) - 2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t_{n-1}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t_{n-2})}{\Delta t^2} \right] \cdot \Delta l_m \hat{\boldsymbol{a}}_{sm} \\ &\quad - \psi(\boldsymbol{r}_{m+\frac{1}{2}}, t_{n-1}) + \psi(\boldsymbol{r}_{m-\frac{1}{2}}, t_{n-1}), \\ m &= 1, 2, \cdots, N. \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

该式的左侧各项是 $t=t_n$ 时的值,而其右侧诸项中的元素都是在 t_n 以前的值. 如果令 $n=0$ 和 $n=1$ 时入射场 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 在细导线上引发的电流为零,从 $n=2$ 开始进行计算,而后按步推进至 $n=3,4,5,\cdots$,一直计算到所需的时间段为止,这就是一种时间步进法(marching on in time, MOT).

最后,还有一个重要问题没有解决,就是 Δt 的选取规则. 作为显示时间步进法,必须有 $\Delta t \leqslant R_{\min}/v$,其中 $R_{\min}$ 是所有 $|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_k|$ 中最小者. 如果该条件不能得到

满足，就会使得一个观察点的电流与同一时间间隔内邻近点的电流有关，这就不能再用简单的时间步进法进行计算. 所以，Δt 的选取与空间的离散情况有关，而空间的离散情况又与散射体的形状及入射波的频谱有关.

6.2.3 隐式时间步进法

由于显式时间步进法要求 $\Delta t \leqslant R_{\min}/v$，限定了 Δt 的选取范围，这就直接影响到显式法的计算效率. 就这一点而言，隐式法有其优越性，因为在这种算法中要求 $\Delta t > R_{\min}/v$，但同时出现的问题是在步进过程中需要对矩阵方程求逆.

隐式方法的一种建立过程是从式(6.1.40)出发，针对当前的问题可以把它写成

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \varphi\right] \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s = \boldsymbol{E}^i \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s. \tag{6.2.28}$$

现在，对时间的导数采用向后差分近似，即

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})}{\Delta t} + \nabla \varphi(\boldsymbol{r},t_n)\right] \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s = \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t_n) \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s. \tag{6.2.29}$$

也可以把它写成另一种形式

$$[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n) + (\Delta t)\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)] \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s = [(\Delta t)\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t_n) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})] \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_s. \tag{6.2.30}$$

用与前面同样的方法可以把矢量势函数表示为式(6.2.16)的形式，但现在把 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n)$ 分成两部分

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n) = \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_m,t_n) + \boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_m,t_n), \tag{6.2.31}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{1,2}(\boldsymbol{r}_m,t_n) \approx \mu \sum_{k=1}^{N} I_k(t_R) K_{m,k} \hat{\boldsymbol{a}}_{sk}. \tag{6.2.32}$$

这里 $t_R = t_n - R_{mk}/v$. 对于 $\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}_m,t_n)$，$\Delta t > R_{mk}/v$，故 $t_{n-1} < t_R \leqslant t_n$；而对于 $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}_m,t_n)$，$\Delta t < R_{mk}/v$，故 $t_R < t_{n-1}$. 因此，在计算到 t_n 时段时 $\boldsymbol{A}_1$ 中的元素还是未知的，而 $\boldsymbol{A}_2$ 中的元素都是已知的了.

式(6.2.30)中的 φ 可由式(6.2.3)出发进行离散化处理. 为把电流作为未知量，利用式(6.2.4)可把式(6.2.3)改写成

$$\varphi(\boldsymbol{r}_m,t_n) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \int_{t'=0}^{t_n - R/v} \frac{\partial I(\boldsymbol{r}',t')}{\partial l} \frac{1}{R} \mathrm{d}t' \mathrm{d}l'. \tag{6.2.33}$$

其中 $R = (|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2)^{1/2}$. 利用展开式(6.2.15)，即有

$$\varphi(\boldsymbol{r}_m,t_n) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{k=1}^{N}\int_{t'=0}^{t_n - R_{mk}/v} I_k(t')\mathrm{d}t' \int_l \frac{\partial f_k}{\partial l} \frac{1}{R} \mathrm{d}l'. \tag{6.2.34}$$

把 $\partial f_k/\mathrm{d}l$ 按有限差分近似，可表示为

$$\varphi(\boldsymbol{r}_m,t_n) = \sum_{k=1}^{N}[\varphi_k^+(\boldsymbol{r}_m,t_n) - \varphi_k^-(\boldsymbol{r}_m,t_n)], \tag{6.2.35}$$

其中

$$\varphi_k^+ = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\Delta l_k^+}\int_{t'=0}^{t_R^+} I_k(t')\mathrm{d}t'\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{\mathrm{d}l'}{\sqrt{|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2}}, \tag{6.2.36}$$

$$\varphi_k^- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\Delta l_k^-}\int_{t'=0}^{t_R^-} I_k(t')\mathrm{d}t'\int_{r_{k-1}}^{r_k} \frac{\mathrm{d}l'}{\sqrt{|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}'|^2 + a^2}}, \tag{6.2.37}$$

$$t_R^\pm = \frac{R_{mk}^\pm}{V}$$

$$R_{mk}^\pm = (|\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_{k\pm\frac{1}{2}}|^2 + a^2)^{1/2},$$

$$\Delta l_k^- = |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1}|,$$

$$\Delta l_k^+ = |\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{r}_k|.$$

和分解矢量势的方法一样，也把标量势分解为两部分，即

$$\varphi(\boldsymbol{r}_m,t_n) = \varphi_1(\boldsymbol{r}_m,t_n) + \varphi_2(\boldsymbol{r}_m,t_n). \tag{6.2.38}$$

把以上结果代入式(6.2.30)并写成矩阵形式，则

$$\alpha\boldsymbol{I}(t_n) = \boldsymbol{F}(t_n) + \beta\boldsymbol{I}(t_R). \tag{6.2.39}$$

在该方程中矩阵 α 的元素由势函数的那些项构成，它们的 t_R 满足条件，$t_{n-1} < t_R \leqslant t_n$，$\alpha$ 是个稀疏矩阵，其稀疏程度依赖 Δt 的选择，它的元素 α_{mn} 不是时间的函数，故只需在起始时计算一次.

矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的元素由入射场决定，可像对待矢量势一样地近似计算而得

$$\langle f_m\hat{a}_{sm}, \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t_n)\rangle \approx \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r}_m,t_n)\cdot\Delta l_m\hat{\boldsymbol{a}}_{sm}. \tag{6.2.40}$$

式(6.2.39)中的 $\beta\boldsymbol{I}(t_R)$ 中的元素都满足条件，$t_R \leqslant t_{n-1}$，故在递推中它们是已知的.

由式(6.2.39)不难看出，隐式时间步进法与显式法的最大区别，是在每一时间步都要进行一次矩阵求逆.

6.2.4　计算实例

文献[24]给出了对不同形状细导线散射特性的计算结果，所用的入射波为高斯型的平面波，可表示为

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\frac{4}{T\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\left[\frac{4}{T}(ct-ct_0+\boldsymbol{r}\cdot\hat{a}_z)\right]^2}, \tag{6.2.41}$$

其中 $\hat{a}_z$ 为入射波传播方向的单位矢量，T 为高斯脉冲宽度，$\boldsymbol{E}_0$ 为入射波幅度. 选取 $\boldsymbol{E}_0 = 377\hat{a}_x v/m$，$T = 2\,\mathrm{LM}$，$ct_0 = 3\,\mathrm{LM}$(LM 为光米，等于电磁波在真空中传播 1 米的时间). 考虑 L 形的细导线，各边长 1 m，半径 $a = 10^{-6}$ m，沿 x 和 y 坐

标放置. 当用显式法计算时每一段细导线划分为 10 个单元，而用隐式法时则分成 5 个单元，两种方法的时间步长都选为 0.05 LM. 拐角顶点处的电流计算值随时间的变化由图 6.2 给出. 同时给出的还有用离散傅里叶逆变换(IDFT)法所得的结果.

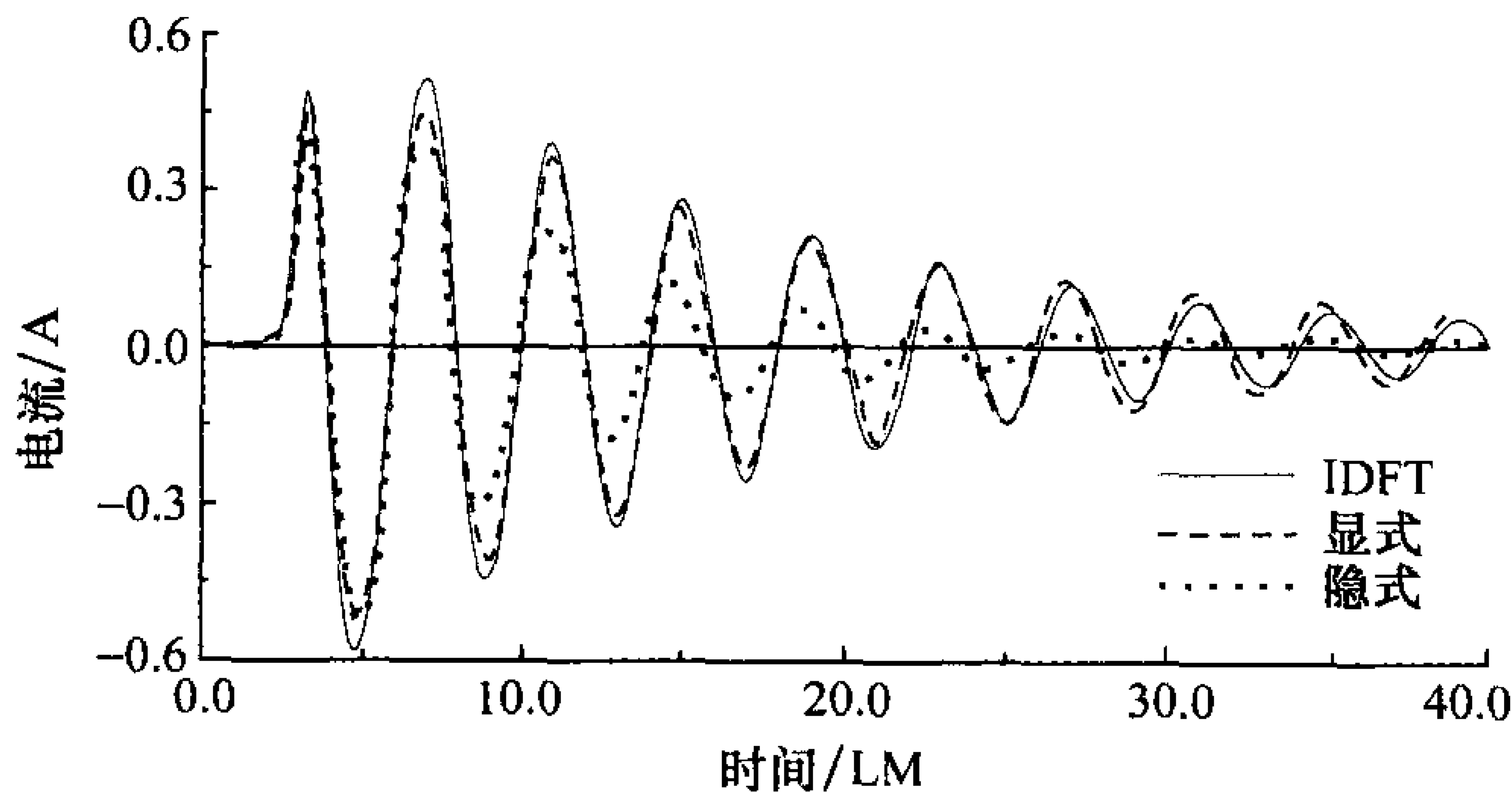


图 6-2 高斯脉冲照射下 L 形细导线上引发的时域电流

由此可以看出，显式法与 IDFT 法所得结果相比符合得较好. 隐式法的结果在早期也与其他两种方法相当一致，但在后期振荡的衰减要快得多. 这一现象的出现是因为隐式法给出更稳定的结果. 文献[24]中所给出的其他结果显示了类似的情况.

§6.3 任意导体散射问题的时域积分方程法[24]

上一节通过细导线散射问题讨论了数值求解时域积分方程的基本原理，说明了显式时间步进法和隐式时间步进法的建立过程. 本节将把以上方法推广到更加复杂的任意形状的三维理想导电散射体的电磁散射问题，以便加深对这些方法的理解，提高使用它们解决问题的能力.

6.3.1 三维导体的离散模型

正如上一节所表明的，用时间步进法求解电磁场的时域积分方程时，是用矩量法处理有关空间变量部分，而对时间变量则采用有限差分法. 用矩量法处理有关空间变量部分与用矩量法求解频域积分方程的做法十分类似.

作为第一步，首先是针对散射体特性选择适当的离散单元. 对理想导体构成的任意形状的三维散射体，平面三角形单元是最合适的离散单元，用平面三角单元逼近散射体表面边界，称为散射体的三角贴片模型. 图 6-3 给出了几种典型的散射体的三角贴片模型.

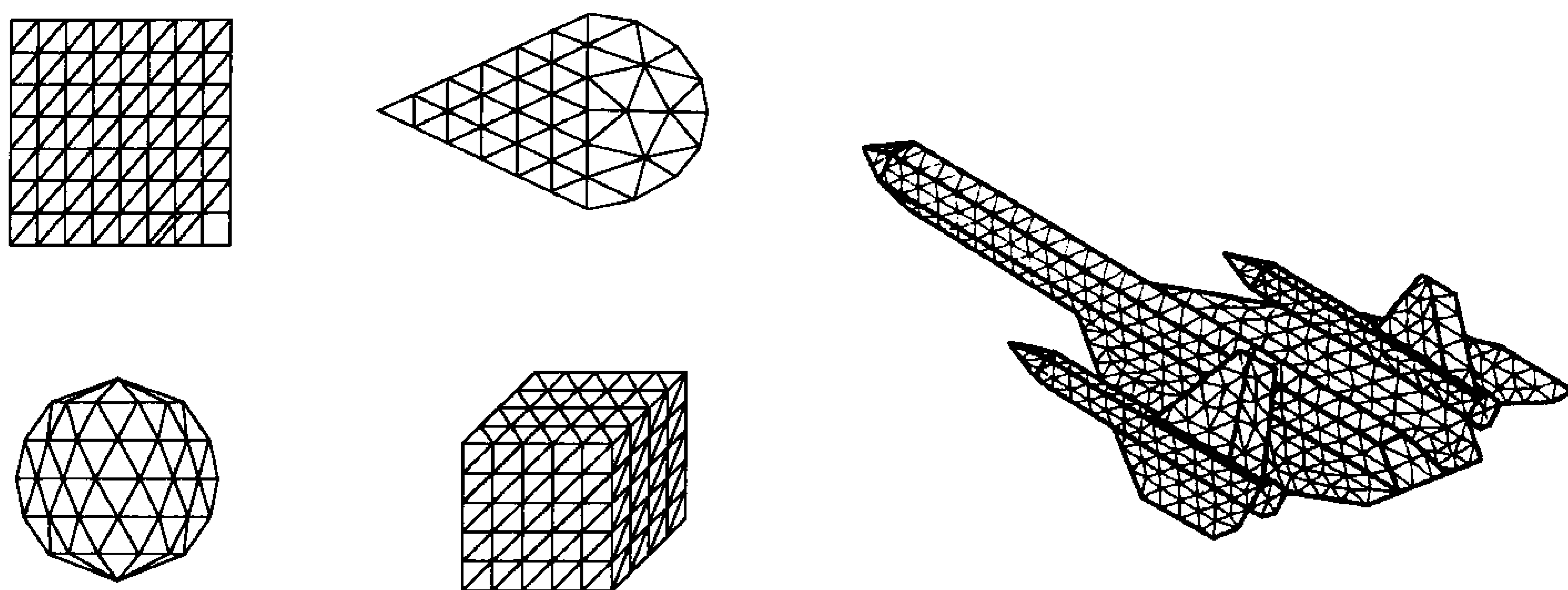


图 6-3　几种典型的散射体的三角贴片模型

为了用矩量法求解时域积分方程，下一个重要问题是针对已确定的离散单元确定合适的基函数. 根据 5.2.3 节中的讨论，显然应选择 RWG 矢量基函数，现在我们用 $\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r})$表示它，其具体形式为

$$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\dfrac{l_m}{2A_m^+}\boldsymbol{\rho}_m^+, & \boldsymbol{r}\in T_m^+,\\ \dfrac{l_m}{2A_m^-}\boldsymbol{\rho}_m^-, & \boldsymbol{r}\in T_m^-,\quad m=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{6.3.1}$$

其中的各参量如图 5-1 所示.

在求解过程中，无论以方程(6.1.40)或(6.1.42)哪一个作为出发点，都需要计算电流密度的面散度，从而需要计算 $\boldsymbol{B}_m$ 的面散度

$$\nabla_s\cdot\boldsymbol{B}_m=\begin{cases}\dfrac{l_m}{A_m^+}, & \boldsymbol{r}\in T_m^+,\\ -\dfrac{l_m}{A_m^-}, & \boldsymbol{r}\in T_m^-,\quad m=1,2,\cdots.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{6.3.2}$$

然后采用伽辽金法，检验函数也采用式(6.3.1)的形式. 时域基函数可有多种选择，这里将采用最简单的等分法，用 Δt 表示时间步长，记为 $t_n=n\Delta t$ $(n=1,2,\cdots,N_t$，N_t 为总的时间步数). 按时间步选取的不同，时域步进法又可分为显式解法和隐式解法. 在显式解法中，要求 $\Delta t\leqslant R_{\min}/v$；在隐式解法中，要求 $\Delta t>R_{\min}/v$ ($R_{\min}$为空间离散点间的最小距离).

6.3.2　显式时间步进法

以方程(6.1.40)为出发点，用向前差分近似表示 $\boldsymbol{A}$ 的时间偏导数，将 $t=t_n$

时刻的方程表示为

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n+1})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)}{\Delta t}+\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)\right]_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t_n)\mid_{\mathrm{t}},\tag{6.3.3}$$

或

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n+1})\mid_{\mathrm{t}}=[\Delta t\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t_n)-\Delta t\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)]_{\mathrm{t}}.\tag{6.3.4}$$

用如式(6.3.1)所示的矢量检验函数对上式作内积运算. 由于 RWG 矢量基函数的方向对三角形面元是切向的,取内积后其法向分量自然消失,因此有

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n+1})\rangle&=\Delta t\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle-\Delta t\langle\boldsymbol{B}_m,\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)\rangle\\&\quad+\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle,\quad m=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{6.3.5}$$

由式(6.3.1)可知

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}\rangle=\int_{T_m^+}\frac{l_m}{2A_m^+}\boldsymbol{\rho}_m^+\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S+\int_{T_m^-}\frac{l_m}{2A_m^-}\boldsymbol{\rho}_m^-\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S.\tag{6.3.6}$$

如果用棱边 m 中点处的值 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m)$ 作为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 的近似值,则有如下近似表示

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}\rangle&\approx\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m)\cdot\left[\frac{l_m}{2A_m^+}\int_{T_m^+}\boldsymbol{\rho}_m^+\mathrm{d}S+\frac{l_m}{2A_m^-}\int_{T_m^-}\boldsymbol{\rho}_m^-\mathrm{d}S\right]\\&\approx\frac{l_m}{2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m)\cdot(\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}+\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-}).\end{aligned}\tag{6.3.7}$$

由矢量恒等式$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{F})=\boldsymbol{F}\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 和 RWG 矢量基函数的性质,可知

$$\langle\boldsymbol{B}_m\cdot\nabla\varphi\rangle=-\int_S\varphi\nabla_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{B}_m\mathrm{d}S.\tag{6.3.8}$$

将式(6.3.2)代入上式,并将 φ 用三角形面元质心处的值 $\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}\pm})$ 近似,即可得到

$$\begin{aligned}-\int_S\varphi\nabla_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{B}_m\mathrm{d}S&=-\left[\frac{l_m}{A_m^+}\int_{T_m^+}\varphi\mathrm{d}S-\frac{l_m}{A_m^-}\int_{T_m^-}\varphi\mathrm{d}S\right]\\&\approx-l_m[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+})-\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-})].\end{aligned}\tag{6.3.9}$$

设 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$ 是散射体不存在时的入射电场,其分布也用棱边 m 中点处的值 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m)$ 近似代替,于是有

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}\rangle\approx\frac{l_m}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}+\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m).\tag{6.3.10}$$

将式(6.3.7),(6.3.9)和(6.3.10)代入方程(6.3.5),并按顺序将 n 换成 $n-1$,则可得到

$$\begin{aligned}&\frac{l_m}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}+\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n)\\&\quad=\frac{l_m\Delta t}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}+\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m,t_{n-1})+l_m\Delta t[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}+},t_{n-1})-\varphi(\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}-},t_{n-1})]\\&\quad\quad+\frac{l_m}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}+}+\boldsymbol{\rho}_m^{\mathrm{c}-})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_{n-1}),\quad m=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{6.3.11}$$

计算 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 需要将未知表面电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$ 作如下近似展开

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k=1}^{N_s}I_k(t)\boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{r}),\tag{6.3.12}$$

其中 $I_k(t)$ 为棱边 k 上的未知电流展开系数，并用来表示电流随时间的变化，N_s 为除边界棱边外 S 面所包含的面元边数. 任意一个三角形面元最多有 3 个非零基函数. 对于特定的棱边 k，相应的基函数 $\boldsymbol{B}_k$ 是唯一对其有电流正交分量的；而与 $T_k^{\pm}$ 其他边相关的电流则与该棱边平行，从而对其正交分量的贡献为零. 因此，$I_k(t)$ 可以被理解为在 t 时刻垂直流向棱边 k 的电流（$\boldsymbol{B}_k$ 在棱边 k 上的正交分量为 1）. 边界棱边之所以能从式(6.3.12)中消去，正是因为满足了垂直于表面边界的电流为零的要求.

考虑 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)$ 在 t_n 时刻的计算. 将式(6.3.12)代入式(6.1.34)，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)=\mu\int_S\frac{\sum_{k=1}^{N_s}I_k(t_n-R/v)\boldsymbol{B}_k(\boldsymbol{r}')}{4\pi R}\mathrm{d}S'\approx\sum_{k=1}^{N_s}I_k(t_n-R_{mk}/v)\boldsymbol{B}_{mk},\tag{6.3.13}$$

其中

$$R_{mk}=|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_k|,\quad \boldsymbol{B}_{mk}=\mu\int_S\frac{\boldsymbol{B}_k}{4\pi R_m}\mathrm{d}S',$$
$$R_m=|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}'|,\quad m=1,2,\cdots,N_s,$$

$\boldsymbol{r}_m$ 和 $\boldsymbol{r}_k$ 分别为棱边 m 和棱边 k 中点处的位矢. 在推导式(6.3.13)的过程中，为了避免繁琐的积分，用 $I_k(t_n-R_{mk}/v)$ 代替了 $I_k(t_n-R/v)$，这是以假定在 $T_k^{\pm}$ 内电流的变化不明显为前提的. 当 $m=k$ 时，$R_{mk}=0$. 令 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t_n)$ 表示分离出这一项后的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)$，即有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)=\boldsymbol{B}_{mm}I_m(t_n)+\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r},t_n).\tag{6.3.14}$$

对 t_n 时刻 $\varphi(\boldsymbol{r},t_n)$ 的计算，可进行类似的处理. 将式(6.3.12)代入式(6.1.38)，可得

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r},t_n)&=-\frac{1}{\varepsilon}\int_S\int_0^{t_n-R/v}\frac{\sum_{k=1}^{N_s}I_k(\tau)\,\nabla'\cdot\boldsymbol{B}_k}{4\pi R}\mathrm{d}S'\mathrm{d}\tau\\&\approx-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_s}\int_0^{t_R^{c+}}I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\int_{T_k^+}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{B}_k}{4\pi R_m^{c+}}\mathrm{d}S'-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_s}\int_0^{t_R^{c-}}I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\int_{T_k^-}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{B}_k}{4\pi R_m^{c-}}\mathrm{d}S'\\&\approx\sum_{k=1}^{N_s}\left[\int_0^{t_R^{c+}}I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\varphi_{mk}^{c+}+\int_0^{t_R^{c-}}I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\varphi_{mk}^{c-}\right],\end{aligned}\tag{6.3.15}$$

其中

$$t_R^{c\pm}=t_n-R_{mk}^{c\pm}/v,\quad R_{mk}^{c\pm}=|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}_k^{c\pm}|,$$

$$\varphi_{mk}^{c\pm}=-\frac{l_k}{\varepsilon A_k^{\pm}}\int_{T_k^{\pm}}\frac{1}{4\pi R_m^{\pm}}\mathrm{d}S',\quad R_m^{\pm}=|\boldsymbol{r}_m-\boldsymbol{r}'|,\qquad m=1,2,\cdots,N_s.$$

如果用 $\boldsymbol{r}_m^{c\pm}$ 替换式(6.3.15)中的 $\boldsymbol{r}$,则可计算面元质心处的 φ.

这时,方程(6.3.11)中的各项均可计算.考察该式可以发现,只有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n)$ 这一项要在 t_n 时刻计算,而其他各项都是取 t_{n-1} 时刻的值,而这些值假定都是已知的.于是,只要保证对所有的 m 和 $k(m\neq k)$ 选取 $\Delta t<R_{mk}/v$,就可由此得到时域电场积分方程的一种显式解.再应用式(6.3.14),可得

$$\frac{l_m}{2}\boldsymbol{B}_{mm}\cdot(\boldsymbol{\rho}_m^{c+}+\boldsymbol{\rho}_m^{c-})I_m(t_n)=\frac{l_m\Delta t}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{c+}+\boldsymbol{\rho}_m^{c-})\cdot\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r}_m,t_{n-1})-\frac{l_m}{2}(\boldsymbol{\rho}_m^{c+}+\boldsymbol{\rho}_m^{c-})\cdot[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_n)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m,t_{n-1})]+l_m\Delta t[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{c+},t_{n-1})-\varphi(\boldsymbol{r}_m^{c-},t_{n-1})].\tag{6.3.16}$$

这是用已知电流计算未知电流的迭代格式,用于计算 $m=1,2,\cdots,N_s$ 时 $t=t_n$ 时刻的电流,然后再推进一个时间步,计算 t_{n+1} 时刻的电流.依此类推,充分体现出步进解法的特点.

6.3.3 隐式时间步进法

为了导出方程(6.1.40)的隐式解,用向后差分近似表示 $\boldsymbol{A}$ 的时间偏导数,在 t_n 时刻有

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})}{\Delta t}+\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)\right]_{\mathrm{t}}=[\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t_n)]_{\mathrm{t}},\tag{6.3.17}$$

或

$$[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)+\Delta t\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)]_{\mathrm{t}}=[\Delta t\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t_n)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})]_{\mathrm{t}}.\tag{6.3.18}$$

仍用显式解法中的矢量检验函数对上式作内积运算,有

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle+\langle\boldsymbol{B}_m,\Delta t\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t_n)\rangle=\langle\boldsymbol{B}_m,\Delta t\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle+\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})\rangle,\quad m=1,2,\cdots.\tag{6.3.19}$$

上式还可改写为

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle-\langle\nabla\cdot\boldsymbol{B}_m,\Delta t\varphi(\boldsymbol{r},t_n)\rangle=\langle\boldsymbol{B}_m,\Delta t\boldsymbol{E}^{i}(\boldsymbol{r},t_n)\rangle+\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t_{n-1})\rangle,\quad m=1,2,\cdots.\tag{6.3.20}$$

由于近似处理与显式解法有所不同,所以二者的内积表达式有一定的差异.由式(6.3.1)可知

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}\rangle=\int_{T_m^+}\frac{l_m}{2A_m^+}\boldsymbol{\rho}_m^+\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S+\int_{T_m^-}\frac{l_m}{2A_m^-}\boldsymbol{\rho}_m^-\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S,\tag{6.3.21}$$

这里以在 $T_m^\pm$ 质心处的值 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c\pm})$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的近似值,这比用三角形面元棱边中点处的值近似更有效,因为任意一个三角形面元的三条边可用同一个被积函数表示.这时,有

$$\langle\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{A}\rangle\approx\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c+})\cdot\left[\frac{l_m}{2A_m^+}\int_{T_m^+}\boldsymbol{\rho}_m^+\mathrm{d}S\right]+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c-})\cdot\left[\frac{l_m}{2A_m^-}\int_{T_m^-}\boldsymbol{\rho}_m^-\mathrm{d}S\right]$$

$$\approx \frac{l_m}{2}[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c+}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c+} + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c-}) \cdot \boldsymbol{\rho}_m^{c-}]. \tag{6.3.22}$$

与显式解法作相同的近似，有

$$\langle \boldsymbol{B}_m \cdot \nabla\varphi \rangle \approx -l_m[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{c+}) - \varphi(\boldsymbol{r}_m^{c-})]. \tag{6.3.23}$$

再用面元质心处的值 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{c\pm})$ 近似地表示 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}$，得

$$\langle \boldsymbol{B}_m, \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} \rangle \approx \frac{l_m}{2}[\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{c+}) + \boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{c-})]. \tag{6.3.24}$$

将以上三式代入方程(6.3.20)，并按顺序将 n 换成 $n-1$，则可得到

$$\begin{aligned}
&\frac{l_m}{2}[\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c+}, t_n) + \boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c-}, t_n)] - \Delta t l_m[\varphi(\boldsymbol{r}_m^{c+}, t_n) - \varphi(\boldsymbol{r}_m^{c-}, t_n)] \\
&\quad = \frac{l_m \Delta t}{2}[\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{c+}, t_n) + \boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r}_m^{c-}, t_n)] \\
&\qquad + \frac{l_m}{2}[\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c+}, t_{n-1}) + \boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_m^{c-}, t_{n-1})], \quad m = 1, 2, \cdots.
\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

仍将未知表面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 按式(6.3.12)展开. 将式(6.3.13)和(6.3.14)代入方程(6.3.25)，经整理可得

$$\sum_{k=1}^{N_S} z_{am,k}(t_n) + \Delta t \sum_{k=1}^{N_S} z_{bm,k}(t_n) = F_m(t_n) + \sum_{k=1}^{N_S} z_{am,k}(t_{n-1}), \quad m = 1, 2, \cdots, N_s, \tag{6.3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}
z_{am,k}(t_n) = {} & I_k(t_R^{c++})\left(\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^+}\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \int_{T_k^+} \frac{\boldsymbol{\rho}_k^+}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}S'\right) \\
& + I_k(t_R^{c+-})\left(\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^-}\boldsymbol{\rho}_m^{c+} \cdot \int_{T_k^-} \frac{\boldsymbol{\rho}_k^-}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}S'\right) \\
& + I_k(t_R^{c-+})\left(\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^+}\boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \int_{T_k^+} \frac{\boldsymbol{\rho}_k^+}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c-} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}S'\right) \\
& + I_k(t_R^{c--})\left(\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^-}\boldsymbol{\rho}_m^{c-} \cdot \int_{T_k^-} \frac{\boldsymbol{\rho}_k^-}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c-} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}S'\right),
\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

$$\begin{aligned}
z_{bm,k}(t_n) = {} & \left(\int_0^{t_R^{c++}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^+}\int_{T_k^+} \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|}\right) \\
& - \left(\int_0^{t_R^{c+-}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^-}\int_{T_k^-} \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|}\right) \\
& - \left(\int_0^{t_R^{c-+}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^+}\int_{T_k^+} \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|}\right) \\
& + \left(\int_0^{t_R^{c--}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\left(\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^-}\int_{T_k^-} \frac{\mathrm{d}S'}{4\pi |\boldsymbol{r}_m^{c+} - \boldsymbol{r}'|}\right),
\end{aligned} \tag{6.3.28}$$

$$t_R^{c\pm\pm} = t_n - R_{mk}^{c\pm\pm}/v, \quad R_{mk}^{c\pm\pm} = |\boldsymbol{r}_m^{c\pm} - \boldsymbol{r}_k^{c\pm}|,$$

$F_m(t_n)$表示 t_n 时刻的式(6.3.24).

在隐式解法中,Δt 的选择与散射体的离散化无关. 当用方程(6.3.26)计算 t_n 时刻的电流时,直到 t_{n-1}时刻的电流都是已知的. 若式(6.3.27)和(6.3.28)中的某些项满足 $\Delta t \leqslant R_{mk}^{c\pm\pm}/v$,将这些已知项移至方程(6.3.26)等号右侧,未知项仍保留在等号左侧,则方程(6.3.26)可写成

$$\sum_{k=1}^{N_s} \alpha_{m,k} I_k(t_n) = F_m(t_n) + \sum_{k=1}^{N_s} \beta_{m,k} I_k\left(t_{n-1} - \frac{R_{mk}^{c\pm\pm}}{v}\right), \quad m = 1,2,\cdots,N_s, \tag{6.3.29}$$

其中 $\alpha_{m,k}$和$\beta_{m,k}$分别为矩阵α 和β 的元素,其表达式不难由相关方程导出. α 是稀疏矩阵,其稀疏程度与 Δt 有关. 由于该矩阵不是时间的函数,故只需在初始时刻计算一次. 通过迭代法求解方程(6.3.29),即可获得散射体表面上的电流.

6.3.4 时间步进法在三维散射问题中的应用

文献[24]中给出了在平面波高斯脉冲照射下图 6-3 中所示各类导体上所引发的电流,这里仅给出对导体球的计算结果.

入射波仍如式(6.2.41)所示,但入射波方向选为 $-\hat{a}_z$,$\boldsymbol{E}_0 = 120\pi\hat{\boldsymbol{a}}_x$,$T = 4\,\text{LM}$,$ct_0 = 6\,\text{LM}$. 球体的半径为 0.25 m,球心位于坐标原点,球面沿 θ 和 φ 方向分别分为相等的 4 份和 8 份,共有 72 个未知量. 图 6-4 给出了三种方法的计算结果,其中 J_θ 为赤道上 ϕ 为 22.5°处的电流,在用显式法计算时,时间步选得很小,为 0.033825 LM. 因此为了计算 15 LM 时段内的结果,计算超过了 450 步. 对同一网格模型,用隐式法计算时选择时间步长达 0.3 LM,因而只需计算 50 步. 该例已清楚地显示了隐式时间步进法的优越性.

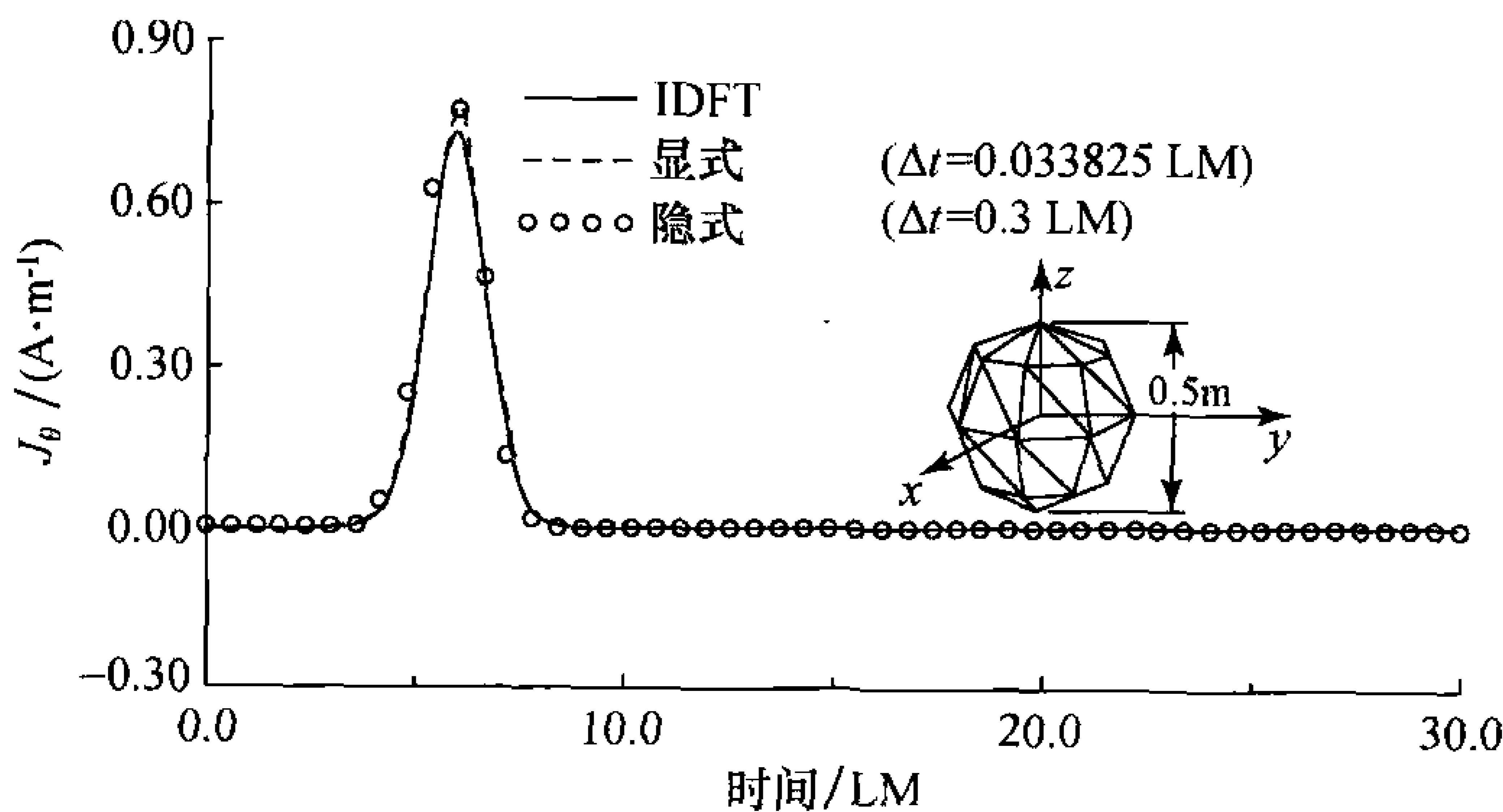


图 6-4 对球体的计算结果

6.3.5　时间步进法的稳定性和计算效率

用显式时间步进法解电磁场问题的时域积分方程存在的一个问题——即使满足稳定性条件，在解的后期有时还会出现不稳定现象，其形式是幅度呈指数增长的振荡，振荡周期与时间步长有关．时间步进法出现不稳定的原因是，得到的代数方程所对应的齐次方程包含指数函数形式的解，但是这些振荡能够被激发还是由于计算中误差的积累．计算中的有限差分对误差的增长起主要作用，尤其是 $1/\Delta t$ 因子会把误差放大．迭代计算使误差积累随时间步的推进而增长，减小 Δt将使误差的放大量更大，从而使振荡更早出现．在高斯脉冲作用下，球体散射问题中散射磁场的一种不稳定现象如图 6-5 所示．

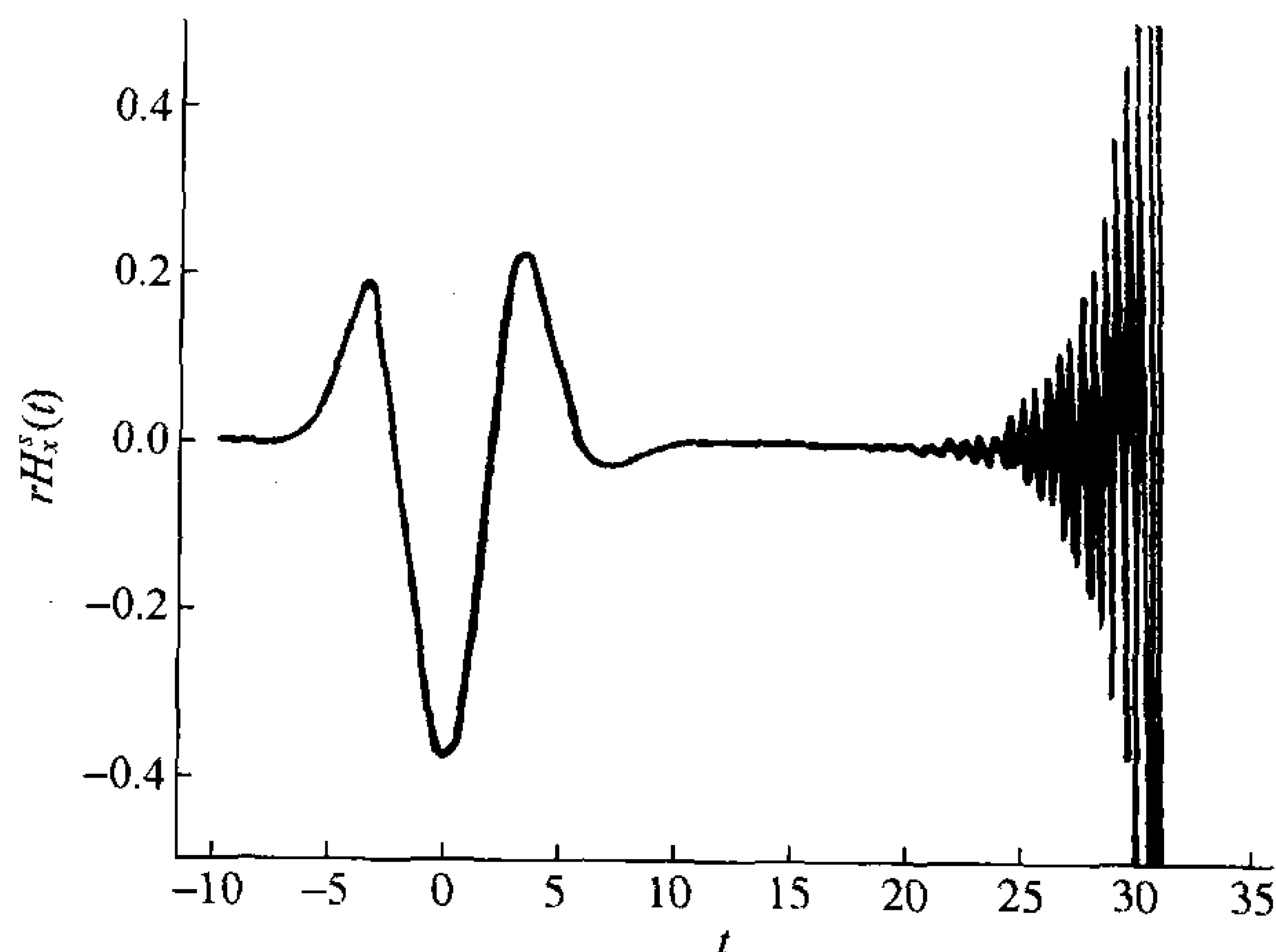


图 6-5　一种不稳定现象

与显式法不同，隐式法理论上是稳定的．而且由于在隐式法中取 $\Delta t > R_{\min}/v$，也可提高计算效率．除此以外，隐式法还有以下特点：

首先，在隐式解法中，所有场量都在三角形面元的质心处取值．未知电流系数与棱边相关，这意味着对方程(6.3.26)变换后的总矩阵元与由棱边 m 和棱边 k 构成的棱边对相关，将位于与棱边 m 对应的三角形面元质心的观察点和与棱边 k 对应的三角形面元中的源点联系起来．计算总矩阵元的积分对于与同一面元对相关的任意棱边对是相同的．比单独计算总矩阵中每个元素更为有效——先计算所有与每个观察点和源点所在的面元相关的矢量势函数和标量势函数，然后选择适当的权函数，并代入与这些面元对相关的各棱边所对应的矩阵元素．这种算法比直接计算每条棱边所对应的矩阵元的效率提高数倍．

当散射体足够长（如几个脉冲宽度）时，更有效的方法是先求出延迟时间和计算矩阵元前的瞬间电流．如果电流低于按脉冲电流峰值所设定的门限，就可避免总矩阵元的计算．当散射体为电大目标时，如果能用简单的几何光学法确定物

理上的阴影区，即可消除该区域矩阵元的计算.

近年来，由于隐式解法允许选取更大的时间步长，时域积分方程的直接求解引起了科学家的浓厚兴趣.选择适当的时间步长，还可避免后期不稳定性.由于显式解法受到数值稳定性条件的限制，离散网格空间确定后，最大的时间步长也就被限定了.研究表明，显式解法即使满足 Courant 稳定性条件也易于产生后期不稳定，这是因为其时间步长较短.此外，尽管取电流对空间变量和时间变量的平均可能会延缓甚至消除不稳定现象，但是对某种特定网格适用的消除不稳定的方法不一定适用于其他网格.

尽管隐式解法可以取较大的时间步长，但由于在每一时间步都需要对矩阵求逆，影响了计算复杂度.总体来说，用时间步进解法求解时域积分方程的计算复杂度约为 $O(N_tN_S^2)$，其中 N_t 为时间取样数，N_S 为空间取样点数.

显然，对瞬变电磁场问题而言，时域积分方程的时间步进法是一种直接时域方法，这种方法与上一章讨论的频域-时域变换法有很大不同.频域方法分析瞬变电磁场问题时，对每个频率样点都要对一个满阵求逆.显式时间步进法没有矩阵求逆问题；隐式时间步进法在进行中每一步都要对矩阵求逆，但这矩阵可能是高度稀疏的.

频域法的优点在于，所得代数方程的系数矩阵与入射波无关，对于不同形式的入射波，只要求得了各有关频率点的结果，频域数据则不需要重复计算，只需按频谱加权进行逆变换，即可得到对应新入射波的时域解.对直接时域方法而言，对不同的入射波都要重新进行计算.如果只需某一较短时间段的时域响应，则用直接时域法比较有利，因为若用频域法则仍然需要整个频谱范围内的频域信息，计算量一点也不能减少.

尽管时域积分方程的时间步进法具有一定的优越性，但对电大目标散射特性的计算量还是非常巨大，甚至利用很先进的计算机也无法完成，这仍然限制着这种方法的广泛应用.

§6.4 时域平面波法[21]

在用矩量法求解频域积分方程时，应用快速多极子方法提高了计算效率，其主要原理是把源的场展开为一组平面波的叠加.为了加快时域积分方程的求解，相应发展了类似的方法，称为时域平面波法(Plane-Wave Time-Domain, PWTD)，其原理是把瞬态场展开成平面波表示.实践证明，把时域平面波法与时间步进法相结合，大大提高了时域积分方程的计算效率，其计算复杂度可降至 $O(N_tN_S\log N_S)$.

6.4.1 时域平面波法原理

本小节将局限于讨论一个时间有限宽度源信号的展开问题，但这一要求并

不限制它的应用. 因为,任意源信号 $q(\boldsymbol{r},t)$ 总可以划分成子信号的叠加

$$q(\boldsymbol{r},t) = \sum_{l=1}^{L} q_l(\boldsymbol{r},t), \tag{6.4.1}$$

其中设定每一个子信号 $q_l(\boldsymbol{r},t)$ 在区间 $(l-1)T_s \leqslant t < lT_s$ 之外为零. 若源信号 $q_l(\boldsymbol{r},t)$ 所激发的场用 $u_l(\boldsymbol{r},t)$ 表示,则对线性时不变系统而言,总场 $u(\boldsymbol{r},t)$ 为

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_{l=1}^{L} u_l(\boldsymbol{r},t), \tag{6.4.2}$$

而 $u_l(\boldsymbol{r},t)$ 就可以用时域平面波法来处理.

参照式(1.4.14),源与场的关系可表示为

$$\begin{aligned} u_l(\boldsymbol{r},t) &= \int_V \frac{q_l(\boldsymbol{r}',t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}V' \\ &= \int_V \frac{\delta(t-R/v)}{4\pi R} * q_l(\boldsymbol{r}',t),\mathrm{d}V', \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

其中 $*$ 表示时间卷积.

时域平面波法的关键是利用展开式

$$\tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{8\pi^2 v}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_S \delta[t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')/v] * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{6.4.4}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta$ 是单位方向矢量. 该式把 $\tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t)$ 表示成沿所有方向传播的平面波的叠加. 通过积分可揭示 $\tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t)$ 和 $u_l(\boldsymbol{r},t)$ 之间的关系,为此采用新的坐标系统 (x',y',z') 和对应的 (θ',φ',ρ'),这时的 z' 坐标设定沿 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 方向. 在新坐标系中 $\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{R}=R\cos\theta'$,其中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$. 经计算,可发现

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{1}{8\pi^2 v}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{R}/v) * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 v}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_0^{\pi}\sin\theta'\delta(t-R\cos\theta'/v) * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\theta' \\ &= -\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\int_{-R/v}^{R/v}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-\tau)}{4\pi R} * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_S \frac{\delta(t-R/v)}{4\pi R} * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \int_S \frac{\delta(t+R/v)}{4\pi R} * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ &= u_l(\boldsymbol{r},t) - \int_S \frac{\delta(t+R/v)}{4\pi R} * q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

这就说明,$\tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t)$ 与 $u_l(\boldsymbol{r},t)$ 之间只差一个附加项,该项所代表的信号违反因果律,因为它在源信号存在之前在观察点就出现了,故称它为妖信号. 如果信号持续时间 T_s 比 R/v 短,则在观察点出现任何真实场 $u_l(\boldsymbol{r},t)$ 之前它就消失了,这一

条件保证了真实信号与妖信号永不交叠.也就是说,选择 $T_s(<R/v)$作为子信号的持续时间,就可以置妖信号于时间门之外.

为了构造式(6.4.4)瞬变场的快速算法,考虑限制在以 R_s 为半径的球内的源和位于相同半径之内的任意观察点,两个球的中心位置分别用 $\boldsymbol{r}_s$ 和 $\boldsymbol{r}_o$ 表示,并令 $\boldsymbol{R}_c=\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{r}_s$,且假定 $R_c=|\boldsymbol{R}_c|>2R_s$.也就是说,源和观察点所在的球互不重叠,如图 6-6 所示.

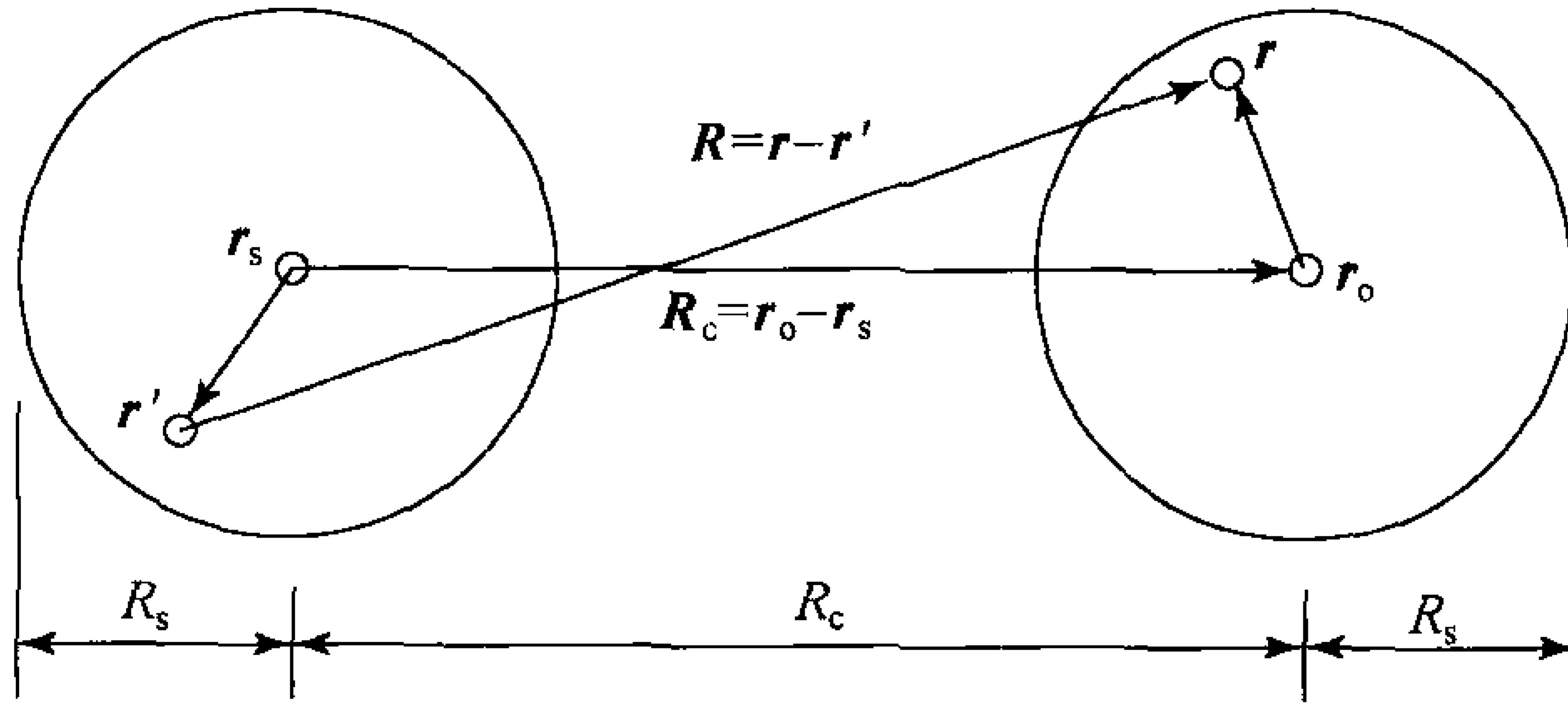


图 6-6 源和观察点相互位置的表示

由于 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$可分解为

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_o)+(\boldsymbol{r}_o-\boldsymbol{r}_s)-(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_s),$$

则式(6.4.4)可表示成

$$\tilde{u}_l(\boldsymbol{r},t)=\oint\Big\{\delta[t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_o)/v]*T(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{R}_c,t) * \Big\{\int_s\delta[t+\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'_s)/v]*q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\Big\}\Big\}\mathrm{d}\Omega, \quad (6.4.6)$$

其中 $\oint\mathrm{d}\Omega=\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$ 表示在单位球上的积分,而函数 $T(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{R}_c,t)$的具体内容则是

$$T(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{R}_c,t)=-\frac{1}{8\pi^2v}\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{R}_c/v). \quad (6.4.7)$$

积分式(6.4.6)可分为 3 个步骤实现:

(1) 首先,完成最右侧的卷积和积分,并令

$$q_l^{\text{out}}(\hat{\boldsymbol{k}},t)=\int_S\delta[t+\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_s)/v]*q_l(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad (6.4.8)$$

该部分可解释为外行射线,它们沿方向 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 离开源所在的球,所有 $q_l^{\text{out}}(\hat{\boldsymbol{k}},t)$一起提供源的瞬态远场模式.

(2) 第二步完成式(6.4.6)的中心部分的卷积,即

$$q_l^{\text{in}}(\hat{\boldsymbol{k}},t)=T(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{R}_c,t)*q_l^{\text{out}}(\hat{\boldsymbol{k}},t). \quad (6.4.9)$$

算子 $T(\hat{\boldsymbol{k}},\boldsymbol{R}_c,t)*$ 把每个离开源所在球的射线转移到观察球,故称 $q_l^{\text{in}}(\hat{k},t)$为进

入的射线.

(3) 最后,完成式(6.4.6)中最左边的卷积和积分,亦即

$$\bar{u}_l(\boldsymbol{r},t)=\oint\delta[t-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_o)/v]*q_l^{in}(\hat{\boldsymbol{k}},t)\mathrm{d}\Omega, \tag{6.4.10}$$

也就是叠加所有投射到观察点的入射射线.

正如已指出的,源和观察点之间的距离为子信号的时段设定了一个上限,考虑到所设置的球内源与球内观察点之间的最近位置,选 $T_s<(R_c-2R_s)/v$ 就是设定一个合适的时间门限而消除妖信号. 这一条件意味着: 对于 $t<lT_s$, $u_l(\boldsymbol{r},t)=0$; 而 $t\geqslant lT_s$ 时, $u_l(\boldsymbol{r},t)=\bar{u}_l(\boldsymbol{r},t)$.

6.4.2 理想导体散射问题的混合时域积分方程

下面将讨论时域平面波法如何具体地应用于时域积分方程的求解. 因为应用的例子是电磁散射问题的混合积分方程,故先就此问题加以讨论.

为了消除内谐振现象,在求解频域积分方程时采用了混合积分方程. 在时域中也有类似的做法,即采用混合时域积分方程.

利用式(6.1.23),可将电场积分方程(6.1.42)改写为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{I}-v^2\nabla\nabla\right)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\Big|_t=\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)\Big|_t,$$

或

$$\left[\int_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\boldsymbol{I}-v^2\nabla\nabla\right)\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t')\mathrm{d}t'\right]_t=\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t')\mid_t, \tag{6.4.11}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位并矢. 将式(6.1.34)代入上式,得

$$\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_0^t\mathrm{d}t'\int_S\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\boldsymbol{I}-v^2\nabla\nabla\right)\cdot\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t'-R/v)}{R}\mathrm{d}S'\right]_t=\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)\mid_t. \tag{6.4.12}$$

令

$$L_e\{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)\}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\times\left[\frac{\mu}{4\pi}\int_0^t\mathrm{d}t'\int_S\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\boldsymbol{I}-v^2\nabla\nabla\right)\cdot\frac{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',t'-R/v)}{R}\mathrm{d}S'\right], \tag{6.4.13}$$

则方程(6.4.12)的一种等价形式可写为

$$L_e\{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)\}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in S(\text{即 } S_+ \text{ 和 } S_-), \tag{6.4.14}$$

其中 S_+ 和 S_- 分别表示 S 的外表面和内表面.

类似地,将式(6.1.34)代入式(6.1.43),令

$$L_h\{\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)\}=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{n}\times\int_S\left[\frac{1}{vR^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)+\frac{1}{R^3}\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}',\tau)\right]\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S', \tag{6.4.15}$$

并利用

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in S_{-},$$

可将由式(6.1.43)和(6.1.44)构成的磁场积分方程写为

$$L_{\mathrm{h}}\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in S_{-}.\tag{6.4.16}$$

一种有效的混合时域积分方程具有如下形式，即

$$L_{\mathrm{c}}\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\}=-\frac{\alpha}{\eta}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{r}\in S_{-},\tag{6.4.17}$$

其中
$$L_{\mathrm{c}}\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\}=-\frac{\alpha}{\eta}L_{\mathrm{e}}\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\}+L_{\mathrm{h}}\{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\},\tag{6.4.18}$$

式中 α 是实数因子，η 是外部空间媒质的特征阻抗.[7]

6.4.3 时域平面波法用于求解时域积分方程

与快速多极子方法类似，时域平面波法也采用单元分组的方式，将不同的单元区别对待，以降低计算复杂度. 为此，首先用一虚拟的立方体盒子包围散射体，并将盒子分成若干个相等的立方体单元，每个单元都有一个半径为 R_s 的外接球. 将包含在每个立方体单元中的基函数称为一个组，并将每个非空立方体单元用 $\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N_g)$ 标记. 然后，根据设定的立方体单元中心间的距离标准将立方体单元对 (α',α) 分为"近场"组和"远场"组. 属于"近场"组的基函数间的相互作用按经典的步进解法计算，而属于"远场"组的基函数间的相互作用则采用时域平面波法计算. 时域平面波法的基础是将任一观察点的场表示为平面波的叠加，只要该观察点距离源的分布足够远.

"远场"组中的一个立方体单元对如图 6-7 所示，其中包含基函数 $\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r})$ $(n=1,2,\cdots)$ 的单元 α' 称为源盒，包含基函数 $\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r})(m=1,2,\cdots)$ 的单元 α 称为观察盒，其外接球就称为观察球. 两个盒子中心的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{c}}$ 和 $\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}}$，连接两个中心的矢量记为 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{r}_m^{\mathrm{c}}-\boldsymbol{r}_n^{\mathrm{c}}$，$R_{\mathrm{c}}=|\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}|$.

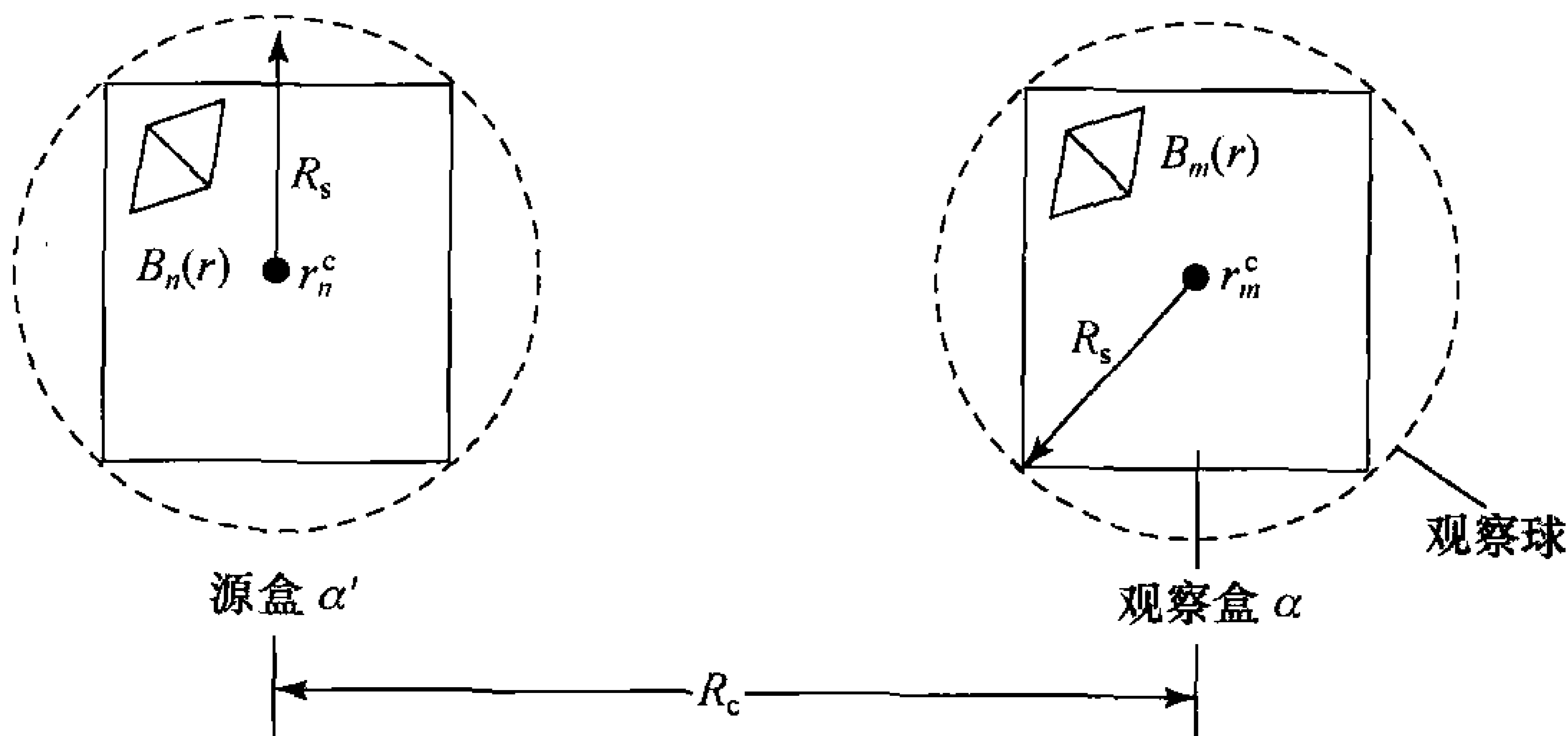


图 6-7 "远场"组中的一个立方体单元对

为了方便，将与源基函数相关的电流表示成

$$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{r},t)=\sum_{i=1}^{N_t}I_{ni}T_i(t)\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r})=f_n(t)\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}),\quad n=1,2,\cdots,\tag{6.4.19}$$

其中 I_{ni} 为棱边 n 上的未知电流展开系数；T_i 为时间展开系数，将 $f_n(t)$ 均匀分成相连的 P 段，每段记为 $f_{nl}(t)(l=1,2,\cdots,P)$、定义时间段 $T_P=(N_t/P+1)\Delta t$（N_t 为总的时间步数），其中包含子时间段

$$T_{l\text{sta}}\leqslant t\leqslant T_{l\text{sto}},\quad l=1,2,\cdots,P,$$
$$T_{l\text{sta}}=(l-1)(N_t/P)\Delta t,$$
$$T_{l\text{sto}}=(lN_t/P+1)\Delta t.$$

这样，$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{r},t)$ 又可写为

$$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{r},t)=\sum_{l=1}^{P}\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t),\tag{6.4.20}$$

其中

$$J_{nl}(\boldsymbol{r},t)=f_{nl}(t)\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}),$$

$$f_{nl}(t)=\sum_{i=(l-1)N_t/P+1}^{lN_t/P}I_{ni}T_i(t).\tag{6.4.21}$$

于是，与 f_{nl} 相联系的矢量势函数可表示为

$$\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{S_n}\frac{\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')f_{nl}(t-R/v)}{R}\mathrm{d}S',\tag{6.4.22}$$

其中 S_n 为任意一个三角形面元 n 的面积，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$，$R=|\boldsymbol{R}|$. 另一方面，与快速多极子方法中的平面波展开类似，令

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{nl}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\mu}{8\pi^2v}\frac{\partial}{\partial t}\oint\mathrm{d}\Omega\int_{S_n}\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')\delta\left(t-\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{v}\right)*f_{nl}(t)\mathrm{d}S',\tag{6.4.23}$$

其中 $\boldsymbol{e}_k=\sin\theta\cos\varphi\hat{x}+\sin\theta\sin\varphi\hat{y}+\cos\theta\hat{z}$ 为球坐标系 $Or\theta\varphi$ 中的单位波矢，

$$\oint\mathrm{d}\Omega=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

为了建立 $\overline{\boldsymbol{A}}_{nl}(\boldsymbol{r},t)$ 与 $\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t)$ 之间的联系，交换式(6.4.23)中谱域积分的次序，并将空间变量变换到新坐标系 $Or'\theta'\varphi'$ 中，其中 $\boldsymbol{e}_{z'}/\!/\boldsymbol{R}$. 由此可得

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{A}}_{nl}(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{\mu}{8\pi^2v}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_n}\mathrm{d}S'\oint\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')f_{nl}\left(t-\frac{R}{v}\cos\theta'\right)\mathrm{d}\Omega'\\&=-\frac{\mu}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_n}\mathrm{d}S'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-R/v}^{R/v}\frac{\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')f_{nl}(t-\tau)}{R}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\mu}{4\pi}\int_{S_n}\frac{\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')f_{nl}(t-R/v)}{R}\mathrm{d}S'\\&\quad-\frac{\mu}{4\pi}\int_{S_n}\frac{\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')f_{nl}(t+R/v)}{R}\mathrm{d}S'.\end{aligned}\tag{6.4.24}$$

由式(6.4.22)与(6.4.24)对比可看出，式(6.4.24)所表示的$\overline{\boldsymbol{A}}_{nl}(\boldsymbol{r},t)$由两部分组成：一部分是正确的矢量势函数$\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t)$；另一部分是与之反因果关系的信号，称为妖信号. 妖信号比正确的信号提前到达观察点.

考察式(6.4.24)还可以发现，由$f_{nl}(t)$辐射的正确的矢量势函数不会在$T_{lsta}+R_{\min}/v$时刻之前到达观察点，而妖信号在$T_{lsto}-R_{\min}/v$时刻之后消失. 所以，选择$T_P<R_{\min}/v$就意味着$f_{nl}(t)$在正确的信号到达观察点之前已消失，且妖信号和正确的矢量势函数在时间上永不重叠. 这一结论可以推广到分布在其各自的外接球内的任意源点和观察点的情况. 对这种构形，当源信号的作用在T_{lsto}开始之后，正确的信号可在$(R_c-2R_s)/v$时刻到达. 因此，选择

$$T_p<(R_c-2R_s)/v,$$

并要求

$$\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t)=\begin{cases}0, & t<T_{lsto},\\ \overline{\boldsymbol{A}}_{nl}(\boldsymbol{r},t), & t\geqslant T_{lsto},\end{cases}$$

且当$t>-(R_c-2R_s)/v+T_{lsto}$时，妖信号消失.

根据散射场$\boldsymbol{E}^s$和$\boldsymbol{H}^s$与$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$的关系，当$t>T_{lsto}$时，在时间段$l(l=1,2,\cdots,P)$中的源在观察球内产生的场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\text{scan}l}(\boldsymbol{r},t)&=-\int_0^t\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\boldsymbol{I}-v^2\nabla\nabla\right)\cdot\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t')\mathrm{d}t'\\&=\frac{\eta}{8\pi^2v^2}\int_{T_{lsto}}^t\left[\frac{\partial^3}{\partial t'^3}\oint(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k)\mathrm{d}\Omega\right.\\&\quad\left.\cdot\int_{S_n}\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')\delta\left(t'-\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{v}\right)*f_{nl}(t')\mathrm{d}S'\right]\mathrm{d}t',\end{aligned}\tag{6.4.25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\text{scan}l}(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}_{nl}(\boldsymbol{r},t)\\&=\frac{1}{8\pi^2v^2}\int_{T_{lsto}}^t\left[\frac{\partial^3}{\partial t'^3}\oint\boldsymbol{e}_k\mathrm{d}\Omega\right.\\&\quad\left.\times\int_{S_n}\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')\delta\left(t'-\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{v}\right)*f_{nl}(t')\mathrm{d}S'\right]\mathrm{d}t'.\end{aligned}\tag{6.4.26}$$

以上两式表明，散射场可用矢量势函数的横向分量构造.

为了研究平面波表示在快速算法中的价值，用基函数$\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r})$来检验$\overline{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)$，即有

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),\overline{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)\rangle&=-\frac{\mu}{8\pi^2v}\frac{\partial}{\partial t}\oint\mathrm{d}\Omega\left[\int_{S_m}\boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r})\delta\left(t-\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_m^c}{v}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\&\quad*\delta\left(t-\frac{\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{R}_c}{v}\right)*\left[\int_{S_n}\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{r}')\delta\left(t+\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n^c}{v}\right)\right]\\&\quad*f_{nl}(t)\mathrm{d}S',\end{aligned}\tag{6.4.27}$$

其中 $t>T_{lsto}$. 类似地,由式(6.4.13),(6.4.15),(6.4.17),(6.4.25)和(6.4.26)可以求得,当 $t<T_{lsto}$ 时,有

$$\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{E}_{scanl}(\boldsymbol{r},t)\rangle = 0,\quad \langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{H}_{scanl}(\boldsymbol{r},t)\rangle = 0,\tag{6.4.28}$$

当 $t\geqslant T_{lsto}$ 时,有

$$\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_e[\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t)]\rangle = \frac{\eta}{8\pi^2 v^2}\int_{T_{lsto}}^{t} dt'\oint[S_m^-(\boldsymbol{e}_k,t',\boldsymbol{e}_k)]^T * T(\boldsymbol{e}_k,t') * [S_n^+(\boldsymbol{e}_k,t',\boldsymbol{e}_k)] * f_{nl}(t')d\Omega,\tag{6.4.29}$$

$$\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_h[\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t)]\rangle = \frac{1}{8\pi^2 v^2}\int_{T_{lsto}}^{t} dt'\oint[S_m^-(\boldsymbol{e}_k,t',\boldsymbol{n})]^T * T(\boldsymbol{e}_k,t') * [S_n^+(\boldsymbol{e}_k,t',\boldsymbol{e}_k)] * f_{nl}(t')d\Omega,\tag{6.4.30}$$

$$\langle \boldsymbol{B}_m,L_c[\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t)]\rangle = -\frac{\beta}{\eta}\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_e[\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t)]\rangle + \langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_h[\boldsymbol{J}_{nl}(\boldsymbol{r},t)]\rangle,\tag{6.4.31}$$

其中

$$T(\boldsymbol{e}_k,t)=\frac{\partial^3}{\partial t^3}\delta(t-\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{R}_c/v),\tag{6.4.32}$$

$$S_o^{\pm}(\boldsymbol{e}_k,t,\boldsymbol{u}) = \int_{S_o}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}_o(\boldsymbol{r}')\delta\left(t\pm\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_o^c}{v}\right)dS' \quad (o=m,n,\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{n}).\tag{6.4.33}$$

若对式(6.4.29)～(6.4.31)进行数值积分,需要在时间上对电流密度加以限制.于是,电流密度可用时间有限函数近似表示,例如

$$f_{nl}(t) = \sum_{i=(l-1)N_t/P+1}^{lN_t/P} I_{ni}\psi_i(t),\tag{6.4.34}$$

其中 $\psi_i(t)=\psi(t-i\Delta t)$ 是受到限制的内插函数[26].式(6.4.32)可表示为

$$T(\boldsymbol{e}_k,t) = \widetilde{T}(\boldsymbol{e}_k,t,\infty)^{[27,28]},$$

其中

$$\widetilde{T}(\boldsymbol{e}_k,t,\widetilde{M}) = \frac{v}{2R_c}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\sum_{\nu=0}^{\widetilde{M}}(2v+1)P_\nu\left(\frac{vt}{R_c}\right)P_\nu(\cos\theta'),\quad |t|\leqslant R_c/v,\tag{6.4.35}$$

$P_\nu(x)$ 为 ν 阶勒让德多项式.与场的时间有限性一致,式(6.4.35)中的求和上限可截断为 $\widetilde{M}=M[\cdot]$,

$$M = \mathrm{int}(4\pi\chi f_s R_s/v)+1,\tag{6.4.36}$$

χ 为超抽样因子,其他参数的含义请参看文献[27]和[28].由此,可利用以下内积关系完成相关的计算

$$\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_e\{J_{nl}(\boldsymbol{r},t)\}\rangle = \frac{\eta}{8\pi^2 v^2}\int_{T_{lsto}}^{t}\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=-M}^{M}w_{pq}[S_m^-(\boldsymbol{e}_{kpq},t',\boldsymbol{e}_{kpq})]^T$$

$$* \widetilde{T}(\boldsymbol{e}_{kpq},t',M) * [S_n^+(\boldsymbol{e}_{kpq},t',\boldsymbol{e}_{kpq})] * f_{nl}(t')\mathrm{d}t', \tag{6.4.37}$$

$$\langle \boldsymbol{B}_m(\boldsymbol{r}),L_{\mathrm{h}}\{J_{nl}(\boldsymbol{r},t)\}\rangle = \frac{1}{8\pi^2 v^2}\int_{T_{lsto}}^{t}\sum_{p=0}^{M}\sum_{q=-M}^{M} w_{pq}[S_m^-(\boldsymbol{e}_{kpq},t',\boldsymbol{n})]^{\mathrm{T}}$$

$$* \widetilde{T}(\boldsymbol{e}_{kpq},t',M) * [S_n^+(\boldsymbol{e}_{kpq},t',\boldsymbol{e}_{kpq})] * f_{nl}(t')\mathrm{d}t', \tag{6.4.38}$$

其中

$$w_{pq} = \frac{4\pi(1-\cos^2\theta_p)}{(2M+1)[(M+1)\mathrm{P}_M(\cos\theta_p)]^2}, \tag{6.4.39}$$

$$\boldsymbol{e}_{kpq} = \sin\theta_p\cos\varphi_q + \sin\theta_p\sin\varphi_q + \cos\theta_p, \tag{6.4.40}$$

θ_p 是 $\mathrm{P}_{M+1}(\cos\theta)$的第 $p+1$ 个零点，$\varphi_q = 2\pi q(2M+1)$.

在式(6.4.37)和(6.4.38)中，最后一个卷积项表示将源分布映射成一列外向射线平面波，也被称为倾斜堆积变换(slant stack transform，简称 SST)，中间的卷积项将其变换为内向射线，第一个的卷积项和谱积分使内向射线转换到观察点. 可以通过以上三个过程的瞬态场重建类似于频域的快速多极子方法. 分析表明，将这一方法与步进解法结合，可使时域积分方程求解的计算复杂度降低至 $O(N_t N_S^{3/2}\log N_S)$.

6.4.4 时域平面波法的应用实例

文献[21]中给出了多个上述方法的应用实例，用以说明 PWTD 的计算精度和效率，下面只选两个例子加以说明.

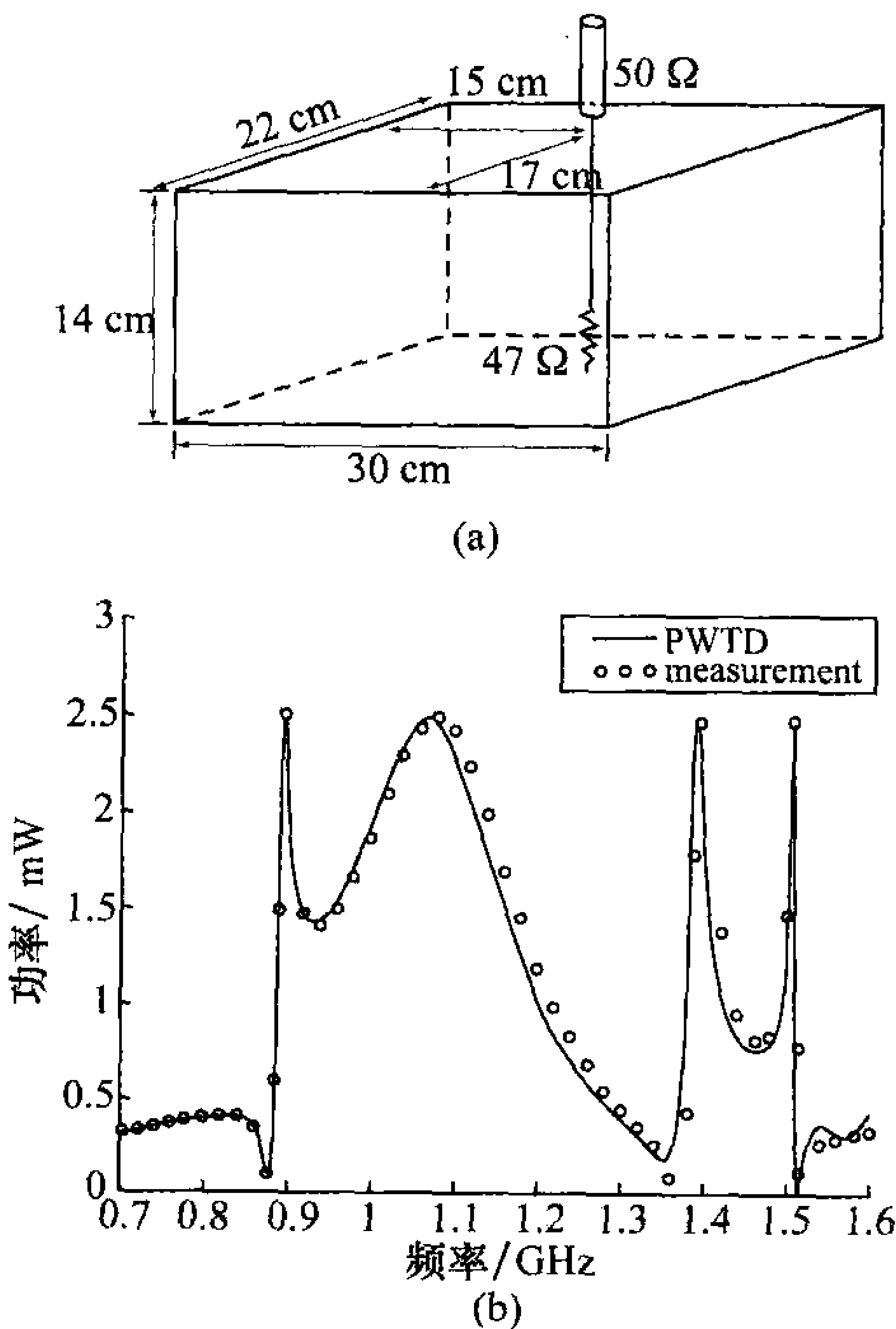


图 6-8　矩形腔的谐振频率

第一个算例是关于矩形谐振腔谐振频率的计算，谐振腔的尺度和结构示于图 6-8(a). 谐振腔上加了一个 50 Ω 的同轴线负载，其内导体为 0.8 mm，并带有 50 Ω 的源电阻，底端接有 47 Ω 的终端电阻. 在负载线与腔体的缝隙间加有电压源以供测量，电压源的形式为

$$V^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t) = V_0\cos[2\pi f_0(t-t_p)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_p}{\sigma}\right)^2},$$

其中 $V_0 = 1\,\mathrm{V}$，$f_0 = 1.15\,\mathrm{GHz}$，$\sigma = 9.55\times 10^{-10}\,\mathrm{S}$.

计算和测量结果由图 6-8(b)给出，两者的一致性相当好，作为一个内问题对所述方法的可靠性是一个有力的证明.

第二个算例是关于 VFY218 飞机的电磁散射的计算，计算该问题所设的未知量达 9,747 个，照射脉冲的形式为

$$E^{i}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\boldsymbol{p}}\cos[2\pi f_0(t-\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}/c)]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}-ct_p}{\sigma c}\right)^2},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}}=\hat{x}$,为入射波的极化方向; $\hat{\boldsymbol{k}}=-\hat{y}$,为脉冲的入射方向;$f_0=100\,\text{MHz}$; $\sigma=6/(2\pi f_{bw})$;$f_{bw}=60\,\text{MHz}$;$t_p=3.5\sigma$.

除用时域平面波法计算外,还用程序 FISC(Fast Illinois Solver Code)进行了计算,后者是一种频域方法.图 6-9 给出了两个频率点关于雷达散射截面的计算结果,再次获得了良好的一致性.

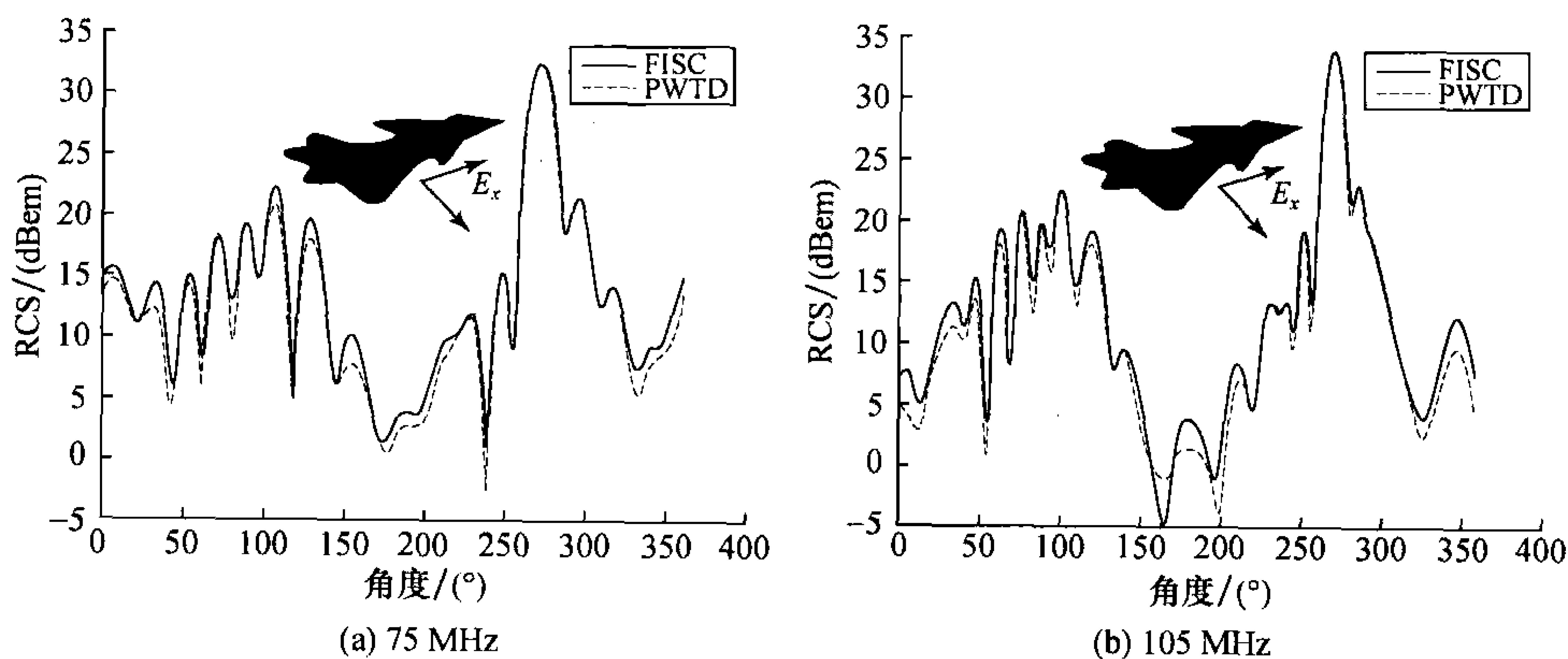


图 6-9 飞机 VFY218 雷达散射截面

为了验证 PWTD 的计算效率,在 SGI Origin 2000(360 Mflop)上将运行结果与经典的时域积分方程法进行了对比,图 6-10 给出了结果.这表明,随着空间

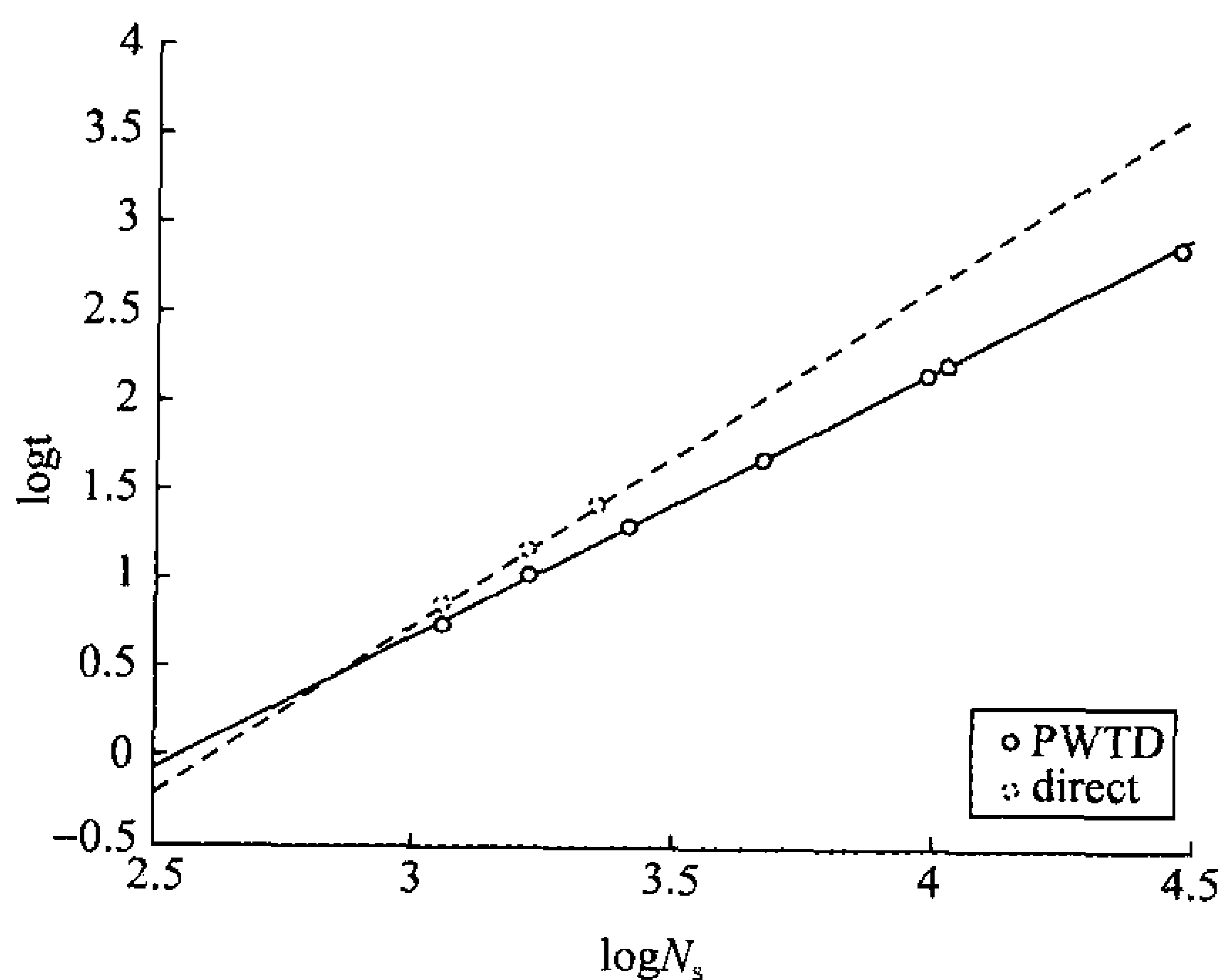


图 6-10 PWTD 与经典方法计算复杂度的比较

离散网格数的增加,计算效率的提高更加明显.计算所显示的复杂度可表示为 $O(N_t N_S^{1.507}\log N_S)$,这与理论分析基本一致.

为了进一步提高PWTD法的计算效率,仿效频域的多层多极子方法,也发展了多层PWTD方法.由于计算能力的提高,PWTD方法已用于电大目标电磁散射问题的计算.

时域积分方程法发展的另一个方向是,应用面的不断扩大和新技术的引入[29-31].

第七章　时域有限差分法

时域有限差分法(Finite-Difference Time Domain, FDTD)直接从依赖于时间变量的麦克斯韦旋度方程出发,不需要任何导出方程,是一种简单、直观的时域方法.由于该方法是按照时间步的推进进行计算的,同样适用于简谐场,故也可作为频域方法使用.作为时域法,时域有限差分法只需作一次计算即可获得宽频带的丰富信息,有其突出的优点.

经过近四十年的发展,时域有限差分法已具备了非常强大的解决多种复杂问题的能力,其广泛的应用范围是其他方法无法比拟的.

为了处理各种类型的复杂问题,近来还发展了许多有限差分处理技术,使时域有限差分法具有更丰富的内容,本章只介绍其最核心的部分.

§7.1　时域有限差分法的基本原理

7.1.1　微商的差分近似

有限差分法是指用变量离散的含有有限个未知数的差分方程近似地代替连续变量的微分方程.因此,首要任务是构造合理的差分格式,使解能保持原问题的主要性质,并具有相当高的精确度.建立差分方程的基本步骤是:先将变量按某种方式离散化,然后用差分表达式近似地替代微分方程中的微商表达式.为了表明用差分替代微商的精度,以一元函数为例加以说明.假设 $f(x)$ 为 x 的连续函数,若在 x 轴上每隔长度 h 取一个点,其中任一点用 $x_i(i=0,1,\cdots)$ 表示,则在点 x_{i+1} 上的函数 $f(x_{i+1})$ 值可通过泰勒(Taylor)级数展开表示为

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+\frac{h}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}+\cdots,\tag{7.1.1}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}&=\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}+\frac{h}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i}+\frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i}+\cdots\\&=\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i}+O(h).\end{aligned}\tag{7.1.2}$$

由于

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \frac{h}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i} + \cdots, \tag{7.1.3}$$

故

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} - \frac{h}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\bigg|_{x=x_i} + \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i} - \cdots$$

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + O(h), \tag{7.1.4}$$

其中$\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$和$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}$分别称为$f(x)$在$x_i$点的向前和向后差分. 由式(7.1.2)和(7.1.4)可知,向前和向后差分与微商的差均为变量离散步长h的一阶近似.

将式(7.1.1)和式(7.1.3)相减,解得

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + \frac{h^2}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}\bigg|_{x=x_i} + \frac{h^4}{5!}\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x^5}\bigg|_{x=x_i} + \cdots$$

$$= \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + O(h^2), \tag{7.1.5}$$

其中$\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$称为$f(x)$在$x_i$点的中心差分. 由式(7.1.5)可知,中心差分与微商的差为h的二阶近似. 显然,就差分对微商逼近的精度而言,中心差分的精度最高.

7.1.2　Yee 氏网格

为了建立差分方程,首先要在变量空间将连续变量离散化. 通常用某种形式的网格划分变量空间,且只取网格点上的未知量作为计算对象. 这样,自变量变为离散的,且只需在有限个点上计算未知量. 当在每个网格点上用差分代替微商时,在一定空间上求解微分方程的问题就化为求解有限个差分方程的问题. 由微分方程导出的差分方程的一般形式称为原方程的差分格式. 然而,一个逼近程度高的差分格式不一定能给出计算精度高的近似解,这是因为合理的差分格式还必须保持原问题的基本物理性质. 所以,在构造差分格式时常常从物理定律出发,以便给出高精度的近似解.

电磁场最基本的规律是麦克斯韦方程组,对时变场而言,最基本的是其中依赖于时间变量的两个旋度方程. 正是由此出发,K. S. Yee 于 1966 年创立了用于电磁场计算的时域有限差分法.

一般情况下，在时域计算电磁场要在包括时间在内的四维空间中进行．如果采用有限差分法，首先要对问题的变量空间进行离散化，也就是要建立适合的网格剖分体系．从麦克斯韦旋度方程出发建立差分方程的复杂性在于，不仅要在四维空间中进行，还要同时计算电磁场的 6 个分量．如何在四维空间中合理地离散 6 个未知场量，成为建立高精度差分格式的关键问题．Yee 正是提出了一个合理的网格体系，才成功地创立了时域有限差分法．他所使用的网格体系称为 Yee 氏网格．直角坐标系中的一个 Yee 氏网格单元如图 7-1 所示，其特点是：电磁场各分量的空间取值点被交叉放置，使得在每一坐标平面上，每个电场（或磁场）分量的四周由磁场（或电场）分量环绕．这样的空间配置符合电磁场的基本规律——法拉第（Faraday）电磁感应定律和安培（Ampère）环流定律，因而也符合电磁波在空间传播的规律．电磁场的这种配置使得时域有限差分法可以在计算机的存储空间中模拟电磁波的传播及其与散射体的相互作用．此外，当网格空间中存在媒质突变面时，可以使突变面上场分量的连续性条件自然得到满足，因而为一些复杂结构的计算带来很大方便．

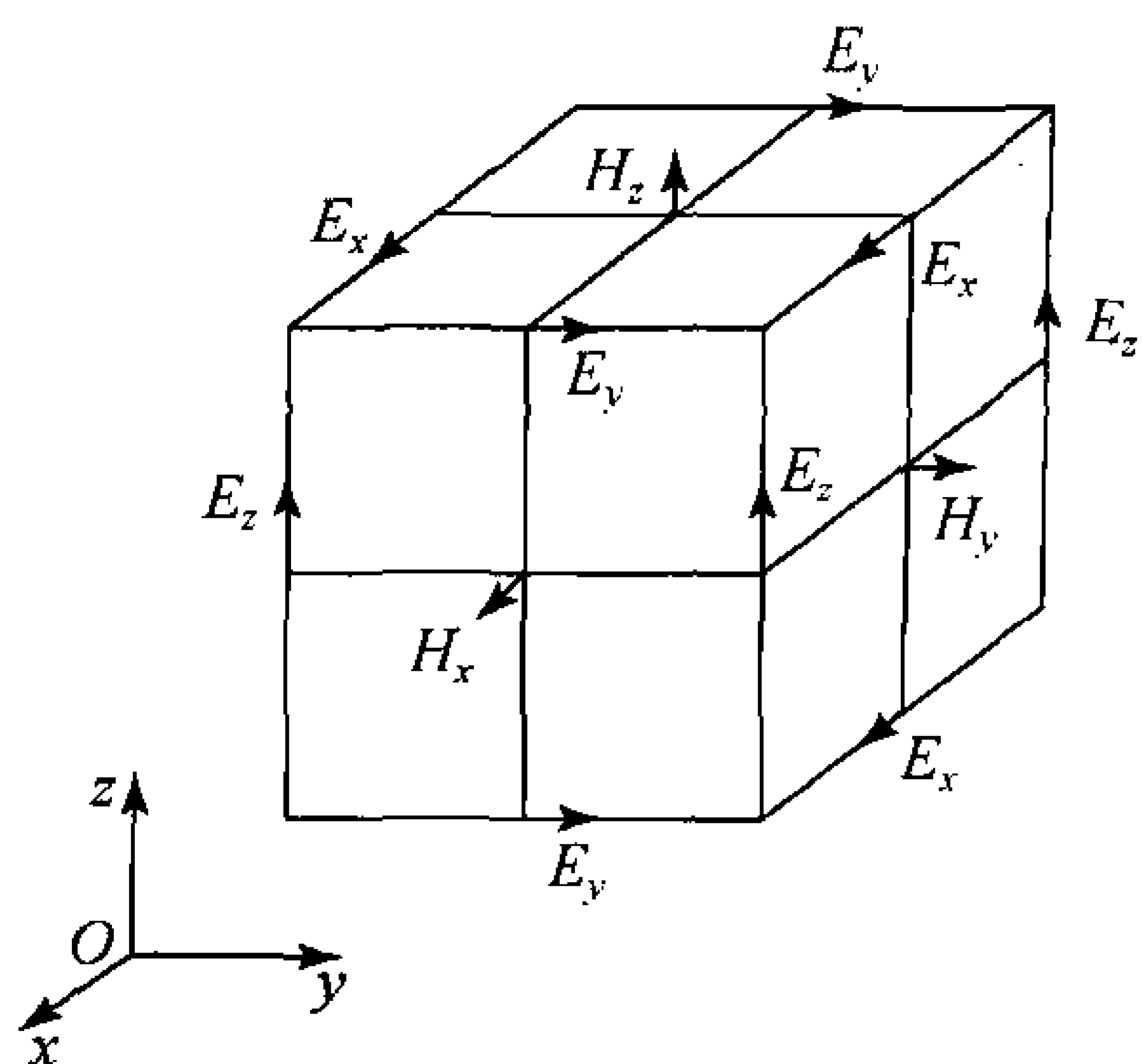


图 7-1　直角坐标系中的一个 Yee 氏网格单元

电磁场的计算与空间媒质的电磁性质联系紧密．在网格空间中，除了规定场分量的离散取值点以外，还必须给出各离散点处媒质的电磁参量，即电场取值点处的介电常量、电导率以及磁场取值点处的磁导率、等效磁阻率．这也说明，通过赋予离散点的电磁参数，时域有限差分法可在网格空间中模拟各种媒质空间及各种电磁结构．当然，用立方体模拟复杂的弯曲几何表面在计算精度上会出现问题，这一缺点可通过采用其他形式的网格克服．

在 Yee 氏网格中，每个坐标轴上的场分量之间相距半个网格空间步长（即网格单元在该轴上的长度），因而同一种场分量之间正好相隔一个空间步长．图 7-1 中没有给出时间的离散规则．然而，为了保证计算的稳定性，离散的时间步长与空间步长必须满足一定的关系．这样，在实际运用时域有限差分法时，选定了网格的空间步长后，时间的离散规则也就完全确定了．也就是说，在网格的空间结构选定后，就可由差分近似构造所需的差分方程．

利用 Yee 氏网格的建立原则，还可建立其他形式具有类似性能的适合不同几何结构的网格空间．

7.1.3 麦克斯韦旋度方程的有限差分表示

麦克斯韦方程组概括了宏观电磁场的基本规律，其中两个旋度方程分别是法拉第电磁感应定律和安培环流定律的微分形式，它们是时域电磁场的基本方程.

假定所研究的电磁场问题只涉及线性各向同性且与时间无关的媒质，但其中可能存在电的损耗和磁的损耗. 在无源区域，麦克斯韦旋度方程可表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \sigma_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}, \tag{7.1.6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7.1.7}$$

其中 σ 为电导率，σ_{m} 为等效磁阻率(单位：Ω/m). 引进 σ_{m} 的目的主要是使以上两式具有对称性.

在导出差分方程时，需要写出与方程(7.1.6)和(7.1.7)等价的电磁场各分量分别满足的方程. 在直角坐标系中，可得

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right), \tag{7.1.8}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right), \tag{7.1.9}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right), \tag{7.1.10}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_{\mathrm{m}} H_x\right), \tag{7.1.11}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_{\mathrm{m}} H_y\right), \tag{7.1.12}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_{\mathrm{m}} H_z\right). \tag{7.1.13}$$

麦克斯韦旋度方程的差分近似表示就是从以上 6 个一阶偏微分方程出发导出的. 在电磁场问题中，某些三维问题可以简化为二维问题，从而使讨论大大简化. 在散射问题中，如果入射波和散射体的形状、结构均与坐标 z 无关，则散射场也将与 z 无关，可用与 z 轴垂直的任一截面上的解完全反映三维问题的解. 当电场、磁场均与 z 无关时，方程(7.1.8)～(7.1.13)就分裂为分别对应于 TM 波和 TE 波且相互独立的两组方程，即

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right), \tag{7.1.14}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} + \sigma_{\mathrm{m}} H_x\right), \tag{7.1.15}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}-\sigma_m H_y\right); \tag{7.1.16}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}-\sigma_m H_z\right), \tag{7.1.17}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\sigma E_x\right), \tag{7.1.18}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}+\sigma E_y\right). \tag{7.1.19}$$

由以上六式可以看出，TM 波只有 E_z，H_x 和 H_y 3 个分量，TE 波只有 H_z，E_x 和 E_y 3 个分量. 只要作如下替换

$$E_z \leftrightarrow H_z,\quad H_x \leftrightarrow -E_x,\quad H_y \leftrightarrow -E_y,\quad \varepsilon \leftrightarrow \mu,\quad \sigma_m \leftrightarrow \sigma,$$

就可以由一种类型的波变换为另一种. 这种变换关系在编写程序时是很有意义的.

用 Δx，Δy 和 Δz 分别代表沿 x 轴，y 轴和 z 轴的网格空间步长，任一网格点的空间坐标可简单地表示为

$$(i,j,k)=(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z),$$

其中 i，j 和 k 均为整数，分别表示沿 x，y 和 z 轴的网格数或网格点编号. 时间步长用 Δt 表示，n 为非负整数，表示迭代时间步数. 一般地，任一时变参量 F 既与空间坐标有关，也与时间变量有关. 为了方便，可采用如下的简化表示

$$F^n(i,j,k)=F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t).$$

在将麦克斯韦旋度方程转化为差分方程时，Yee 对空间微商采用了具有二阶精度的中心差分近似. 在 Yee 氏网格中，由于场量之间相距半个空间步长，$F^n(i,j,k)$沿 x 轴的中心差分近似可按式(7.1.5)写为

$$\frac{\partial F^n(i,j,k)}{\partial x}=\frac{F^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)-F^n\left(i-\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta x}+O(\Delta x^2). \tag{7.1.20}$$

同理，Yee 对时间微商也采用了中心差分近似，且相隔半个时间步长进行计算，得到

$$\frac{\partial F^n(i,j,k)}{\partial t}=\frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)-F^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t}+O(\Delta t^2). \tag{7.1.21}$$

用如上两式所示的中心差分近似地代替方程(7.1.8)～(7.1.13)中的微商，就可获得 Yee 所给出的差分方程. 例如，对点$(i+1/2,j,k)$处的 E_x 分量，在第 $n+1/2$ 时间步，可由方程(7.1.8)得到

$$\frac{E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)-E_x^{n}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}\left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)}{\Delta y}\right.$$

$$-\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}$$

$$-\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Bigg]. \tag{7.1.22}$$

上式中包含相隔半个时间步的 3 个 E_x 值,这为实际编程带来不便.为此,可采用如下的近似

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=\frac{1}{2}\left[E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right].$$

这样,由方程(7.1.22)可获得 E_x 分量的差分方程

$$\begin{aligned}
&E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\
&=\frac{1-\dfrac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}}{1+\dfrac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}}E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\
&\quad+\frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}}\\
&\quad\cdot\left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)}{\Delta y}\right.\\
&\quad\left.-\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}\right].
\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

类似地,可获得其他电场分量满足的差分方程.

由方程(7.1.8)~(7.1.13)的对称性又很容易求得磁场各分量满足的差分方程.由于在方程(7.1.23)中磁场分量的值均取在第 $n+1/2$ 时间步,因此在磁场各分量满足的差分方程中出现的磁场值也应取在第 $n+1/2$(或 $n-1/2$)时间步,以保证其中的时间步长为一个时间步长,也可以保证其中电场分量的取值时刻与方程(7.1.23)中的相同.综上所述,可得到各磁场分量满足的差分方程.例如,对点$(i,j+1/2,k+1/2)$处的 H_x 分量,在第 $n+1/2$ 时间步有

$$
\begin{aligned}
&H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}{1+\dfrac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\
&\quad+\frac{\Delta t}{\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}\\
&\quad\cdot\left[\frac{E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right)-E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)}{\Delta z}\right.\\
&\quad\left.-\frac{E_z^n\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right].
\end{aligned}
\tag{7.1.24}
$$

类似地,可获得其他磁场分量满足的差分方程.

由方程(7.1.23)和(7.1.24)可以看出,时域有限差分法的一大特点是:任一网格点上的电场(或磁场)分量只与其上一个时间步的值及其四周环绕的磁场(或电场)分量有关.此外,方程中的 ε,μ,σ 和 σ_m 均表示成空间坐标的函数,说明这些参数可以设置成在非均匀的或各向异性的媒质中具有的形式.因此,这种算法在处理媒质的非均匀性和各向异性时不仅有效,而且很方便.

方程(7.1.23)和(7.1.24)是在 $\Delta x,\Delta y$ 和 Δz 取任意值时的一般情况.在没有特殊需要时,常将这三个空间步长设成相等的,构成均匀立方体网格.若用 Δs 表示统一的空间步长,则有

$$
\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta s.
$$

这时,方程中的系数可采用如下的简化表示,即

$$
CA(i,j,k)=\frac{1-\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2\varepsilon(i,j,k)}}{1+\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2\varepsilon(i,j,k)}},\tag{7.1.25}
$$

$$
CB(i,j,k)=\frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k)\Delta s}\frac{1}{1+\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2\varepsilon(i,j,k)}},\tag{7.1.26}
$$

$$
DA(i,j,k)=\frac{1-\dfrac{\sigma_m(i,j,k)\Delta t}{2\mu(i,j,k)}}{1+\dfrac{\sigma_m(i,j,k)\Delta t}{2\mu(i,j,k)}},\tag{7.1.27}
$$

$$DB(i,j,k)=\frac{\Delta t}{\mu(i,j,k)\Delta s}\frac{1}{1+\frac{\sigma_{\mathrm{m}}(i,j,k)\Delta t}{2\mu(i,j,k)}}. \qquad (7.1.28)$$

以上四式一般都是空间坐标的函数. 即使在同一个网格单元中，由于有半个空间步长的分辨率，也可以被赋予不同的数值. 于是，方程(7.1.23)和(7.1.24)变为

$$\begin{aligned}E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=&CA\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+CB\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\&\cdot\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)\right.\\&\left.+H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (7.1.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=&DA\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\&+DB\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\left[E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right)-E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)\right.\\&\left.+E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (7.1.30)\end{aligned}$$

由以上两式可以看出，如果空间网格单元的总数为 N，那么就该算法的主要部分而言，需要存储的数据包括 6 组电磁场分量和 4 组表征空间媒质分布的参数，各自分别为 N 个. 由于方程中出现的两个相邻时间步的电磁场各分量的值不被重复使用，所以只需存储一个时间步的计算结果. 也就是说，该算法所需的存储空间与 N 成正比. 还可以看出，每一时间步总的计算时间等于每个网格点的计算时间乘以 N，所以所需的 CPU 时间也与 N 成正比. 这个特点非常有意义，尤其是当 N 很大时更加突出.

如果计算空间中的媒质是分区均匀的，则媒质参数的表示方法可以进一步简化，从而进一步减少所需的存储空间. 实际所需的存储单元只相当于均匀媒质区域的个数.

时域有限差分法的另一个特点是，不像矩量法或其他频域方法最终归结为求解代数方程组，它是在每一时间步中直接由相邻场量计算每个网格点的场量，以获得空间场量随时间变化的信息.

在大多数电磁场问题中，计算空间内不包括磁性媒质. 由于在非磁性媒质中($\mu=\mu_0,\sigma_{\mathrm{m}}=0$)，使用国际单位制时，电场和磁场在数值上往往相差较大，例如在自由空间中，平面波的电场和磁场满足

$$E=\eta_0 H=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}H,$$

其中 $\eta_0\approx 377\,\Omega$，这给计算带来不便. 为此，在非磁性媒质中可用规约化的电场 $\widetilde{E}$ 替代 E，二者之间的关系为

$$\widetilde{E}=E/\eta_0=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}E. \qquad (7.1.31)$$

规约化后,令

$$CA(i,j,k)=\frac{1-\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2\varepsilon(i,j,k)}}{1+\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2\varepsilon(i,j,k)}},\tag{7.1.32}$$

$$CD=\frac{\Delta t}{\Delta s}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}},\tag{7.1.33}$$

$$CB(i,j,k)=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon(i,j,k)+\dfrac{\sigma(i,j,k)\Delta t}{2}},\tag{7.1.34}$$

则在非磁性媒质中,方程(7.1.23)和(7.1.24)可分别重新写为

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)=&CA\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\widetilde{E}_x^{n}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)+CD\cdot CB\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\\&\cdot\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)\right.\\&\left.+H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.1.35}$$

$$\begin{aligned}H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=&H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\\&+CD\left[\widetilde{E}_y^{n}\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right)-\widetilde{E}_y^{n}\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)\right.\\&\left.+\widetilde{E}_z^{n}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)-\widetilde{E}_z^{n}\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)\right].\end{aligned}\tag{7.1.36}$$

其他电磁场分量也有类似形式的方程.

由以上两式可以看出,在非磁性媒质中,时域有限差分法所需的存储空间可以进一步减少.确定 Δt 与 Δs 的关系后,CD 为常数,磁场的计算只与场量有关,与空间媒质的介电特性不再有直接的计算关系.

在二维空间中,TM 波和 TE 波所满足的时域有限差分方程可由已导出的三维空间的方程获得,也可由方程(7.1.14)～(7.1.19)直接导出.在非磁性媒质中,采用均匀正方形网格(即 $\Delta x=\Delta y=\Delta s$),TM 波和 TE 波的时域有限差分方程分别为

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_z^{n+1}(i,j)=&CA(i,j)\widetilde{E}_z^{n}(i,j)+CD\cdot CB(i,j)\left[H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right.\\&\left.-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j\right)+H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)-H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.1.37}$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+CD\left[\widetilde{E}_z^{n}(i,j)-\widetilde{E}_z^{n}(i,j+1)\right],\tag{7.1.38}$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+CD[\widetilde{E}_z^n(i+1,j)-\widetilde{E}_z^n(i,j)],\tag{7.1.39}$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)=H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)+CD\left[\widetilde{E}_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-\widetilde{E}_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\widetilde{E}_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\widetilde{E}_y^n\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.1.40}$$

$$\widetilde{E}_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=CA\left(i+\frac{1}{2},j\right)\widetilde{E}_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+CD\cdot CB\left(i+\frac{1}{2},j\right)\cdot\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.1.41}$$

$$\widetilde{E}_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=CA\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\widetilde{E}_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+CD\cdot CB\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.1.42}$$

其中 $CA(i,j)$ 和 $CB(i,j)$ 是将式(7.1.32)和(7.1.34)中的三维坐标变量变为二维坐标变量而得到的.

§7.2 数值稳定性分析

7.2.1 数值稳定性

由麦克斯韦旋度方程按 Yee 氏网格所导出的差分方程是一种显式差分格式,也是通过按时间步推进计算电磁场在网格空间内变化的规律.这种差分格式要求 Δt 与 $\Delta x,\Delta y$ 与 Δz 之间必须满足一定条件,否则将出现数值不稳定性,表现为被计算的场量随着时间步数的增加无限制地增大.不同于误差的积累,这种稳定性是由于电磁波传播的因果关系被破坏而造成的.因此,为了用所导出的差分方程进行稳定的计算,需合理地选取时间步长与空间步长之间的关系.Taflove等(1975)对 Yee 氏差分格式的数值稳定性进行了讨论,并导出对时间步长的限制条件.

时域有限差分法是在计算机的存储空间中模拟电磁波的传播和作用.为了确定数值稳定性的条件,需要考虑在该算法中出现的各种数字波模.由于任何波模都可展开为平面波谱,若算法对平面波不稳定,则对任何波模也不稳定,因此可以用平面波作为讨论对象.讨论的基本步骤是:将时域有限差分格式分解为时间和空间的特征值问题,假定平面波特征模在数值空间中传播,其特征值谱由数值空间的微分过程确定,并将其与由时间微分过程确定的特征值谱相比较.空间特征值谱必须完全落在稳定区内,以此确定稳定性条件.为简单起见,以二维

空间中的 TM 波为例进行讨论，但所用的方法具有一般性，可以很方便地应用于三维空间.

7.2.2　时间特征值问题

在均匀无耗的非磁性媒质空间中，TM 波满足的方程(7.1.14)～(7.1.16)可写为

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \tag{7.2.1}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \tag{7.2.2}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{7.2.3}$$

在二维 Yee 氏网格中满足的时域差分方程为

$$\frac{E_z^{n+1}(i,j)-E_z^n(i,j)}{\Delta t}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x}-\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right], \tag{7.2.4}$$

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}=-\frac{1}{\mu}\frac{E_z^n(i,j+1)-E_z^n(i,j)}{\Delta y}, \tag{7.2.5}$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t}=\frac{1}{\mu}\frac{E_z^n(i+1,j)-E_z^n(i,j)}{\Delta x}. \tag{7.2.6}$$

由以上三式等号左侧的时间微商可构造如下的时间特征值问题

$$\frac{E_z^{n+1}(i,j)-E_z^n(i,j)}{\Delta t}=\lambda E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j), \tag{7.2.7}$$

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}=\lambda H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right), \tag{7.2.8}$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t}=\lambda H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j\right), \tag{7.2.9}$$

其中 λ 为特征值. 可以看出，以上三式有一个共同的特点，即等号右侧的场值由相应网格点上后半个时间步和前半个时间步的场值之差与时间步长的比确定. 如果用 F 表示方程中的任一场量，则可将方程(7.2.7)～(7.2.9)统一写成

$$\frac{F^{n+\frac{1}{2}}-F^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\lambda F^{n},\tag{7.2.10}$$

并定义解的增长因子 q 为

$$q=\frac{F^{n+\frac{1}{2}}}{F^{n}}.\tag{7.2.11}$$

为保证方程(7.2.7)～(7.2.9)的解是稳定的,必须满足 $|q|\leqslant 1$. 将式(7.2.11)代入式(7.2.10),就可得到关于 q 的代数方程

$$q^{2}-\lambda\Delta tq-1=0,\tag{7.2.12}$$

相应的两个根为

$$q=\frac{\lambda\Delta t}{2}\pm\left[1+\left(\frac{\lambda\Delta t}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}.\tag{7.2.13}$$

如果 q 满足 $|q|\leqslant 1$,差分格式就是稳定的. 由上式可以看出,为此须满足以下两个条件

$$\mathrm{Re}\lambda=0,\quad -\frac{2}{\Delta t}\leqslant \mathrm{Im}\lambda\leqslant\frac{2}{\Delta t}.\tag{7.2.14}$$

也就是说,只要 λ 被限定在虚轴上且在上式所规定的范围内,方程(7.2.7)～(7.2.9)的解就是稳定的.

7.2.3 空间特征值问题

为了使方程(7.2.7)～(7.2.9)符合差分方程(7.2.4)～(7.2.6),还必须保证方程(7.2.4)～(7.2.6)的等号右侧构成如下的空间特征值问题

$$\frac{H_{y}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_{y}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x}-\frac{H_{x}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_{x}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}=\lambda\varepsilon E_{z}(i,j),\tag{7.2.15}$$

$$\frac{E_{z}(i,j+1)-E_{z}(i,j)}{\Delta y}=-\lambda\mu H_{x}\left(i,j+\frac{1}{2}\right),\tag{7.2.16}$$

$$\frac{E_{z}(i+1,j)-E_{z}(i,j)}{\Delta x}=\lambda\mu H_{y}\left(i+\frac{1}{2},j\right),\tag{7.2.17}$$

其中 λ 为特征值. 由于任意波模均可展开为平面波谱,故仍然是讨论平面波特征模的稳定性问题. 假定平面波特征模为

$$E_{z}(i,j)=E_{z0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{x}i\Delta x+k_{y}j\Delta y)},\tag{7.2.18}$$

$$H_{x}(i,j)=H_{x0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{x}i\Delta x+k_{y}j\Delta y)},\tag{7.2.19}$$

$$H_{y}(i,j)=H_{y0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{x}i\Delta x+k_{y}j\Delta y)},\tag{7.2.20}$$

其中 E_{z0},H_{x0}和 H_{y0}为常数,k_x 和 k_y 为波矢 $\boldsymbol{k}$ 的分量. 由以上三式所表示的波必须满足方程(7.2.4)～(7.2.6),因而也必须满足方程(7.2.15)～(7.2.17). 将

式(7.2.18)～(7.2.20)代入方程(7.2.15)～(7.2.17),整理后可得

$$E_z = \mathrm{i}\,\frac{2}{\lambda\varepsilon}\left(\frac{H_y}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2} - \frac{H_x}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}\right), \tag{7.2.21}$$

$$H_x = -\mathrm{i}\,\frac{2E_z}{\lambda\mu\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}, \tag{7.2.22}$$

$$H_y = \mathrm{i}\,\frac{2E_z}{\lambda\mu\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}. \tag{7.2.23}$$

将式(7.2.22)和(7.2.23)代入式(7.2.21),便可得到 λ 满足的关系

$$\lambda^2 = -\frac{4}{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}\right]. \tag{7.2.24}$$

考虑到正弦函数的幅度不超过 1,则由上式可以清楚地看出,对所有可能的 k_x 和 k_y,应该有

$$\mathrm{Re}\lambda = 0,\quad |\,\mathrm{Im}\lambda\,| \leqslant 2v\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.2.25}$$

其中电磁波的传播速度 $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. 式(7.2.25)提供了满足方程(7.2.4)～(7.2.6)的所有可能的平面波的特征值谱的范围.

7.2.4 数值稳定性条件

前两小节我们已从与 TM 波的时域差分方程(7.2.4)～(7.2.6)等效的两个特征值问题中导出了特征值谱及稳定性要求的特征值的取值范围. 因此,综合式(7.2.14)和(7.2.25)就可以得到数值稳定性对方程(7.2.4)～(7.2.6)提出的条件. 直接比较式(7.2.14)和(7.2.25),可得

$$2v\left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2}{\Delta t},$$

即

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{v\sqrt{\left(\dfrac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\Delta y}\right)^2}}. \tag{7.2.26}$$

上式给出了当空间步长选定后时间步长的选取所受到的限制,也就是时间步长与空间步长之间必须满足的关系,常被称为 Courant 稳定性条件.

式(7.2.26)是由二维空间中的 TM 波导出的. 作为其自然推广,可以导出三维空间中一般的数值稳定性条件,即

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{v\sqrt{\left(\dfrac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\Delta z}\right)^2}}. \tag{7.2.27}$$

如果采用均匀立方体网格,则以上两式可分别简化为

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta s}{v\sqrt{2}},\quad \Delta t \leqslant \frac{\Delta s}{v\sqrt{3}}. \tag{7.2.28}$$

由此推知，$n(n\geqslant 1)$维空间的数值稳定性条件为

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta s}{v\sqrt{n}}. \tag{7.2.29}$$

在一维情况下，上式变为 $\Delta t\leqslant \Delta s/v$. 也就是说，一维空间的数值稳定性条件要求时间步长不能大于电磁波传播一个空间步长所需的时间，否则就破坏了因果关系.

如果网格空间中的媒质是非均匀的，那么不同媒质区域的数值稳定性条件是不同的，其中最大的 v 满足的条件在其他区域中自然也能得到满足. 因此，对非均匀媒质构成的计算空间，有

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta s}{v_{max}\sqrt{n}}, \tag{7.2.30}$$

其中 $v_{\max}$为网格空间中电磁波的最大速度. 对采用非均匀网格的算法，也有类似的结果，Δt 的选择必须保证满足最小网格对稳定性提出的要求.

§7.3 数值色散问题

7.3.1 数值色散现象和数值色散关系

如果电磁波所在空间的媒质特性与频率有关，则电磁波的传播速度也是频率的函数. 这种现象称为色散. 存在色散现象的媒质称为色散媒质. 显然，在非色散媒质中，电磁波的传播速度与频率无关. 所以，如果算法是精确的，则时域有限差分方程在计算机中所模拟的平面波的相速度应与频率无关. 但是，由于时域有限差分方程只是对麦克斯韦旋度方程的一种近似，对电磁波的传播进行模拟时，在非色散媒质空间中也会出现色散现象，而且电磁波的相速度随波长、传播方向及离散场量的变化而变化. 这种非物理的色散现象称为数值色散. 数值色散会导致脉冲波形的破坏、人为的各向异性及虚假的折射等. 因此，数值色散是时域有限差分法的一个重要问题，也是提高该算法计算精度的一个重要障碍.

分析数值色散问题的基本方法是将单色平面波的一般形式代入差分方程，导出频率与时间步长、空间步长之间的关系(称为数值色散关系)，由此可讨论各种因素的作用. 为了使问题简化，我们仍然只讨论二维空间中的 TM 波，并假定计算空间中的媒质是均匀无耗、非磁性的. 由于所用的方法具有一般性，故可以很容易地推广到三维空间.

在二维空间中，任意单色平面波可以表示为

$$E_z^n(i,j) = E_{z0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x i\Delta x+k_y j\Delta y-\omega n\Delta t)}, \tag{7.3.1}$$

$$H_x^n(i,j) = H_{x0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x i\Delta x+k_y j\Delta y-\omega n\Delta t)}, \tag{7.3.2}$$

$$H_y^n(i,j)=H_{y0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x i\Delta x+k_y j\Delta y-\omega n\Delta t)},\tag{7.3.3}$$

其中 E_{z0}，H_{x0} 和 H_{y0} 为常数，ω 为角频率. 将以上三式代入方程(7.2.4)～(7.2.6)，整理后，得

$$E_z\sin\frac{\omega\Delta t}{2}=\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left(\frac{H_x}{\Delta y}\sin\frac{k_y\Delta y}{2}-\frac{H_y}{\Delta x}\sin\frac{k_x\Delta x}{2}\right),\tag{7.3.4}$$

$$H_x=\frac{\Delta tE_z}{\mu\Delta y}\frac{\sin\dfrac{k_y\Delta y}{2}}{\sin\dfrac{\omega\Delta t}{2}},\tag{7.3.5}$$

$$H_y=-\frac{\Delta tE_z}{\mu\Delta x}\frac{\sin\dfrac{k_x\Delta x}{2}}{\sin\dfrac{\omega\Delta t}{2}},\tag{7.3.6}$$

将式(7.3.5)和(7.3.6)代入式(7.3.4)，消去 E_z，H_x 和 H_y 即可得到

$$\left(\frac{1}{v\Delta t}\right)^2\sin^2\frac{\omega\Delta t}{2}=\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}.\tag{7.3.7}$$

这就是平面波作为差分方程(7.2.5)～(7.2.6)的解所必然满足的关系，称为二维空间中 TM 波的数值色散关系. 不难证明，三维空间中 TM 波的数值色散关系为

$$\left(\frac{1}{v\Delta t}\right)^2\sin^2\frac{\omega\Delta t}{2}=\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{k_x\Delta x}{2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\frac{k_y\Delta y}{2}+\frac{1}{(\Delta z)^2}\sin^2\frac{k_z\Delta z}{2}.\tag{7.3.8}$$

由宏观电磁场理论知，可用解析法得到均匀无耗各向同性媒质空间中平面电磁波的色散关系，也称为理想色散关系

$$\frac{\omega^2}{v^2}=k_x^2+k_y^2+k_z^2,\tag{7.3.9}$$

不难发现，当 Δt，Δx，Δy 和 Δz 均趋于零时，式(7.3.8)的极限就是式(7.3.9). 这说明数值色散是由于用差分近似代替连续微商引起的. 因而，数值色散的影响也可通过减小离散化过程中所取的时间步长和空间步长而无限地减小. 然而，时间步长和空间步长的减小就意味着计算网格空间中网格总数的增加，从而相应地增加了对计算机存储空间和计算时间的要求. 在实践中，总是根据问题的性质和条件适当地选择时间步长和空间步长，因而数值色散是时域有限差分法中不可避免的现象. 当时间步长和空间步长给定时，估计数值色散对计算精度所造成的影响是有实际意义的.

7.3.2　数值色散的定量估算

前一小节给出了平面波的相速度 v 与时间步长、空间步长之间的关系. 由此

出发,可以定量地估算出这些因素对数值色散的影响.仍以均匀无耗媒质空间中的二维 TM 波为例,所得的结果对其他情况也有直接的意义,或可用类似的方法进行估算.

为了表示数值色散与平面波入射角度的关系,假定 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴的夹角为 α,若令 $k=|\boldsymbol{k}|$,则有

$$k_x = k\cos\alpha, \quad k_y = k\sin\alpha.$$

在采用正方形网格的二维均匀 Yee 氏网格空间中,式(7.3.7)变为

$$\left(\frac{\Delta s}{v\Delta t}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta t}{2} = \sin^2\frac{k\cos\alpha\Delta s}{2} + \sin^2\frac{k\sin\alpha\Delta s}{2}. \tag{7.3.10}$$

令

$$A = \frac{\cos\alpha\Delta s}{2}, \quad B = \frac{\sin\alpha\Delta s}{2}, \quad C = \left(\frac{\Delta s}{v\Delta t}\right)^2 \sin^2\frac{\omega\Delta t}{2},$$

则可得

$$\sin^2 Ak + \sin^2 Bk = C. \tag{7.3.11}$$

给定 $\alpha,\omega,\Delta s$ 和 Δt,即可由上式解得 k. 用牛顿(Newton)迭代法进行计算,k 的形式为

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\sin^2 Ak_i + \sin^2 Bk_i - C}{A\sin 2Ak_i + B\sin 2Bk_i}, \quad i = 0,1,2,\cdots, \tag{7.3.12}$$

其中 Δt 的选择要满足数值稳定性条件. 在时域有限差分法的实际计算中,一般选为 $\Delta t=\Delta s/2v$.

图 7-2 给出了三种空间步长所对应的相速度 v 与平面波入射角 α 之间的关系(c 为真空中的光速),其中 $\Delta s=\lambda/5$, $\lambda/10$, $\lambda/20$ 分别表示粗网格、正常网格和细网格. 可以看出,对这三种空间步长,v 的最大值均出现在 $\alpha=45°$,而当 $\alpha=0°$和 $\alpha=90°$时 v 取最小值. 因此,Yee 氏网格空间即使对物理上各向同性的媒质空间也是各向异性的. 这是时域有限差分法所固有的一种特性. 但是,随着 Δs 的减小,计算网格中的相速度对理想情况相速度的偏离迅速地减小. 计算表明,当 $\Delta s=\lambda/10$ 时,v 的最大偏离为 -1.3%;当 $\Delta s=\lambda/20$ 时,已减小到 -0.31%;当 Δs 减小一倍时,最大偏离差不多以 4∶1 的速度减小.

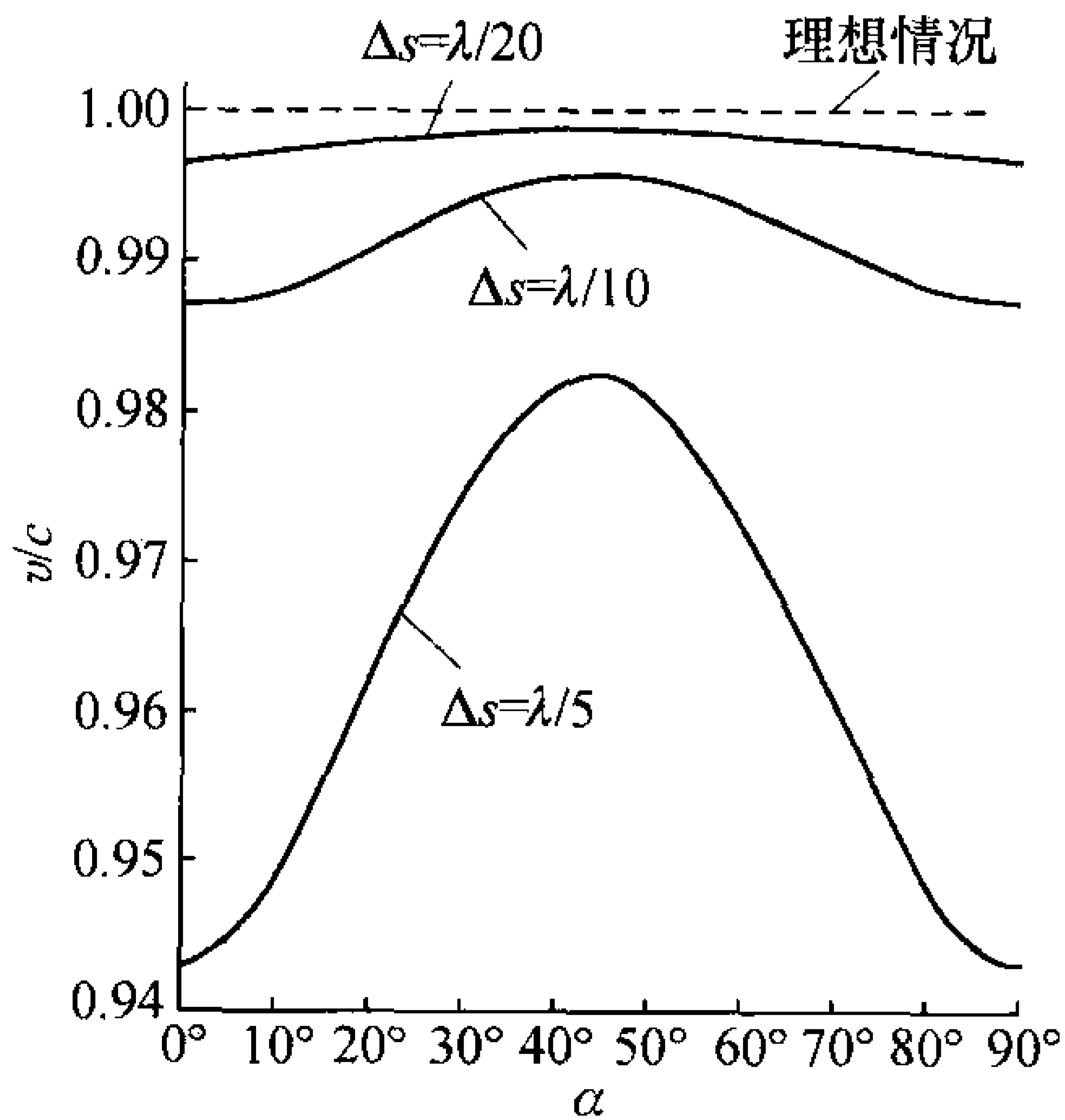


图 7-2 三种空间步长所对应的相速度 v 与平面波入射角 α 的关系

图 7-3 给出了当 $\alpha=0°$, $\alpha=45°$和 $\alpha=90°$时相速度 v 随空间步长 Δs 变化的情况. 在计算中始终取 $\Delta t=\Delta s/2v$. 可以看出,不管以哪一种角度入射,随着 Δs

的增加，v 总在减小，而且 Δs 达到某一数值后 v 会急剧地下降为零. α 不同，Δs 也有差异. 当 $\alpha=45°$时，Δs 最大. 这说明，对于一定频率、一定入射角度的平面波，存在一个 Δs 的极限值，超过该值，平面波在相应 Yee 氏网格中的相速度就会下降为零，即电磁波不能继续在这种网格空间中传播. 换句话说，在 Δs 给定的网格空间中能传播($v\neq0$)的电磁波的频率是受到限制的，即存在一个截止频率，高于该频率的电磁波不能在这种网格空间中传播. 因此，一个给定的网格空间相当于一个低通滤波器. 这也是时域有限差分法所固有的一个特点，这一现象给具有宽频谱的脉冲电磁场问题的计算带来一定困难. 数值色散使高频分量的相速度低于低频分量的相速度，且部分高频分量还可能被截止，从而使脉冲电磁波的波形在 Yee 氏网格空间的传播过程中发生严重畸变. 为此，要慎重选取 Δs，使脉冲的主要频谱分量远离截止频率. 一般来说，要求所对应的波长不小于 10 个空间步长.

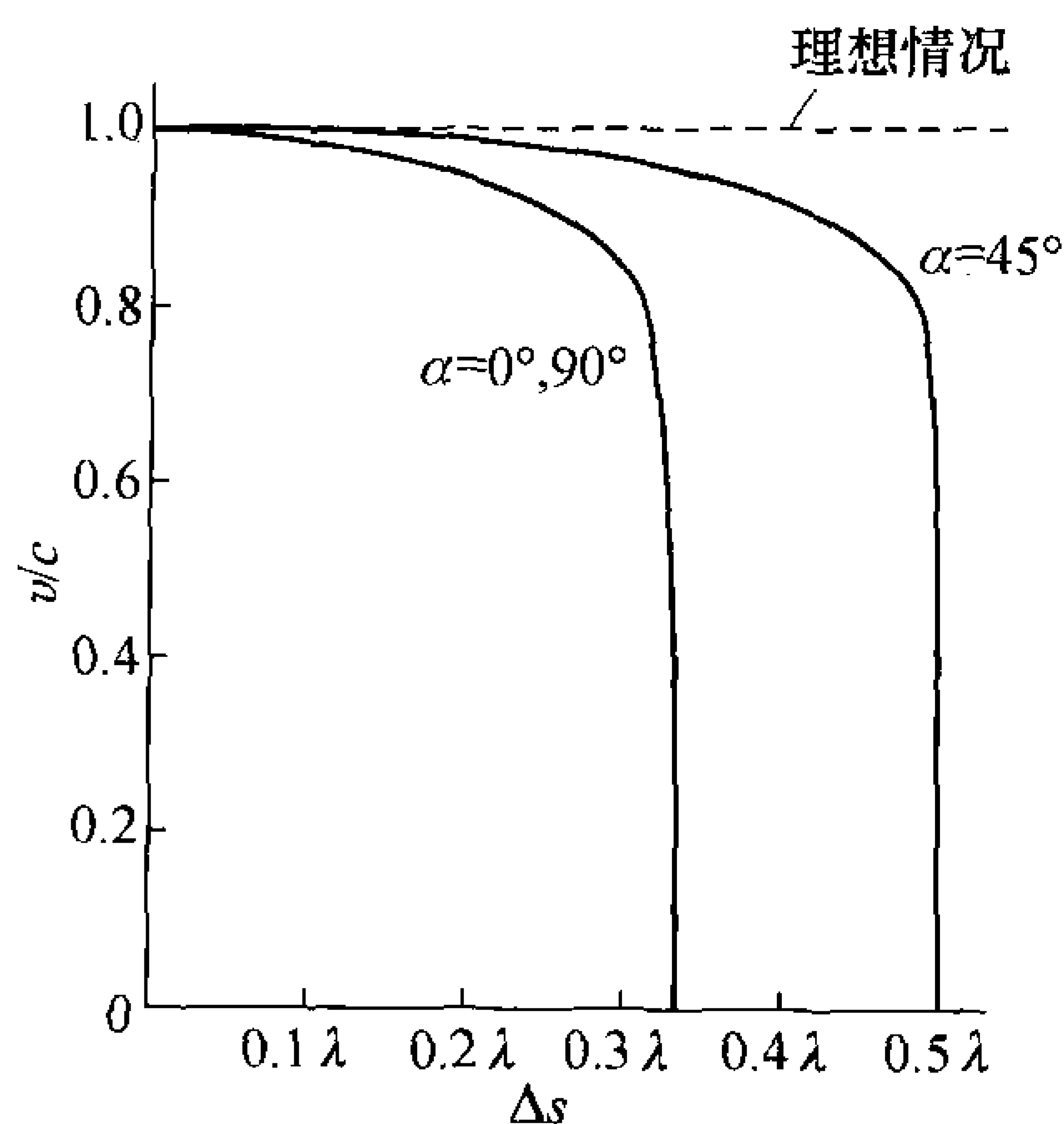


图 7-3　三种入射角度所对应的相速度 v 与空间步长 Δs 的关系

除了各向异性、相速降低甚至出现截止等现象外，使用非均匀网格还会导致在不同尺寸网格的交界面上产生折射效应. 只要使用非均匀网格，即使模拟的是均匀媒质空间，这种非物理原因引起的现象也会存在，因此这也是时域有限差分法的固有特点之一.

7.3.3　获得理想色散关系的特殊条件

由于计算机的存储空间有限，不可能无限地减小空间步长. 然而，只需选取特殊的网格形式和波的传播方向，就可以实现理想的色散关系. 在二维网格空间中，只要选取均匀正方形网格，令电磁波沿网格的对角线方向传播，就有 $k_x=k_y=k/\sqrt{2}$. 若 Δt 满足 $\Delta t=\Delta s/(\sqrt{2}v)$，则式(7.3.7)变为

$$\frac{\omega^2}{v^2}=k^2=k_x^2+k_y^2. \tag{7.3.13}$$

这就是二维网格空间的理想色散关系.

在三维网格空间中，只要选择均匀立方体网格，令电磁波沿网格的对角线方向传播，就有 $k_x=k_y=k_z=k/\sqrt{3}$. 若 Δt 满足 $\Delta t=\Delta s/\sqrt{3}v$，则式(7.3.8)将变为式(7.3.9).

不难想象，在一维网格空间中，只要满足 $\Delta t=\Delta s/v$，就会有理想的色散关系.

§7.4　在电磁散射和辐射问题中的应用

7.4.1　网格空间和散射体模拟

散射体的模拟是用时域有限差分法计算电磁散射问题的关键之一. 只有对散射体的几何形状和组成材料的电磁特性进行足够精确地模拟，才有可能正确地计算其散射特性. 由§7.2导出的时域有限差分法的差分方程可知，各网格点上电磁场的计算直接与方程中的系数相关，而这些系数是空间位置的函数，由各网格点对应的物理空间的电磁性质决定. 若散射体及其周围空间均为非磁性媒质，则空间的电磁特性仅由介电常数和电导率决定. 所谓散射体的模拟就是在网格空间中给某些网格赋予适当的介电常数和电导率，使其几何形状和电磁特性等与被模拟的散射体最大限度地接近. 这个网格空间整体称为散射体的网格模型. 由于散射体的模型以一个完整的网格单元作为最小单位，所以在选取网格单元的空间步长时，要使构成该模型的外层网格尽量与散射体的边界相重合.

如果散射体是不均匀的，3个电场分量所在的网格点可能对应不同的介电常数和电导率，即同一个网格单元中的 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$ 和 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 可能分别具有不同的数值. 显然，这种设置方法可以更细致地模拟散射体的结构及其非均匀性，从而使计算更加准确.

网格单元越小，越能精确地模拟散射体的电磁非均匀性和细微的内部结构，然而也必然使构成计算网格空间的网格总数增加，从而相应地增加对计算机存储空间和CPU时间的要求. 解决这一矛盾的一般原则是：在基本满足计算精度要求的前提下，尽量地节省存储空间和计算时间. 为了保证一定的计算精度，除了要求对散射体模拟的精确程度，还要考虑网格的空间步长对差分格式本身的计算误差的影响. 从空间步长对数值色散影响的角度考虑，一般要求满足 $\Delta s\leqslant\lambda_{\min}/10$，其中 Δs 为均匀网格空间的空间步长(若采用非均匀网格空间，则应为其中最大的空间步长)，$\lambda_{\min}$ 为网格空间(包括散射体)内所传播的电磁波的最短波长.

电磁散射问题是一种开放空间中的电磁场问题. 一般地，散射场将充满整个空间，但计算机不可能以无限大的网格空间模拟开放空间，总是在某处将网格空间截断，因此我们用吸收边界条件来保证以有限的网格空间尽量精确地模拟无限大的开放空间.

在散射问题的网格空间中，中心部分是设置有散射体的总场区，其外部为散射场区. 两个区域由连接边界条件衔接，散射场区的外部边界为吸收边界条件. 总场区的大小主要由对散射体的模拟要求所决定，散射场区的范围则要考虑到吸收边界条件必须离开散射体的距离、在散射体和吸收边界之间设置连接边界条件以及散射场计算的需要. 如果将总场区称为主空间，连接边界以外的区间称为辅助空间，则辅助空间的网格数要占网格总数的很大比例. 这是时域有限差分法的一个缺点. 在设计网格空间时，空间步长及可能模拟的散射体的最大尺度都会受到辅助空间的影响.

对于辐射问题，不需要进行总场区与散射场区的划分.

7.4.2　网格空间中的总场、散射场和入射场

相当多的电磁场问题都是研究平面电磁波与物体间的相互作用，例如目标的散射、吸收和透入特性等. 在这类问题中，场源是具有特定传播方向和极化方向的平面电磁波，其源点应设在无穷远处，在网格空间中必须特殊考虑.

入射的平面电磁波与散射体的相互作用导致了散射波的产生. 散射场与入射场之和满足媒质不连续面上切向分量连续的边界条件，因此在散射体所在区域内直接计算总场更为方便. 在有些问题(如吸收、透入等)中总场是需要计算的场量，但在某些问题中更感兴趣的却是散射场，这时就有必要将散射场分离出来. 如果用 $\boldsymbol{E}_{\text{tot}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\text{tot}}$ 表示总场，则有

$$\boldsymbol{E}_{\text{tot}} = \boldsymbol{E}_{\text{inc}} + \boldsymbol{E}_{\text{sca}}, \quad \boldsymbol{H}_{\text{tot}} = \boldsymbol{H}_{\text{inc}} + \boldsymbol{H}_{\text{sca}}, \tag{7.4.1}$$

其中入射场 $\boldsymbol{E}_{\text{inc}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\text{inc}}$ 是已知的，故只要从总场中减去入射场即可得到散射场

$$\boldsymbol{E}_{\text{sca}} = \boldsymbol{E}_{\text{tot}} - \boldsymbol{E}_{\text{inc}}, \quad \boldsymbol{H}_{\text{sca}} = \boldsymbol{H}_{\text{tot}} - \boldsymbol{H}_{\text{inc}}. \tag{7.4.2}$$

由于麦克斯韦方程组是线性的，因而麦克斯韦旋度方程的时域有限差分格式可用来分别计算总场、散射场和入射场.

若要在整个网格空间中先计算出总场然后再求散射场，一种简便的方法是将整个网格空间分成两个区域，即场区 1 和场区 2. 其特点分别为：场区 1 位于网格空间内部，散射体设置其中. 在场区 1 中既存在入射波，也存在散射波. 麦克斯韦旋度方程的差分格式被用于计算总场，因此称为总场区. 场区 2 位于总场区外部，其中只允许散射波存在，没有入射波. 麦克斯韦旋度方程的差分格式只用于计算散射场，因此称为散射场区. 总场区与散射场区之间的边界称为连接边界. 散射场区的外边界就是网格空间的截断边界，故吸收边界条件(将在本章中详细讨论)只作用于散射场，即只有外行波才能到达吸收边界. 一个二维网格空间的场区划分如图 7-4 所示.

将计算网格空间按上述方式划分为总场区和散射场区，最直接的优点是为散射场的计算提供了方便，不仅可在散射场区直接提供近区散射场的丰富

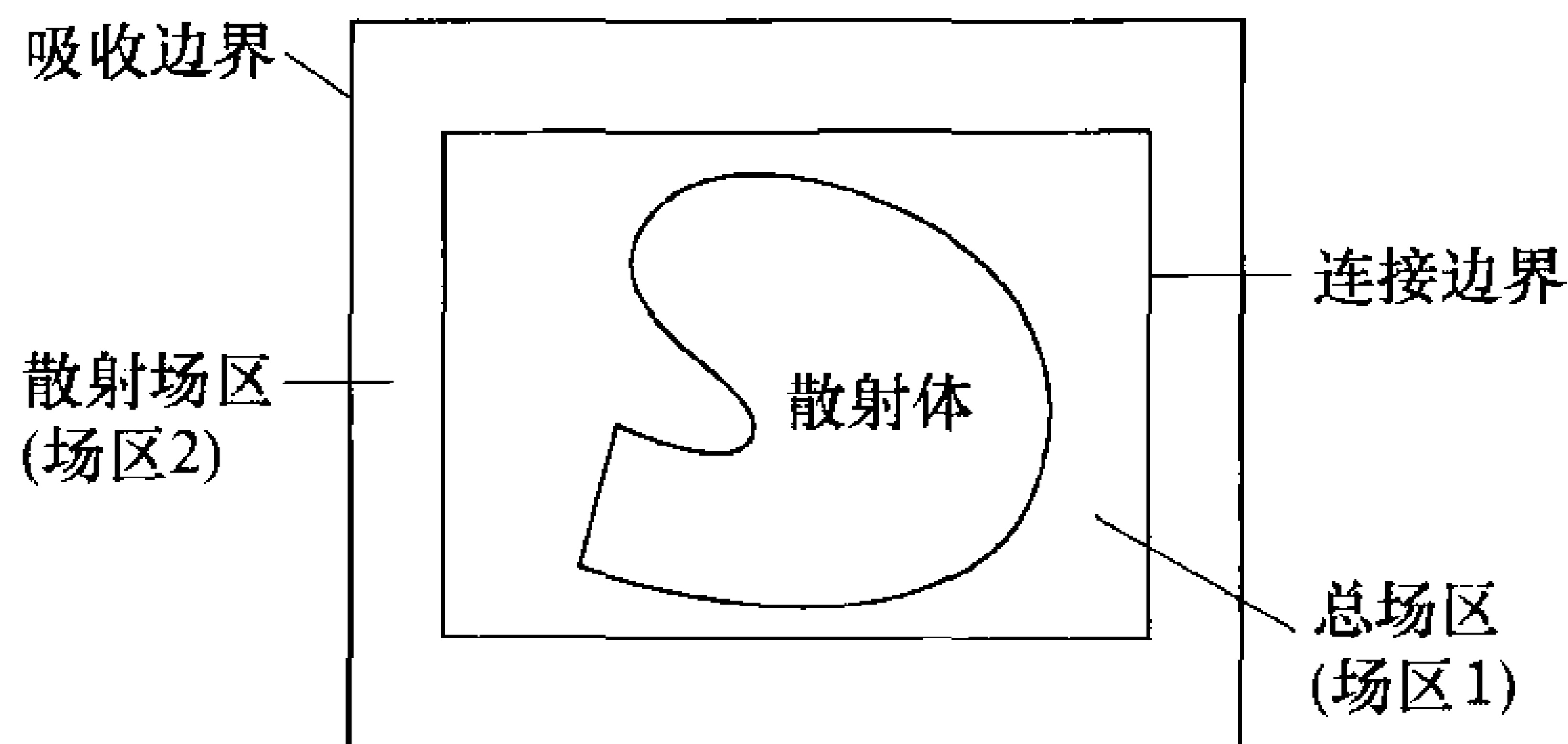


图 7-4 二维网格空间的场区划分

信息，而且由其出发可很方便地导出远区散射场的特性. 此外，动态范围的扩大和入射平面波的任意设置也为用时域有限差分法解决电磁散射问题带来了方便.

7.4.3 二维网格空间中的连接边界条件

按中心差分近似执行的时域有限差分格式不仅需要计算每个网格点上一时间步的场量，还需要其相邻网格点的场量. 这就导致在计算总场区边界点处的总场时需要用到散射场区中网格点的总场值，在计算散射场区的边界点处的散射场时需要用到总场区中网格点的散射场值. 然而，散射场区中边界网格点处的总场值和总场区中边界网格点处的散射场值在计算机中并不存在. 因此，对连接边界上的场的计算需特别对待. 这些边界点处的场所满足的特殊关系称为连接边界条件.

1. 电场分量的连接边界条件

以二维 TM 波为例. 在直角坐标系的二维网格空间中，一条连接边界如图 7-5 所示.

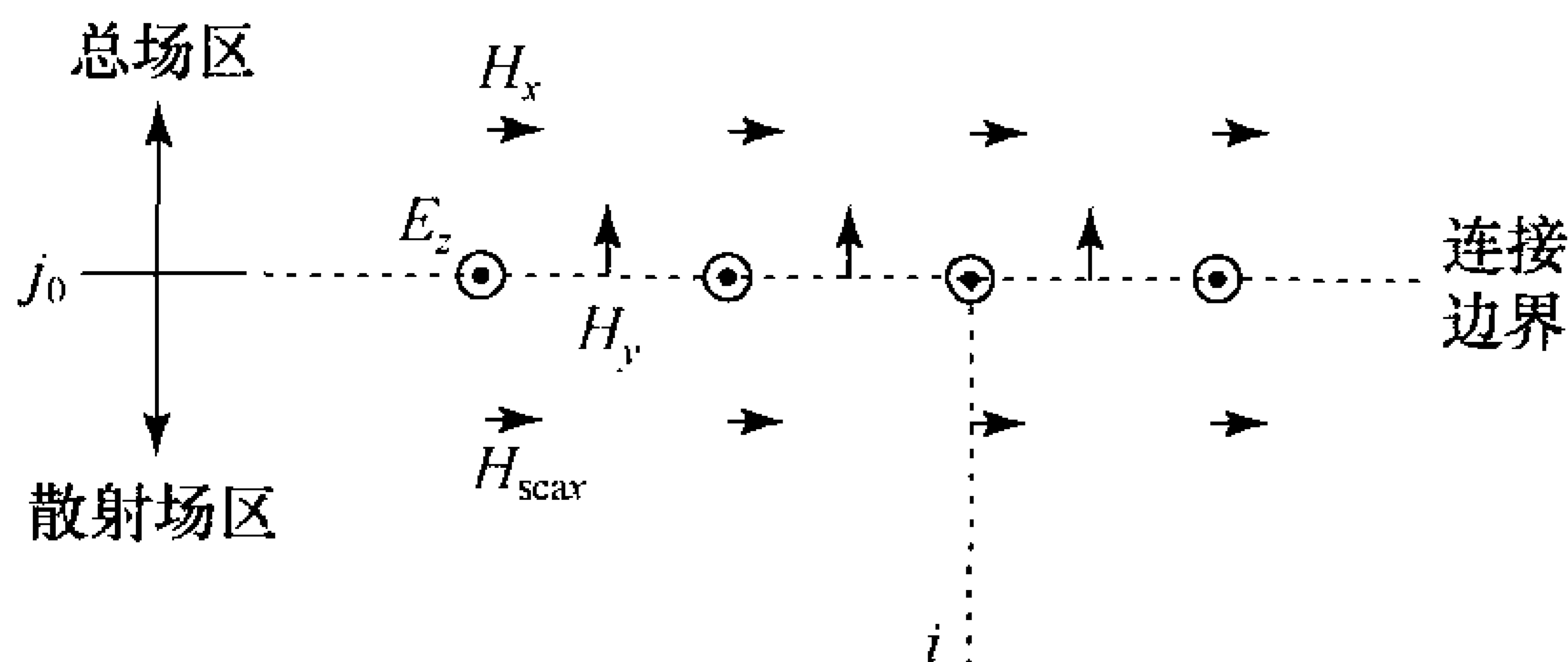


图 7-5 二维网格空间中的一条连接边界及其邻近的场

设这条连接边界在 y 轴的坐标为 j_0，j_0 的上方为总场区，下方为散射场区. 如果将连接边界归为总场区，则由方程(7.1.37)可知，计算 $E_{totz}^{n+1}(i,j_0)$ 要用到 $H_{totx}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0+1/2)$ 和 $H_{totx}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2)$，但点 $(i,j_0-1/2)$ 在散射场区中，因此不存在 $H_{totx}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2)$ 的值. 由于

$$H_{\text{tot}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)=H_{\text{sca}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)+H_{\text{inc}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right),\quad(7.4.3)$$

而入射场 $H_{\text{inc}x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2)$ 是根据所设置的入射平面波计算的，故由方程(7.1.37)和(7.4.3)可知，$E_{\text{tot}z}^{n+1}(i,j_0)$ 可按下式计算，即

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\text{tot}z}^{n+1}(i,j_0)=&CA(i,j_0)\widetilde{E}_{\text{tot}z}^{n}(i,j_0)+CD\cdot CB(i,j_0)\Big[H_{\text{tot}y}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_0\right)\\&-H_{\text{tot}y}^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j_0\right)+H_{\text{sca}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)\\&-H_{\text{tot}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0+\frac{1}{2}\right)+H_{\text{inc}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)\Big].\end{aligned}\quad(7.4.4)$$

图 7-6 给出二维网格空间中完整的连接边界，其坐标在 x 轴分别为 i_0 和 i_1，在 y 轴分别为 j_0 和 j_1.

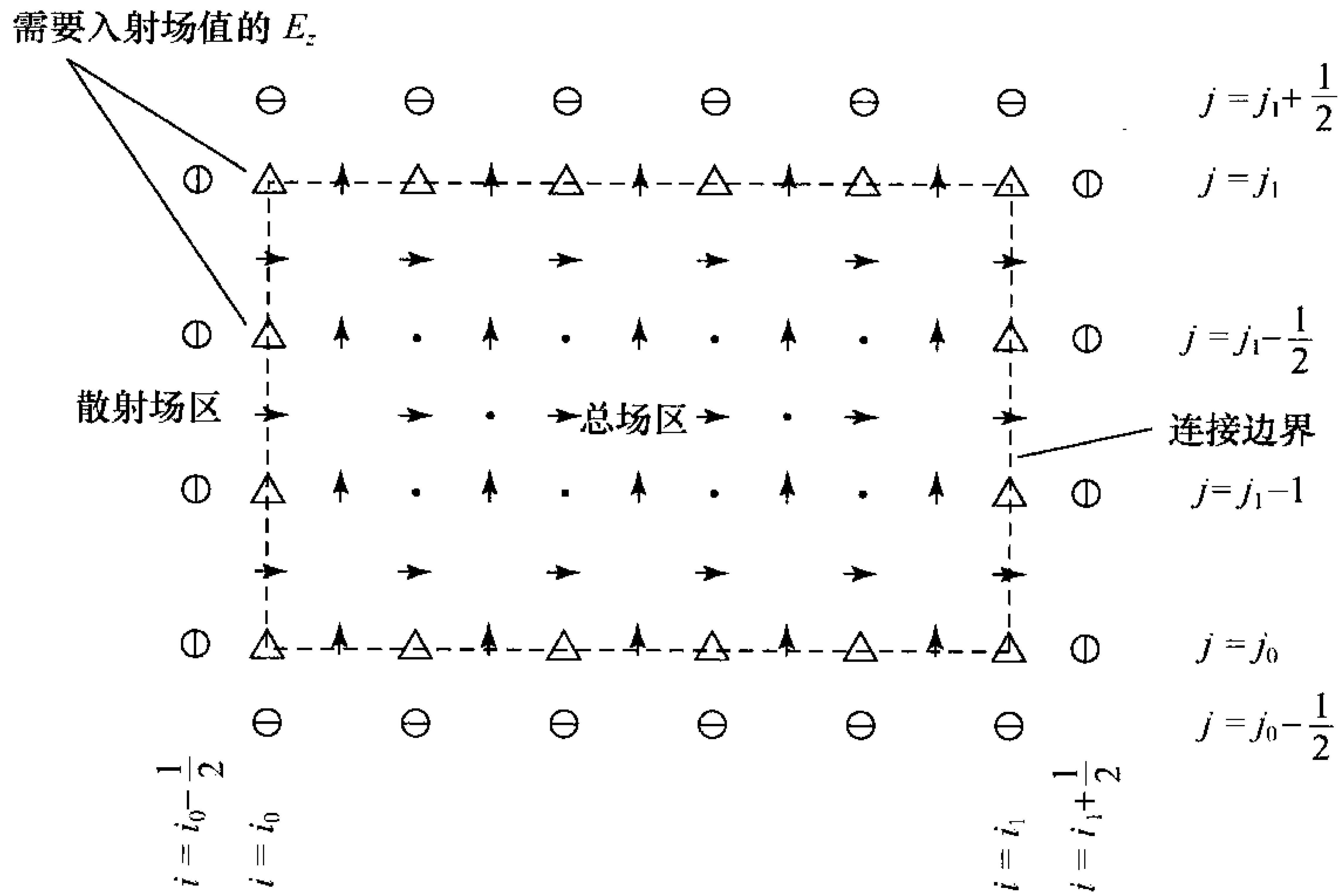


图 7-6　二维网格空间连接边界上需要特殊处理的电场分量

方程(7.4.4)不适用于角点(i_0,j_0)和(i_1,j_0)，因为计算这两个点处的电场分量要用到两个在散射场区中磁场分量的值. 上式的适用范围为 $j=j_0$；$i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1$. 这条连接边界称为前边界. 类似地，可得到其他连接边界(见 a～c)上电场分量的差分格式：

a. 后边界$(j=j_1;i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1)$.

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\text{tot}z}^{n+1}(i,j_1)=&CA(i,j_1)\widetilde{E}_{\text{tot}z}^{n}(i,j_1)+CD\cdot CB(i,j_1)\Big[H_{\text{tot}y}^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j_1\right)\\&-H_{\text{tot}y}^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j_1\right)+H_{\text{tot}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1-\frac{1}{2}\right)\\&-H_{\text{sca}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2}\right)-H_{\text{inc}x}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2}\right)\Big].\end{aligned}\quad(7.4.5)$$

b. 左边界($i=i_0;j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1$).

$$\widetilde{E}^{n+1}_{totz}(i_0,j) = CA(i_0,j)\widetilde{E}^{n}_{totz}(i_0,j) + CD\cdot CB(i_0,j)\Big[H^{n+\frac{1}{2}}_{toty}\left(i_0+\frac{1}{2},j\right) - H^{n+\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_0-\frac{1}{2},j\right) + H^{n+\frac{1}{2}}_{totx}\left(i_0,j-\frac{1}{2}\right) - H^{n+\frac{1}{2}}_{totx}\left(i_0,j+\frac{1}{2}\right) - H^{n+\frac{1}{2}}_{incy}\left(i_0-\frac{1}{2},j\right)\Big]. \tag{7.4.6}$$

c. 右边界($i=i_1;j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1$).

$$\widetilde{E}^{n+1}_{totz}(i,j) = CA(i_1,j)\widetilde{E}^{n}_{totz}(i_1,j) + CD\cdot CB(i_1,j)\Big[H^{n+\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_1+\frac{1}{2},j\right) - H^{n+\frac{1}{2}}_{toty}\left(i_1-\frac{1}{2},j\right) + H^{n+\frac{1}{2}}_{totx}\left(i_1,j-\frac{1}{2}\right) - H^{n+\frac{1}{2}}_{totx}\left(i_1,j+\frac{1}{2}\right) + H^{n+\frac{1}{2}}_{incy}\left(i_1+\frac{1}{2},j\right)\Big]. \tag{7.4.7}$$

在角点(i_0,j_0),(i_0,j_1),(i_1,j_0)和(i_1,j_1)处,由于分别有两个磁场分量的取值点在散射场区中,故要用到相应的入射场值,其结果与方程(7.4.4)～(7.4.7)类似,只是多了一个修正项而已.方程(7.4.4)～(7.4.7)称为电场分量的连接边界条件.

2. 磁场分量的连接边界条件

虽然处于连接边界上的磁场分量只由同场区的电场分量决定,但对边界外距离半个空间步长的网格点处的磁场分量需要作特殊处理,如图7-7所示.

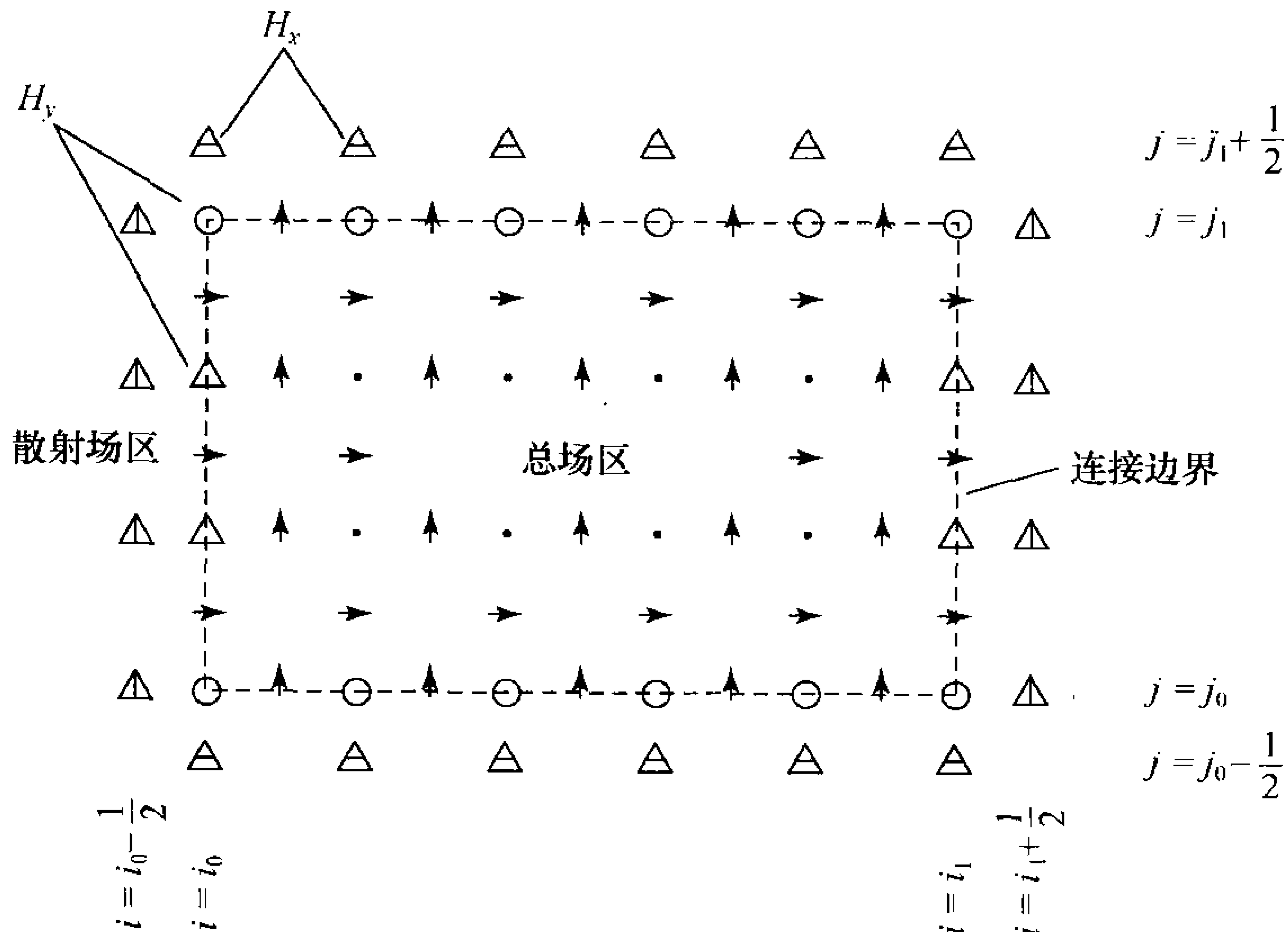


图7-7 二维空间连接边界外需要特殊处理的磁场分量

处理方法与前面讲到的对电场分量的做法类似. 例如,在计算前边界外的 $H^{n+\frac{1}{2}}_{scax}(i,j_0-1/2)$ 要用到 $E^n_{scaz}(i,j_0-1)$ 和 $E^n_{totz}(i,j_0)$,但点 (i,j_0) 不在散射场区中,因此不存在 $E^n_{totz}(i,j_0)$ 的值. 由

$$E^n_{scaz}(i,j_0) = E^n_{totz}(i,j_0) - E^n_{incz}(i,j_0) \tag{7.4.8}$$

可得到 $H^{n+\frac{1}{2}}_{scax}(i,j_0-1/2)$ 分量的差分格式

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{scax}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)=H^{n-\frac{1}{2}}_{scax}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)+CD[\widetilde{E}^n_{scaz}(i,j_0-1) - \widetilde{E}^n_{totz}(i,j_0)+\widetilde{E}^n_{incz}(i,j_0)]. \tag{7.4.9}$$

上式的适用范围是 $j=j_0-1/2;i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$. 类似地,可得到其他连接边界(a～c)上磁场分量的差分格式

a. 后边界外($j=j_1+1/2;i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$).

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{scax}\left(i,j_1+\frac{1}{2}\right)=H^{n-\frac{1}{2}}_{scax}\left(i,j_1+\frac{1}{2}\right)+CD[\widetilde{E}^n_{totz}(i,j_1) - \widetilde{E}^n_{scaz}(i,j_1+1)-\widetilde{E}^n_{incz}(i,j_1)]. \tag{7.4.10}$$

b. 左边界外($i=i_0-1/2;j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$).

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_0-\frac{1}{2},j\right)=H^{n-\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_0-\frac{1}{2},j\right)+CD[\widetilde{E}^n_{totz}(i_0,j) - \widetilde{E}^n_{scaz}(i_0-1,j)-\widetilde{E}^n_{incz}(i_0,j)]. \tag{7.4.11}$$

c. 右边界外($i=i_1+1/2;j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$).

$$H^{n+\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_1+\frac{1}{2},j\right)=H^{n-\frac{1}{2}}_{scay}\left(i_1+\frac{1}{2},j\right)+CD[\widetilde{E}^n_{scaz}(i_1+1,j) - \widetilde{E}^n_{totz}(i_1,j)+\widetilde{E}^n_{incz}(i_1,j)]. \tag{7.4.12}$$

方程(7.4.9)～(7.4.12)称为磁场分量的连接边界条件.

由方程(7.4.4)～(7.4.7)和方程(7.4.9)～(7.4.12)构成的连接边界条件保证了二维网格空间中两个场区的划分,使得散射场区中只有散射场存在,入射场仅出现在总场区中. 连接边界对散射场是透明的,外向散射波可以自由地进入散射场区.

由于只在总场区中存在入射场,所以平面波可以看做是由连接边界产生的. 当网格空间中不存在散射体时,总场区中不存在散射场,即总场就是平面波. 因此,可以用总场区中平面波的质量来衡量连接条件的精度. 在这种情况下,没有散射波存在,平面波不进入散射场区. 散射场区中的散射场应为零,故在散射场区中的场处处为零,因此也可用来检验平面波源和连接边界条件的质量.

7.4.4 二维网格空间中的入射平面波

由前一小节的讨论可知，入射平面波正是通过连接边界引入到总场区的. 为了将入射平面波设置到网格空间中，必须给出其在网格空间中的表示和计算方法.

一个平面波的主要参量是波矢和极化方向及其随时间变化的规律. 为了使算法具有广泛的适用性，应尽量将入射平面波设置为一般的情况. 对于稳定的简谐平面波，可将其随时间步长 Δt 变化的规律表示为

$$\boldsymbol{E}_{\text{inc}}(n\Delta t) = \boldsymbol{E}_0 \sin 2\pi f n \Delta t, \tag{7.4.13}$$

其中 $\boldsymbol{E}_0$ 为振幅，n 为迭代时间步数，f 为入射波的频率. 若入射波的时间波形为任意的时变函数 $g(t)$，则一般地有

$$\boldsymbol{E}_{\text{inc}}(n\Delta t) = \boldsymbol{E}_0 g(n\Delta t). \tag{7.4.14}$$

以二维 TM 波为例，如果入射平面波的单位波矢为 $\boldsymbol{e}_{k\text{inc}}$，与 x 轴正方向的夹角为 $\varphi(0°\leqslant\varphi\leqslant 90°)$，则该平面波的波前首先到达总场区中的点$(i_0, j_0)$，或者说，由连接边界产生的平面波从点$(i_0, j_0)$进入总场区，如图 7-8 所示. 因此，选点$(i_0, j_0)$作为入射平面波的坐标原点比较方便，记为点 O_1.

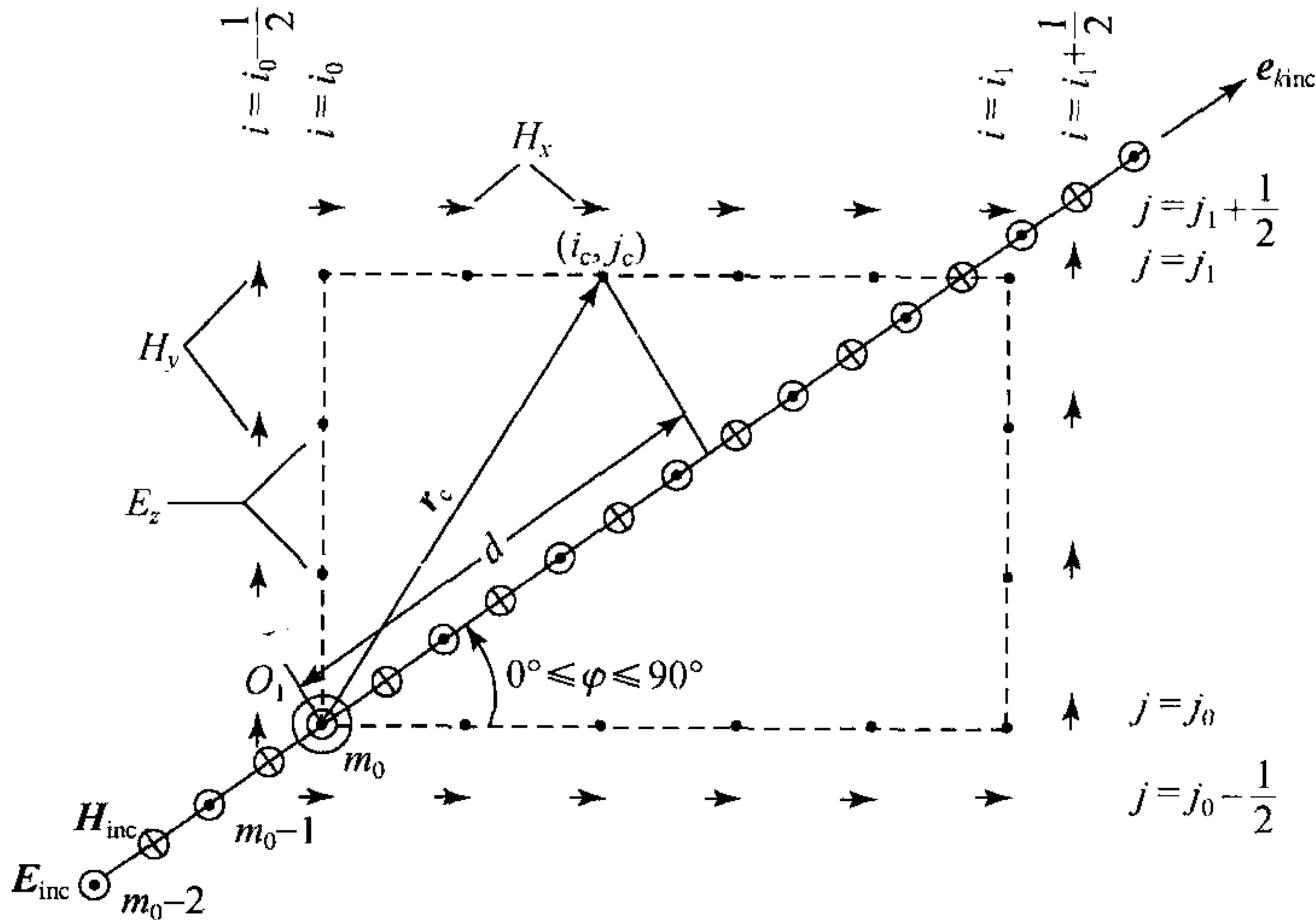


图 7-8 入射平面波在网格空间中的表示

根据平面电磁波的特点，如果点 O_1 的入射波已知，要求点(i_c, j_c)处的入射波，只需知道该点的波滞后于点 O_1 的入射波的时间即可. 若用 n_{ret} 表示滞后时间所对应的迭代时间步数，则可按下列关系计算

$$n_{\mathrm{ret}} = \frac{d\Delta s}{v(\varphi)\Delta t} \tag{7.4.15}$$

其中 $v(\varphi)$ 为入射平面波沿 φ 方向传播时的相速度，d 为通过点 (i_c, j_c) 的入射平面波的等相面到点 O_1 的垂直距离（称为滞后距离，以空间步长 Δs 为单位）. 若用 $\boldsymbol{r}_c$ 表示从点 O_1 到点 (i_c, j_c) 的矢径（也以 Δs 为单位），则显然有

$$d = \boldsymbol{e}_{k\mathrm{inc}} \cdot \boldsymbol{r}_c, \tag{7.4.16}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_{k\mathrm{inc}} = \cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\varphi\hat{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{7.4.17}$$

由于在连接边界条件中参与运算的一些入射波的取值点位于半网格处，所以 i_c，j_c 和 $|\boldsymbol{r}_c|$ 可能取整数加（或减）1/2 的数值.

如果 $\varphi > 90°$，入射波首先到达的总场区的点将不再是点 (i_0, j_0)，故不能再用式(7.4.16)和(7.4.17)计算 d. 为了使计算关系保持不变，可在不同的入射角度范围选择不同的坐标原点，如图 7-9 中所示.

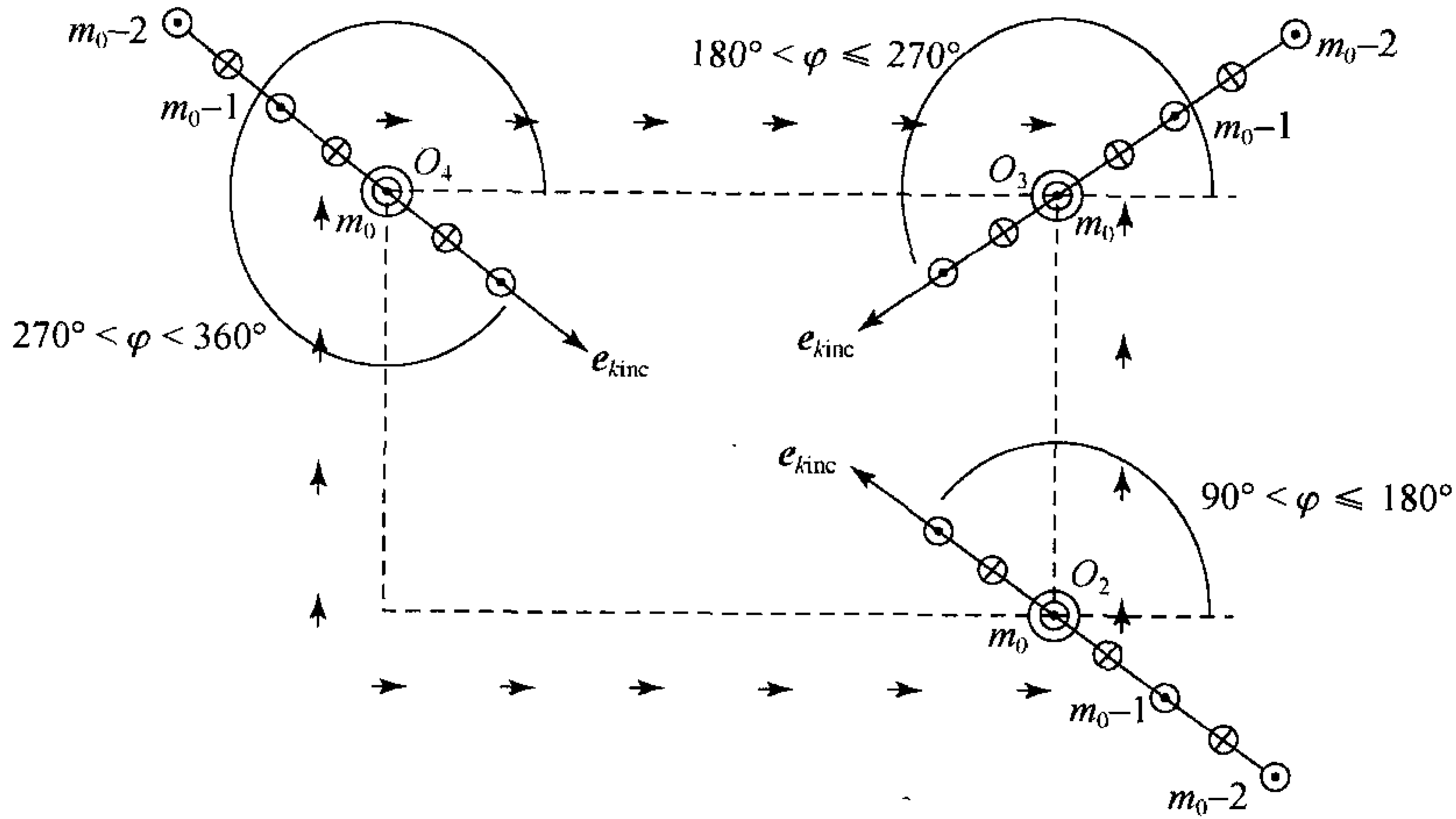


图 7-9　不同入射角度对应的坐标原点的选择

当 $90° < \varphi \leqslant 180°$ 时，原点选在点 (i_1, j_0)，记为 O_2；当 $180° < \varphi \leqslant 270°$ 时，原点选在点 (i_1, j_1) 记为 O_3，当 $270° < \varphi < 360°$ 时，原点选在点 (i_0, j_1)，记为 O_4. 相对于不同的坐标原点，$\boldsymbol{r}_c$ 也随之变化. 当 $90° < \varphi \leqslant 180°$ 时，$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}}$；当 $180° < \varphi \leqslant 270°$ 时，$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}}$；当 $270° < \varphi < 360°$ 时，$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}}$.

由于处于平面波同一等相面上各点的场是相同的，故只要求得某一网格点的 d，就很容易求得该点入射波的场. 这时，入射平面波可按一维问题进行计算. 假设平面波在自由空间中传播，则 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{inc}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{inc}}$ 可在一维空间单独计算，不难得到

$$\widetilde{E}_{\rm inc}^{n+1}(m) = \widetilde{E}_{\rm inc}^{n}(m) + CD\left[H_{\rm inc}^{n+\frac{1}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right) - H_{\rm inc}^{n+\frac{1}{2}}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right], \tag{7.4.18}$$

$$H_{\rm inc}^{n+\frac{1}{2}}\left(m+\frac{1}{2}\right) = H_{\rm inc}^{n-\frac{1}{2}}\left(m+\frac{1}{2}\right) + CD[\widetilde{E}_{\rm inc}^{n}(m) - \widetilde{E}_{\rm inc}^{n}(m+1)], \tag{7.4.19}$$

其中 m 为一维网格数(m 为整数). 由于入射波是一维的,其波源就是一个点,波源与时间的关系由平面波的性质决定. 稳定的简谐波的波源由式(7.4.13)给出. 一般将波源设在坐标原点外,若原点在一维坐标中的网格数记为 m_0,而波源位于 m_0-2,则波源可设置为

$$\widetilde{E}_{\rm inc}^{n}(m_0-2) = \widetilde{E}_0 \sin 2\pi f n\Delta t, \tag{7.4.20}$$

一般的波形可表示为

$$\widetilde{E}_{\rm inc}^{n}(m_0-2) = \widetilde{E}_0 g(n\Delta t). \tag{7.4.21}$$

在均匀网格空间中,按方程(7.4.18)和(7.4.19)计算的场是相隔一个空间步长 Δs 的网格点上的平面波. 实际上,d 不总是 Δs 的整数倍,故有时所需要的入射波不能由方程(7.4.18)和(7.4.19)直接计算,而需要求出距坐标原点 d 处的近似值. 如果采用直接插值近似,则有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{\rm inc}(d) &= (d-{\rm int}d)\widetilde{E}_{\rm inc}(m_0+{\rm int}d+1)\\ &\quad + [1-(d-{\rm int}d)]\widetilde{E}_{\rm inc}(m_0+{\rm int}d),\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

$$\begin{aligned}H_{\rm inc}(d) &= \left[d+\frac{1}{2}-{\rm int}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right]H_{\rm inc}\left(m_0-\frac{1}{2}+{\rm int}\left(d+\frac{1}{2}\right)+1\right)\\ &\quad + \left\{1-\left[d+\frac{1}{2}-{\rm int}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\ &\quad \cdot H_{\rm inc}\left(m_0-\frac{1}{2}+{\rm int}\left(d+\frac{1}{2}\right)\right),\end{aligned} \tag{7.4.23}$$

其中 $E_{\rm inc}(d)$和 $H_{\rm inc}(d)$表示距原点 d 处的入射电磁场,int(·)表示取整数值.

由于二维 TM 波的电场只有 z 分量,故入射平面波的极化方向应与 Oxy 平面垂直,电磁场各分量可按下式求得

$$E_{{\rm inc}z}(d) = E_{\rm inc}(d), \tag{7.4.24}$$

$$H_{{\rm inc}x}(d) = H_{\rm inc}(d)\sin\varphi, \tag{7.4.25}$$

$$H_{{\rm inc}y}(d) = -H_{\rm inc}(d)\cos\varphi. \tag{7.4.26}$$

用由以上方法求得的入射波计算连接边界条件,既保证了总场区与散射场区的划分,又使平面波在总场区中按照给定的特性及变化规律传播,并与设置在总场区中的散射体发生作用.

7.4.5 三维网格空间中的连接边界条件和入射平面波

前两小节中所得到的二维 TM 波的连接边界条件和入射平面波的计算方

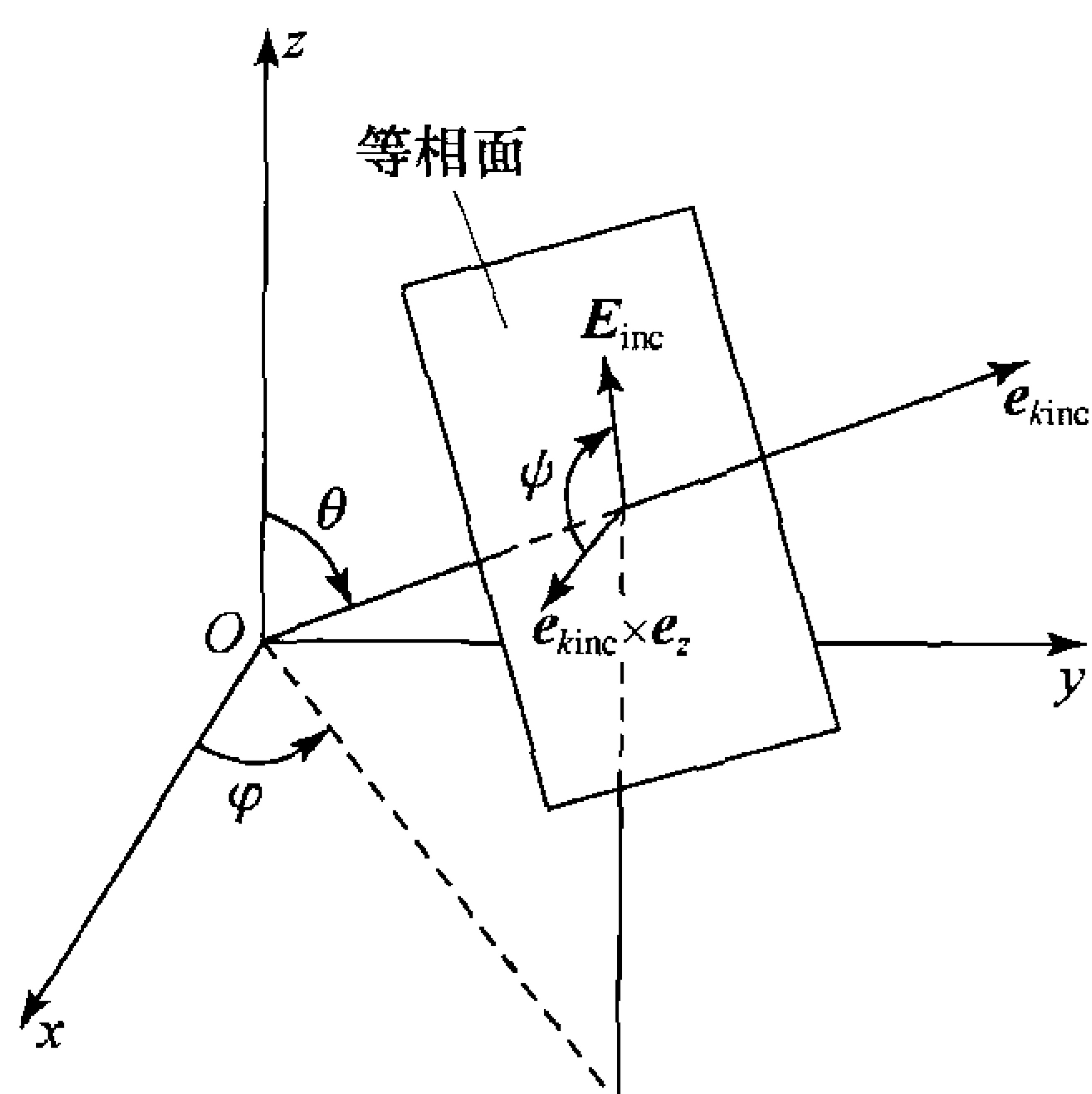


图 7-10 入射平面波的表示方法

法可以直接推广到三维空间. 以直角坐标系中的均匀网格空间为例，在描述入射平面波时，可将坐标原点放在网格空间中连接边界的某一角点上. 图 7-10 给出了入射平面波在球坐标系中的表示方法. 设其单位波矢 e_{kinc} 与 z 轴正方向的夹角为 $\theta(0°\leqslant\theta\leqslant180°)$，与 x 轴正方向之间的夹角为 $\varphi(0°\leqslant\varphi\leqslant360°)$. 为了表示入射平面波的极化方向，在等相面上规定一个参考矢量 $e_{kinc}\times e_z$，设入射电场 E_{inc} 与 $e_{kinc}\times e_z$ 之间的夹角为 ψ. 当 $\theta=0°$ 或 $\theta=180°$ 时，这种表示方法无效，可直接用坐标 φ 表示极化方向.

1. 电场分量的连接边界条件

在直角坐标系的三维网格空间中，连接边界由 6 个坐标平面组成，如图 7-11 所示，其坐标在 x, y 和 z 轴分别为 i_0 和 i_1, j_0 和 j_1, k_0 和 k_1. 由这 6 个平面所构成的立方体的 8 个角点分别记为 O_1, O_2, O_3, O_4 和 O_1', O_2', O_3', O_4'.

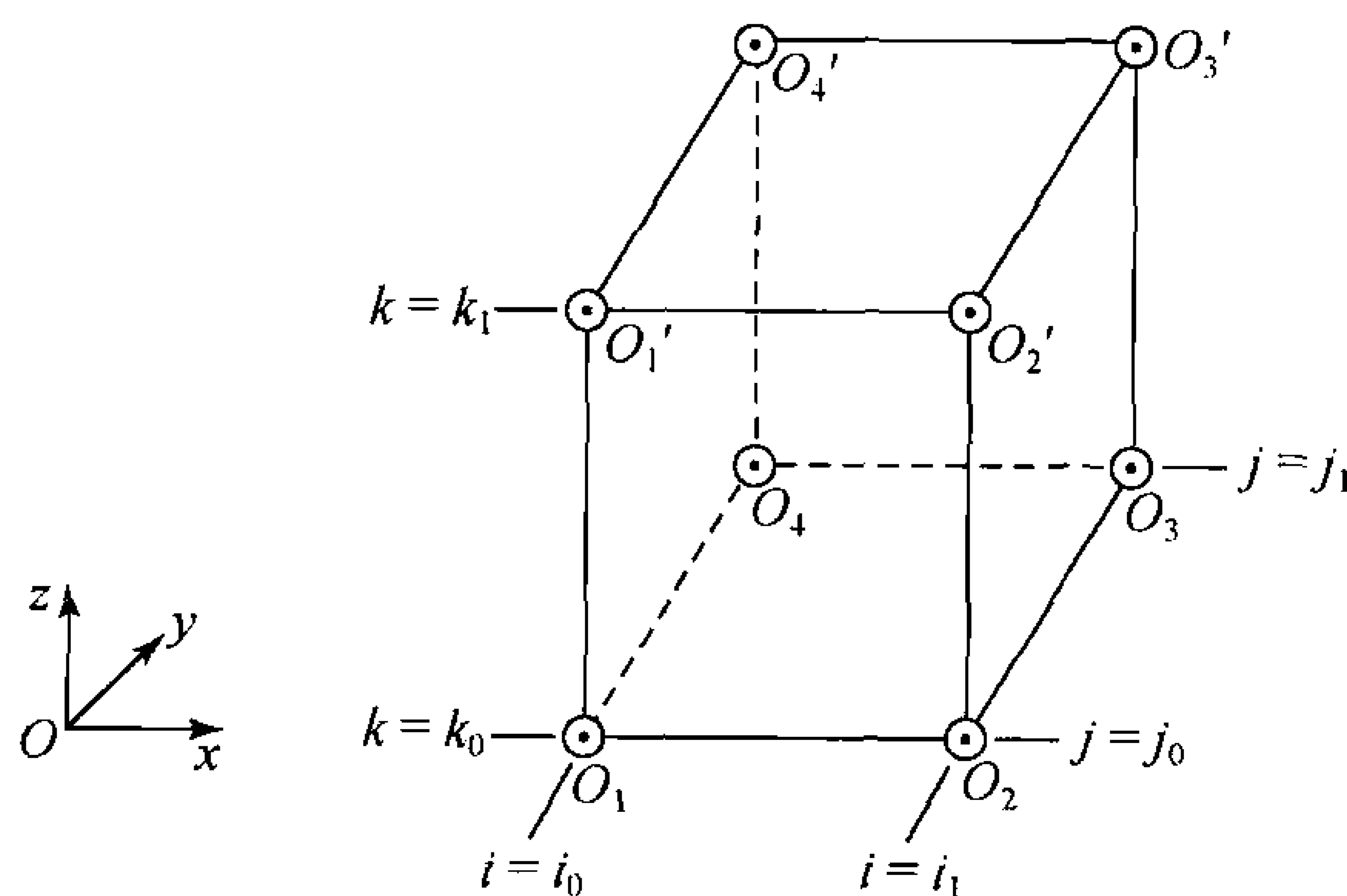


图 7-11 三维网格空间中的连接边界

各场分量在连接边界上的位置在图7-12中给出. 处于 $j=j_0$ 和 $j=j_1$ 两个平面上的电场是 E_x 和 E_z，处于 $k=k_0$ 和 $k=k_1$ 两个平面上的电场是 E_x 和 E_y，处于 $i=i_0$ 和 $i=i_1$ 两个平面上的电场是 E_y 和 E_z. 相互平行的网格面上的电场分量的位置都是相同的.

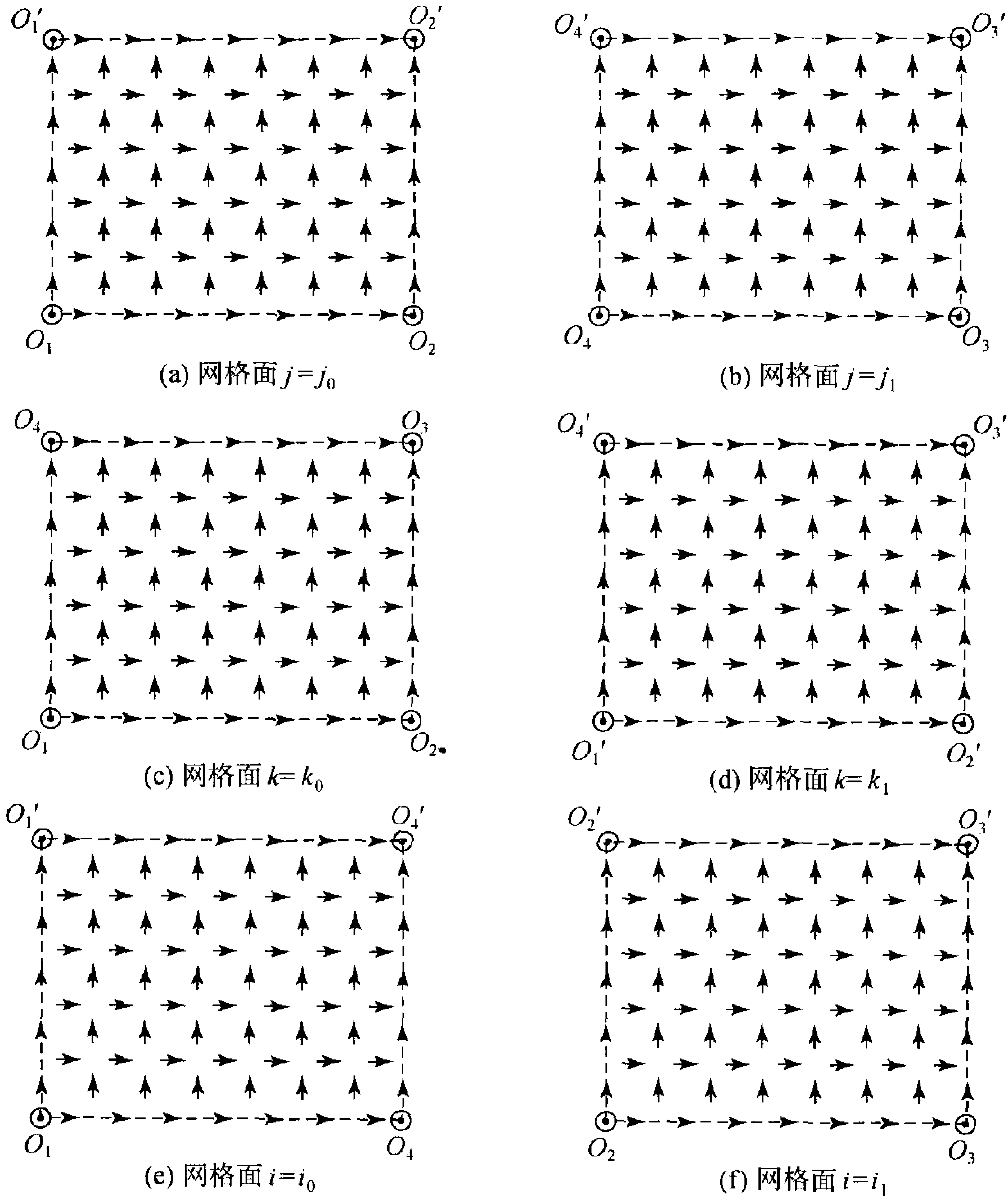


图 7-12　连接边界面上的场分量

注：(a)，(b)图中"→"和"↑"分别表示场分量 E_x 和 E_z 的位置，
(c)，(d)图中"→"和"↑"分别表示场分量 E_x 和 E_y 的位置，
(e)，(f)图中"→"和"↑"分别表示场分量 E_y 和 E_z 的位置.

和二维情况类似，如果将上述连接边界面归为总场区，则对其上电场分量的计算要用到散射区中磁场分量的值. 因此，边界面上的场的计算格式必须另外给出，称为电场的连接边界条件. 例如，由式(7.1.35)可以求出平面 $j=j_0$ 上的 $E_{totx}^{n+1}(i,j_0,k)$

$$\widetilde{E}_{totx}^{n+1}(i,j_0,k)=CA(i,j_0,k)\widetilde{E}_{totx}^{n}(i,j_0,k)+CD\cdot CB(i,j_0,k)$$

$$\cdot\left[H_{totz}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0+\frac{1}{2},k\right)-H_{scaz}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)+H_{toty}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0,k-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$-H_{\text{toty}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0,k+\frac{1}{2}\right)-H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)\Big]. \tag{7.4.27}$$

由于在散射场区中的点$(i,j_0-1/2,k)$处仅存储$H_{\text{scaz}}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2,k)$，因此在计算中要用到$H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2,k)$，于是在上式中，除$H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}(i,j_0-1/2,k)$外，所有场量的下角标都不必特别强调，其余部分可用方程(7.1.35)中的差分格式替代，表示为$\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j_0,k)|_{方程(7.1.35)}$. 则方程(7.4.27)可简写为

$$\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j_0,k)=\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j_0,k)\,|_{方程(7.1.35)}$$
$$-CD\cdot CB(i,j_0,k)H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right). \tag{7.4.28}$$

由图 7-12(a)可以看出，上式的适用范围为$j=j_0$；$i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$；$k=k_0+1,k_0+2,\cdots,k_1-1$. 这个连接边界面称为前边界面. 同样地，对于前边界面上的E_z分量，有如下的差分格式

$$\widetilde{E}_z^{n+1}(i,j_0,k)=\widetilde{E}_z^{n+1}(i,j_0,k)\,|_{方程(7.1.35)}$$
$$+CD\cdot CB(i,j_0,k)H_{\text{incx}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right), \tag{7.4.29}$$

其适用范围则为$j=j_0,i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1,k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

类似地，其他边界面上的电场分量可表示为如下(a～e)的差分格式.

a. 后边界面，如图 7-12(b)所示.

$$\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j_1,k)=\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j_1,k)\,|_{方程(7.1.35)}$$
$$+CD\cdot CB(i,j_1,k)H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right), \tag{7.4.30}$$

其适用范围为$j=j_1$；$i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$；$k=k_0+1,k_0+2,\cdots,k_1-1$.

$$\widetilde{E}_z^{n+1}(i,j_1,k)=\widetilde{E}_z^{n+1}(i,j_1,k)\,|_{方程(7.1.35)}$$
$$-CD\cdot CB(i,j_1,k)H_{\text{incx}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right), \tag{7.4.31}$$

上式适用范围为$j=j_1$；$i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1$；$k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

b. 底边界面，如图 7-12(c)所示.

$$\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j,k_0)=\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j,k_0)\,|_{方程(7.1.35)}$$
$$+CD\cdot CB(i,j,k_0)H_{\text{incy}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right), \tag{7.4.32}$$

上式适用范围为$k=k_0$；$i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$；$j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1$.

$$\widetilde{E}_y^{n+1}(i,j,k_0)=\widetilde{E}_y^{n+1}(i,j,k_0)\,|_{方程(7.1.35)}$$

$$-CD\cdot CB(i,j,k_0)H_{\text{incx}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right),\quad(7.4.33)$$

上式适用范围为 $k=k_0;i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1;j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$.

c. 顶边界面,如图 7-12(d)所示.

$$\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j,k_1)=\widetilde{E}_x^{n+1}(i,j,k_1)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$-CD\cdot CB(i,j,k_1)H_{\text{incy}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right),\quad(7.4.34)$$

上式适用范围为 $k=k_1;i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2;j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1$.

$$\widetilde{E}_y^{n+1}(i,j,k_1)=\widetilde{E}_y^{n+1}(i,j,k_1)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$+CD\cdot CB(i,j,k_1)H_{\text{incx}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right),\quad(7.4.35)$$

上式适用范围为 $k=k_1;i=i_0+1,i_0+2,\cdots,i_1-1;j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$.

d. 左边界面,如图 7-12(e)所示.

$$\widetilde{E}_y^{n+1}(i_0,j,k)=\widetilde{E}_y^{n+1}(i_0,j,k)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$+CD\cdot CB(i_0,j,k)H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right),\quad(7.4.36)$$

上式适用范围为 $i=i_0;j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2;k=k_0+1,k_0+2,\cdots,k_1-1$.

$$\widetilde{E}_z^{n+1}(i_0,j,k)=\widetilde{E}_z^{n+1}(i_0,j,k)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$-CD\cdot CB(i_0,j,k)H_{\text{incy}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right),\quad(7.4.37)$$

上式适用范围为 $i=i_0;j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1;k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

e. 右边界面,如图 7-12(f)所示.

$$\widetilde{E}_y^{n+1}(i_1,j,k)=\widetilde{E}_y^{n+1}(i_1,j,k)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$-CD\cdot CB(i_1,j,k)H_{\text{incz}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right),\quad(7.4.38)$$

上式适用范围为 $i=i_1;j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2;k=k_0+1,k_0+2,\cdots,k_1-1$.

$$\widetilde{E}_z^{n+1}(i_1,j,k)=\widetilde{E}_z^{n+1}(i_1,j,k)\big|_{\text{方程(7.1.35)}}$$
$$+CD\cdot CB(i_1,j,k)H_{\text{incy}}^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right).\quad(7.4.39)$$

上式适用范围为 $i=i_1;j=j_0+1,j_0+2,\cdots,j_1-1;k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,$

$k_1-1/2$.

方程(7.4.28)～(7.4.39)称为电场分量的连接边界条件，其中标有“$\cdots|_{方程(7.1.35)}$”的电场分量均可由与方程(7.1.35)类似的其他分量的差分方程导出.

在连接边界的12条棱边上，电场分量的计算涉及散射场区中的两个磁场分量，因此连接边界条件略有不同，需再作修正.

2. 磁场分量的连接边界条件

在计算连接边界面外距离半个空间步长的网格点处的磁场分量时，要用到总场区的电场分量，因此也要作特殊处理. 采用与前面相同的简化方法，利用方程(7.1.36)，各个边界面上的磁场分量可表示为如下(a～f)的差分格式：

a. 前边界面外.

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)=H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\mathrm{inc}x}^{n}(i,j_0,k),\tag{7.4.40}$$

其适用范围为 $j=j_0-1/2$; $i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$; $k=k_0,k_0+1,\cdots,k_1$.

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)=H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2},k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\mathrm{inc}z}^{n}(i,j_0,k),\tag{7.4.41}$$

上式适用范围为 $j=j_0-1/2$; $i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$; $k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

b. 后边界面外.

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right)=H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\mathrm{inc}x}^{n}(i,j_1,k),\tag{7.4.42}$$

其适用范围为 $j=j_1+1/2$; $i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$; $k=k_0,k_0+1,\cdots,k_1$.

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right)=H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_1+\frac{1}{2},k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\mathrm{inc}z}^{n}(i,j_1,k),\tag{7.4.43}$$

上式适用范围为 $j=j_1+1/2$; $i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$; $k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

c. 底边界面外.

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right)=H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\mathrm{inc}x}^{n}(i,j,k_0),\tag{7.4.44}$$

其适用范围为 $k=k_0-1/2$；$i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$；$j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$.

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right)=H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_0-\frac{1}{2}\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\text{incy}}^{n}(i,j,k_0),\tag{7.4.45}$$

上式适用范围为 $k=k_0-1/2$；$i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$；$j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$.

d. 顶边界面外

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right)=H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\text{incx}}^{n}(i,j,k_1),\tag{7.4.46}$$

其适用范围为 $k=k_1+1/2$；$i=i_0+1/2,i_0+3/2,\cdots,i_1-1/2$；$j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$.

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j,k_1+\frac{1}{2}\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\text{incy}}^{n}(i,j,k_1),\tag{7.4.47}$$

上式适用范围为 $k=k_1+1/2$；$i=i_0,i_0+1,\cdots,i_1$；$j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$.

e. 左边界面外.

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right)=H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\text{incy}}^{n}(i_0,j,k),\tag{7.4.48}$$

上式适用范围为 $i=i_0-1/2$；$j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$；$k=k_0,k_0+1,\cdots k_1$.

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right)=H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_0-\frac{1}{2},j,k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\text{incz}}^{n}(i_0,j,k),\tag{7.4.49}$$

上式适用范围为 $i=i_0-1/2$；$j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$；$k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

f. 右边界面.

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right)=H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}-CD\widetilde{E}_{\text{incy}}^{n}(i_1,j,k),\tag{7.4.50}$$

上式适用范围为 $i=i_1+1/2$；$j=j_0+1/2,j_0+3/2,\cdots,j_1-1/2$；$k=k_0,k_0+1,\cdots,k_1$.

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right)=H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_1+\frac{1}{2},j,k\right)\bigg|_{方程(7.1.36)}+CD\widetilde{E}_{\text{incz}}^{n}(i_1,j,k).\tag{7.4.51}$$

上式适用范围为 $i=i_1+1/2$；$j=j_0,j_0+1,\cdots,j_1$；$k=k_0+1/2,k_0+3/2,\cdots,k_1-1/2$.

方程(7.4.40)～(7.4.51)称为磁场分量的连接边界条件，其中标有“$\cdots|_{方程(7.1.36)}$”的场量均可由与方程(7.1.36)类似的其他分量的差分方程导出.

3. 入射平面波的设置和计算

在球坐标系的三维网格空间中，当标志入射平面波传播方向的角度 θ 与 φ 取其所有值时，平面波的波前可能首先到达的连接边界上的点共有 8 个，即连接边界面所构成的立方体的 8 个角点，如图 7-11 所示. 与二维情况类似，为了计算入射平面波，仍需知道参与计算的各网格点相对于原点的滞后距离 d

$$d = \boldsymbol{e}_{k\text{inc}} \cdot \boldsymbol{r}_c, \tag{7.4.52}$$

其中
$$\boldsymbol{e}_{k\text{inc}} = \sin\theta\cos\varphi\hat{r} + \sin\theta\sin\varphi\hat{\varphi} + \cos\theta\hat{\theta}, \tag{7.4.53}$$

$\boldsymbol{r}_c$ 仍表示从所选择的原点到点(i_c, j_c, k_c)的矢径.

对不同方向的入射波，应选取不同的坐标原点. 当 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$时，原点的选择取决于 φ 的取值范围(见表 7-1)：

表 7-1

φ 的取值范围	参考原点的选取	$\boldsymbol{r}_c$ 的表述
$0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$	O_1	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_0)\hat{\boldsymbol{z}}$
$90°<\varphi\leqslant 180°$	O_2	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_0)\hat{\boldsymbol{z}}$
$180°<\varphi\leqslant 270°$	O_3	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_0)\hat{\boldsymbol{z}}$
$270°<\varphi<360°$	O_4	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_0)\hat{\boldsymbol{z}}$

当 $90°\leqslant\theta\leqslant 180°$时，原点的选择也由 φ 的取值来定(见表 7-2)：

表 7-2

φ 的取值范围	参考原点的选取	$\boldsymbol{r}_c$ 的表述
$0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$	O_1'	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_1)\hat{\boldsymbol{z}}$
$90°<\varphi\leqslant 180°$	O_2'	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_0)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_1)\hat{\boldsymbol{z}}$
$180°<\varphi\leqslant 270°$	O_3'	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_1)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_1)\hat{\boldsymbol{z}}$
$270°<\varphi<360°$	O_4'	$\boldsymbol{r}_c = (i_c - i_0)\hat{\boldsymbol{x}} + (j_c - j_1)\hat{\boldsymbol{y}} + (k_c - k_1)\hat{\boldsymbol{z}}$

因为入射平面波仍可作为一维问题处理，故方程(7.4.18)和(7.4.19)仍然适用，其中 CD 中的 Δs 和 Δt 应与三维网格空间差分方程中的一致. 由于 d 不总是 Δs 的整数倍，所以有时也需要作插值近似.

为用于连接边界条件，电磁场各分量可按下式求得

$$H_{\text{inc}x}(d) = H_{\text{inc}}(d)(\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi), \tag{7.4.54}$$

$$H_{\text{inc}y}(d) = H_{\text{inc}}(d)(-\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\cos\varphi), \tag{7.4.55}$$

$$H_{\text{inc}z}(d) = H_{\text{inc}}(d)(-\cos\psi\sin\theta), \tag{7.4.56}$$

$$E_{\mathrm{inc}x}(d) = E_{\mathrm{inc}}(d)(\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi), \tag{7.4.57}$$

$$E_{\mathrm{inc}y}(d) = E_{\mathrm{inc}}(d)(-\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi), \tag{7.4.58}$$

$$E_{\mathrm{inc}z}(d) = E_{\mathrm{inc}}(d)(\sin\psi\sin\theta). \tag{7.4.59}$$

为了研究散射体对电磁脉冲的响应,可将激发平面电磁波的简谐振荡波源换成波形符合所模拟的入射脉冲的时变信号.这时,将在总场区内获得一个沿特定方向传播的脉冲平面波,并与总场区内的散射体发生相互作用.只要存储网格空间中电磁场的瞬时值,即可获得散射体对脉冲响应的全部信息.由于所研究的单个脉冲的作用是一个瞬态问题,所以差分格式的时间步数主要决定于入射脉冲的波形,尤其是脉冲后沿持续的时间.

为了研究散射体的宽频带特性,入射脉冲应有较宽的频谱,并要求频谱变化比较平缓而截止特性比较陡峭.高斯脉冲是一种最常用的入射脉冲,随时间变化的规律为

$$f(t) = \mathrm{e}^{-(t-t_0)^2/T^2}, \tag{7.4.60}$$

其中 t_0 和 T 为常数.上式的傅里叶变换具有如下形式

$$F(\omega) = \sqrt{\pi}T\mathrm{e}^{-T^2\omega^2/4}. \tag{7.4.61}$$

可见,高斯脉冲的频谱仍然是高斯型的.另一种可选择的脉冲形式为

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \cos 2\pi F t, & 0 < t \leqslant 1/F, \\ 0, & t > 1/F, \end{cases} \tag{7.4.62}$$

其中 F 为常数.

如果所研究的入射脉冲没有统一的解析形式,可采用分段解析表达式,即在不同的时间步范围中对应不同的解析表达式.对更复杂的波形,则可采用按时间步读入数据文件的方式.总之,入射脉冲是随时间变化起作用的,其灵活的表达形式可使对脉冲的模拟达到很高的精度.

§7.5 Engquist-Majda 吸收边界条件

如前所述,当用时域有限差分法计算散射或辐射这类开放电磁场问题时,必须人为地把计算空间截断,对于这种截断边界必须进行特殊处理,即加上适当的边界条件.

在截断边界处加上人为的边界条件是一种特殊的计算方法,它不仅要保证边界场必要的计算精度,还要有效地消除由非物理因素引起的入射波在边界上的反射,使得用有限的网格空间能模拟电磁波在无限空间中的传播.我们将作用在边界场上且符合上述要求的算法称为吸收边界条件或辐射边界条件(radiation boundary condition,简称 RBC).

自 20 世纪 70 年代起，科学家们对吸收边界条件进行了一系列研究. 80 年代之前出现的吸收边界条件主要有两类：一类利用模零化（湮没）微分算子，可看做是索末菲辐射条件的发展；另一类通过波动方程的因子分解获得单向波方程而建立的吸收边界条件. 90 年代中期，Berenger 提出完全匹配层，开辟了吸收边界研究的新方向，并获得巨大的成功. 本章将对这些吸收边界条件的基本原理及其在微分方程数值解中的应用进行讨论.

7.5.1　单向波与吸收边界条件

不难验证，方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]\phi(x,t)=0 \tag{7.5.1}$$

的解可表示为

$$\phi(x,t)=\phi(x+vt). \tag{7.5.2}$$

式(7.5.2)表示速度为 v、只沿 x 轴负方向传播的波，故称为单向波. 因此，方程(7.5.1)称为单向波方程. 可以证明，如果一个垂直投射到平面边界上的平面波满足方程(7.5.1)，在边界上就不会产生反射.

假设左截断边界在平面 $x=0$ 处，则 $\phi(x,t)$ 满足方程(7.5.1)相当于要求

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)\bigg|_{x=0}=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)\bigg|_{x=0}. \tag{7.5.3}$$

设沿 x 轴的空间步长为 Δx，空间步数为 i（i 为整数），时间步长为 Δt，时间步数为 n（n 为非负整数）. 如果采用向前差分近似，令平面 $x=0$ 上 $i=0$，则上式的差分形式为

$$\phi^n(1)-\phi^n(0)=\frac{\Delta x}{v\Delta t}[\phi^{n+1}(0)-\phi^n(0)],$$

并可改写为

$$\phi^{n+1}(0)=\phi^n(0)\left(1-\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)+\frac{v\Delta t}{\Delta x}\phi^n(1). \tag{7.5.4}$$

由此可见，边界上任何时间步的 ϕ 值都可以计算. 若 $\Delta x=v\Delta t$，则

$$\phi^{n+1}(0)=\phi^n(1). \tag{7.5.5}$$

这说明，在满足数值稳定性条件的情况下，满足方程(7.5.1)的平面波具有如下特性：$i=0$ 处第 $n+1$ 时间步的波正好是 $i=1$ 处第 n 时间步的波. 也就是说，该波只是经过一个时间步向左（靠近边界）移动一个空间步长，不发生任何反射，也不需要边界外的任何信息. 所以，对沿 x 轴负方向投射到截断边界的平面波，只要令其满足方程(7.5.1)，就不会在边界上发生反射，好像被边界完全吸收一样. 所以，方程(7.5.1)称为吸收边界条件.

设 $\phi(x,t)$ 为一维问题中的任一场分量，则无源区域的波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0 \tag{7.5.6}$$

可以表示成

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi=0. \tag{7.5.7}$$

这相当于以下两个单向波方程，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\phi=0. \tag{7.5.8}$$

已经证明，上式中的第一式为左边界面 $x=0$ 上的精确的解析吸收边界条件. 同样可以证明，第二式为右边界面上精确的解析吸收边界条件. 如果令算子

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{7.5.9}$$

$$L_1^+=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t},\quad L_1^-=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{7.5.10}$$

则有

$$L_1\phi=L_1^+L_1^-\phi=0. \tag{7.5.11}$$

这说明 L_1^+ 和 L_1^- 可以通过对 L_1 进行因子分解得到，而 L_1^- 和 L_1^+ 正是方程(7.5.8)的两个算子(这里的下角标 1 表示一维算子). 这一情况具有普遍意义，可以推广到二维和三维空间中.

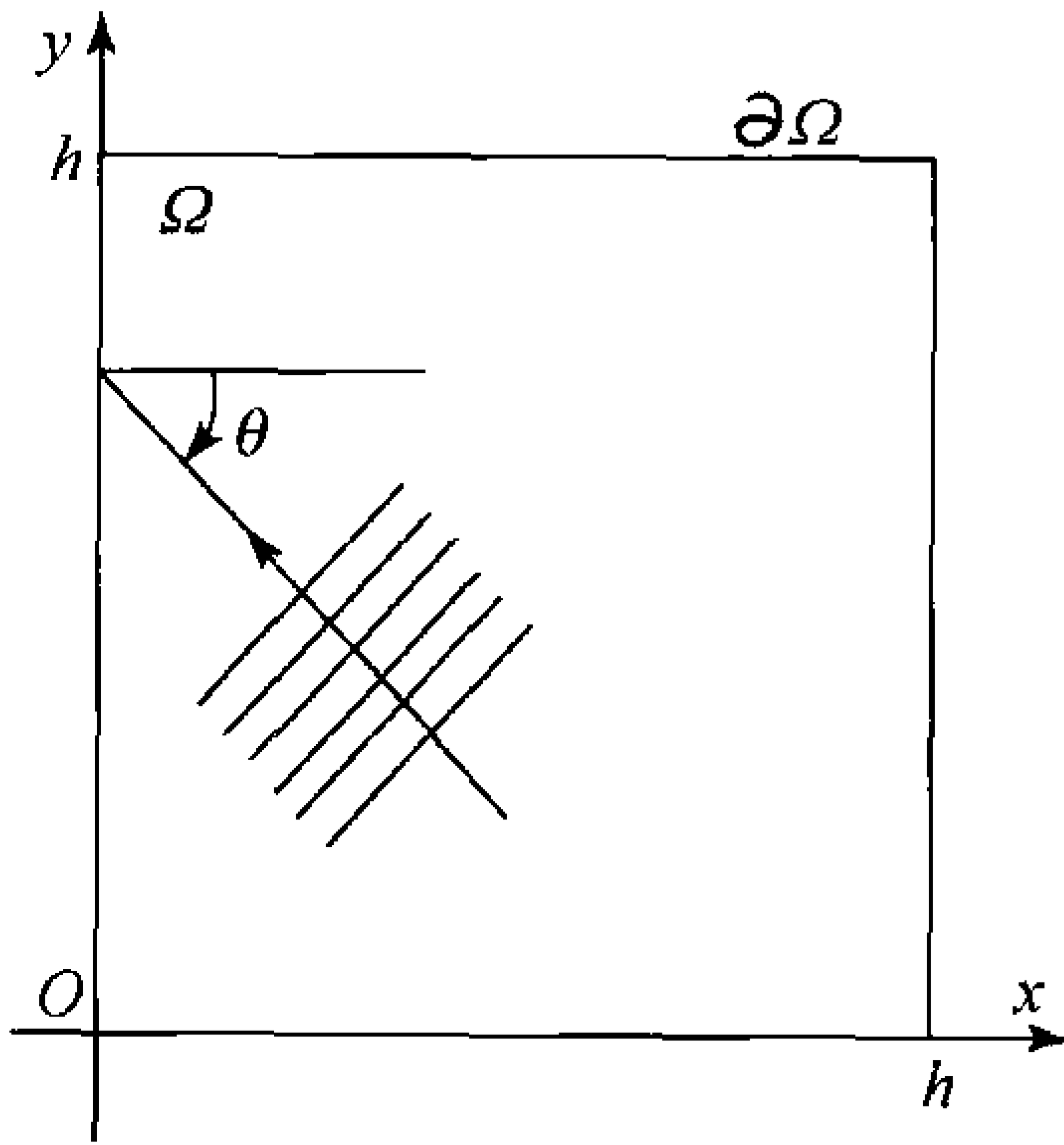


图 7-13 二维矩形空间中散射到边界的平面波

在二维和三维问题中，波可以任何方式入射到截断边界上. 由于任意平面波可表示为平面波谱的叠加，故可用以任意角度投射到边界的平面波代表实际问题中可能遇到的情况. 二维矩形空间中投射到边界的平面波如图 7-13 所示，其中 Ω 表示二维空间的内部. 若用时域有限差分法模拟沿任何方向波的传播，到达边界 $\partial\Omega$ 的均为外行数字波，要求边界对于外行数字波如同网格空间的无限扩展. 为此，必须使截断边界处的场量满足单向波方程(不局限于垂直于边界的特殊方向). 二维问题所需要的吸收边界条件不仅要求在 $\theta=0°$时不存在截断边界上的反射，而且应在尽量大的 θ 的取值范围内也满足这一要求.

设 $\phi(x,y,t)$ 为二维问题中的任一场分量，满足波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi=0. \tag{7.5.12}$$

定义算子

$$L_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{7.5.13}$$

并对其进行因子分解，则有

$$L_2\phi = L_2^+ L_2^- \phi = 0, \tag{7.5.14}$$

其中

$$L_2^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-S^2}, \quad S = v\frac{\partial}{\partial y}\Big/\frac{\partial}{\partial t}. \tag{7.5.15}$$

Engquist 和 Majda 证明[39]，将 L_2^- 应用于边界面 $x=0$ 上的平面波 ϕ 时，ϕ 可以是以任意角度从 Ω 内部入射到该边界面并被吸收的平面波. 换句话说，

$$L_2^- \phi\,|_{x=0} = 0 \tag{7.5.16}$$

就是边界面 $x=0$ 上的精确的解析吸收边界条件. 类似地，

$$L_2^+ \phi\,|_{x=h} = 0 \tag{7.5.17}$$

为边界面 $x=h$ 上精确的解析吸收边界条件，即满足方程(7.5.17)的以任意角度从 Ω 内部投射到该边界面的平面波 ϕ 将被精确地全部吸收.

在图 7-13 中的边界面 $y=0$ 和 $y=h$ 上，显然可以得到与以上两式完全类似的吸收边界条件. 由于坐标 x 和 y 处于完全相同的地位，只需交换式(7.5.15)中的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$ 就可获得这两个边界面上的吸收边界条件.

设 $\phi(x,y,z,t)$ 为三维问题中的任一场分量，满足三维波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = L_3\phi = 0. \tag{7.5.18}$$

定义算子

$$L_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{7.5.19}$$

并对其进行因子分解，则有

$$L_3\phi = L_3^+ L_3^- \phi = 0,$$

其中

$$L_3^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1-D^2}, \tag{7.5.20}$$

$$D = v\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\Big/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\Big/\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

垂直于 x 轴的两个边界面 $x=0$ 和 $x=h$ 上的精确的解析吸收边界条件分别为

$$L_3^- \phi\,|_{x=0} = 0, \quad L_3^+ \phi\,|_{x=h} = 0. \tag{7.5.21}$$

由于坐标 x，y 和 z 处于完全对等的地位，很容易得到在分别与 y 轴和 z 轴垂直的另外 4 个边界面上与上式类似的精确的解析吸收边界条件.

7.5.2　单向波吸收边界条件的近似表示

式(7.5.15)和(7.5.20)中的算子都包含一个根式. 由于这类算子对空间变量和时间变量都是非局部的（称为伪微分算子），作为吸收边界条件，不适合直接进行数值计算. 在时域有限差分法中，能够实际执行的吸收边界条件是通过对精

确的解析吸收边界条件中的根式取近似而得到的，故称为近似吸收边界条件. 执行这种吸收边界条件会导致在截断边界上出现某种反射，应取适当的近似使这种反射在尽量宽的入射角范围内减到最小.

Mur(1981)给出了适于在时域有限差分法中应用的吸收边界条件的二阶近似形式. 具体做法是，将式(7.5.15)中的根式进行泰勒展开，然后取前两项，即令

$$\sqrt{1-S^2}\approx 1-\frac{S^2}{2},\tag{7.5.22}$$

作用于式(7.5.15)中的 L_2^-，便得到

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Big/\frac{\partial}{\partial t}\right]\phi\bigg|_{x=0}=0.\tag{7.5.23}$$

再将$\frac{\partial}{\partial t}$作用于上式，就可得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{v}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi\bigg|_{x=0}=0.\tag{7.5.24}$$

这就是 Mur 所建议的适用于二维问题的二阶近似吸收边界条件，在时域有限差分法中有着广泛的应用.

Trefethen 和 Halpern(1985)提出了一种一般性的近似方法，将$\sqrt{1-S^2}$在区间[−1,1]中用一个有理函数

$$R(S)=\frac{p_m(S)}{q_n(S)}\tag{7.5.25}$$

表示，其中 $p_m(S)$和 $q_n(S)$分别为 m 阶和 n 阶多项式，并用(m,n)表示 $R(S)$的类型. 例如，$R(S)$的(2,0)型近似使$\sqrt{1-S^2}$有如下的近似表示

$$\sqrt{1-S^2}\approx p_0+p_2S^2.\tag{7.5.26}$$

由此可得边界面 $x=0$ 上的二阶近似吸收边界条件

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}-\frac{p_0}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-vp_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi\bigg|_{x=0}=0,\tag{7.5.27}$$

其中系数 p_0 和 p_2 通常由插值法决定. 所使用的标准方法包括切比雪夫多项式、最小二乘法和帕德(Padé)近似等，目的是导出一种近似吸收边界条件，使得在尽量宽的入射角范围内在截断边界上有足够小的反射系数. 在其他截断边界上，也可导出与上式类似的近似吸收边界条件.

为了提高吸收边界条件的性能，可以取更高阶的近似. 如果取 $R(S)$的(2,2)型近似，则$\sqrt{1-S^2}$近似表示为

$$\sqrt{1-S^2}\approx\frac{p_0+p_2S^2}{q_0+q_2S^2}.\tag{7.5.28}$$

由此可获得边界面 $x=0$ 上的三阶近似吸收边界条件

$$\left(q_0\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}+v^2q_2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}-\frac{p_0}{v}\frac{\partial^3}{\partial t^3}-p_2v\frac{\partial^3}{\partial t\partial y^2}\right)\phi\bigg|_{x=0}=0,\tag{7.5.29}$$

其中 p_i 和 $q_i(i=0,2)$ 的不同选择给出不同的近似吸收边界条件. 例如，若在式(7.5.28)中取 $p_0=1, p_2=-1/2$，则称为(2,0)型的帕德近似，这样就得到方程(7.5.24). 在方程(7.5.29)中取 $q_0=p_0=1, q_2=-1/4, p_2=-3/4$，某些性能可优于 Mur 吸收边界条件.

理想的吸收边界条件保证外行数字波在截断边界处不产生反射(如前一小节导出的精确的解析吸收边界条件)，但不能直接在数值计算中执行. 近似吸收边界条件由于破坏了算子原有的严格关系，将在边界处引起某种反射. 正确评价这种反射的性质，对在实践中选择近似吸收边界条件的类型，并估价由其引起的计算误差很有意义. 近似吸收边界条件所引起的反射可用反射系数表示. 一般地讲，反射系数是平面波对边界面的入射角度 θ 的函数.

在图 7-13 中，对边界面 $x=0$ 处入射的平面波可表示为

$$\phi_{\text{inc}}=e^{i(\omega t+kx\cos\theta-ky\sin\theta)},\tag{7.5.30}$$

其中 k 为波数. 如果在该边界面上存在反射，则此处的总场可表示为

$$\phi_{\text{tot}}=e^{i(\omega t+kx\cos\theta-ky\sin\theta)}+Re^{i(\omega t-kx\cos\theta-ky\sin\theta)}.\tag{7.5.31}$$

如果 R 是某近似吸收边界条件所引起的反射系数，则上式所表示的 ϕ_{tot} 应该满足该吸收边界条件. 将上式代入式(7.5.27)和(7.5.29)，可分别求出二阶和三阶近似吸收边界条件所引起的反射系数

$$R=\frac{\cos\theta-p_0-p_2\sin^2\theta}{\cos\theta+p_0+p_2\sin^2\theta},\tag{7.5.32}$$

$$R=\frac{q_0\cos\theta+q_2\cos\theta\sin^2\theta-p_0-p_2\sin^2\theta}{q_0\cos\theta+q_2\cos\theta\sin^2\theta+p_0+p_2\sin^2\theta}.\tag{7.5.33}$$

不难看出，对于(2,0)型的帕德近似，只当 $\theta=0°$ 时才有 $R=0$. 也就是说，只有垂直入射到边界面 $x=0$ 的平面波才能被这种类型的近似吸收边界条件全部吸收，而以其他角度入射的平面波都会引起反射，且反射系数是 θ 的函数.

在实际应用中，由复杂目标产生的反射波往往覆盖很宽的入射角范围，故获得所需入射角范围内具有良好吸收特性的近似吸收边界条件是很重要的.

用单向波方程建立的近似吸收边界条件与近似精度的类型 p_i 和 $q_i(i=0,1,2,\cdots)$ 的取值直接相关. 不同的近似方法给出不同的近似吸收边界条件. Trefethen 和 Holpern 发展了以下七种方法：帕德法；亚区间上的切比雪夫法(L_α^∞，α 为参数)；切比雪夫点插值法；最小二乘法(L^2)；切比雪夫-帕德(C-P)法；Newman 点插值法和切比雪夫法(L^∞).

表 7-1 和表 7-2 分别给出了用以上七种方法所获得的二阶和三阶近似吸收

边界条件的主要参数和性能.由此可以看出,无论二阶还是三阶近似,帕德法所获得的近似吸收边界条件只在垂直入射($\theta=0°$)时才有精确的吸收,而用其他方法所获得的二阶近似吸收边界条件有 2 个精确吸收的角度,三阶近似吸收边界条件有 3 个精确吸收的角度.故一般而言,三阶近似吸收边界条件具有更优良的性能.

表 7-1 二阶近似吸收边界条件

近似类型	p_0	p_2	精确吸收的入射角度/(°)
帕德法	1.000 00	−0.500 00	0.00
$L_\alpha^\infty(\alpha=20°)$	1.000 23	−0.515 55	7.6, 18.7
切比雪夫点插值法	1.035 97	−0.765 37	22.5, 67.5
L^2	1.030 84	−0.736 31	22.1, 64.4
切比雪夫-帕德法	1.061 03	−0.848 83	25.8, 73.9
Newman 点插值法	1.000 00	−1.000 00	0.0, 90.0
L^∞	1.125 00	−1.000 00	31.4, 81.6

注:对所有类型,$q_0=1.000\ 00$.

表 7-2 三阶近似吸收边界条件

近似类型	p_0	p_2	q_2	精确吸收的入射角度/(°)
帕德法	1.000 00	−0.750 00	−0.250 00	0.00
$L_\alpha^\infty(\alpha=45°)$	0.999 73	−0.808 64	−0.316 57	11.7, 31.9, 43.5
切比雪夫点插值法	0.996 50	−0.912 96	−0.472 58	15.0, 45.0, 75.0
L^2	0.992 50	−0.922 33	−0.510 84	18.4, 51.3, 76.6
切比雪夫-帕德法	0.990 30	−0.943 14	−0.555 56	18.4, 53.1, 81.2
Newman 点插值法	1.000 00	−1.000 00	−0.669 76	0.0, 60.5, 90.0
L^∞	0.956 51	−0.943 54	−0.703 85	26.9, 66.6, 87.0

注:对所有类型,$q_0=1.000\ 00$.

7.5.3 吸收边界条件的时域有限差分格式

1. 一维空间中吸收边界条件的差分格式

在一些电磁场问题中,对某些网格空间的边界面而言只存在垂直入射的外行波,这时可以考虑应用精确的一维网格空间的吸收边界条件.设 Δs 为均匀空间步长,i 为沿 x 轴的网格数(i 为非负整数),时间步长为 Δt.设在左边界面 $x=0$ 上 $i=0$,网格空间内部的网格点依次为 $i=1,2,\cdots$.为了应用方程(7.5.1),首先需要将其变为差分形式.7.5.1 小节已得到了用向前差分近似导出的吸收边界条件的差分格式,但为了和时域有限差分法所采用的网格空间内部的计算

格式相一致，还需导出按中心差分近似的差分格式.

在左边界处，场量 $\phi(0)$ 的中心差分近似为

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi^n(0)=\frac{\phi^n\left(\frac{1}{2}\right)-\phi^n\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta s}+O(\Delta^2 s). \tag{7.5.34}$$

这样的计算要用到网格空间外部和内部非网格点上的信息.为克服这一缺点，改为从 $\phi^n(1/2)$ 出发，且用如下的近似

$$\phi^n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\phi^n(1)+\phi^n(0)}{2}. \tag{7.5.35}$$

为了避免出现半个时间步长，同时还采用如下的近似

$$\phi^{n+\frac{1}{2}}(i)=\frac{\phi^{n+1}(i)+\phi^n(i)}{2},\quad i=0,1,\cdots, \tag{7.5.36}$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}}(1)-\phi^{n+\frac{1}{2}}(0)}{\Delta s}\\&=\frac{\phi^{n+1}(1)+\phi^n(1)-\phi^{n+1}(0)-\phi^n(0)}{2\Delta s},\end{aligned} \tag{7.5.37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{\phi^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)-\phi^n\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta t}\\&=\frac{\phi^{n+1}(1)+\phi^{n+1}(0)-\phi^n(1)-\phi^n(0)}{2\Delta t}.\end{aligned} \tag{7.5.38}$$

将以上两式代入方程(7.5.1)，便可得到

$$\phi^{n+1}(0)=\phi^n(1)+\frac{v\Delta t-\Delta s}{v\Delta t+\Delta s}[\phi^{n+1}(1)-\phi^n(0)]. \tag{7.5.39}$$

当满足数值稳定性条件 $\Delta s=2v\Delta t$ 时，上式有非常简单的形式

$$\phi^{n+1}(0)=\phi^n(1)-\frac{1}{3}[\phi^{n+1}(1)-\phi^n(0)]. \tag{7.5.40}$$

这就是左边界面上吸收边界条件的差分格式.这说明，可通过边界面上网格点及其相邻的网格空间内部的网格点上相邻两个时间步的场值，计算出任意时间步的边界场值.

右边界面上吸收边界条件的差分格式可以用完全类似的方法导出.

2. 二维空间中二阶近似吸收边界条件的差分格式

假设 $x=0$ 为二维矩形网格空间的左边界，则其上的二阶近似吸收边界条件由方程(7.5.27)表示.当采用中心差分近似时，若采用与式(7.5.35)和(7.5.36)类似的近似表示，可得到$(1/2,j)$处场量的差分表示(j 表示沿 y 轴的网格编号，j 为非负整数)，即

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\phi^n\left(\frac{1}{2},j\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j\right)-\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t}\right]$$

$$=\left[\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}}(1,j)-\phi^{n+\frac{1}{2}}(0,j)-\phi^{n-\frac{1}{2}}(1,j)+\phi^{n-\frac{1}{2}}(0,j)}{\Delta x\Delta t}\right]$$

$$=\frac{1}{2\Delta x\Delta t}[\phi^{n+1}(1,j)-\phi^{n-1}(1,j)-\phi^{n+1}(0,j)+\phi^{n-1}(0,j)], \quad (7.5.41)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^n\left(\frac{1}{2},j\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j\right)-\phi^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t}\right]$$

$$=\frac{1}{(\Delta t)^2}\left[\phi^{n+1}\left(\frac{1}{2},j\right)-2\phi^n\left(\frac{1}{2},j\right)+\phi^{n-1}\left(\frac{1}{2},j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2(\Delta t)^2}[\phi^{n+1}(1,j)+\phi^{n+1}(0,j)-2\phi^n(1,j)-2\phi^n(0,j)$$

$$+\phi^{n-1}(1,j)+\phi^{n-1}(0,j)], \quad (7.5.42)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi^n\left(\frac{1}{2},j\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\phi^n\left(\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-\phi^n\left(\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right]$$

$$=\frac{1}{(\Delta y)^2}\left[\phi^n\left(\frac{1}{2},j+1\right)-2\phi^n\left(\frac{1}{2},j\right)+\phi^n\left(\frac{1}{2},j-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2(\Delta y)^2}[\phi^n(1,j+1)+\phi^n(0,j+1)-2\phi^n(1,j)-2\phi^n(0,j)$$

$$+\phi^n(1,j-1)+\phi^n(0,j-1)], \quad (7.5.43)$$

其中 Δx 和 Δy 分别为沿 x 和 y 轴的空间步长. 将以上三式代入方程(7.5.27),并假设 $\Delta x=\Delta y=\Delta s$,当满足 $\Delta s=2v\Delta t$ 时,则可得到

$$\phi^{n+1}(0,j)=\frac{1}{2p_0+1}A_1-\frac{2p_0}{2p_0+1}A_2-\frac{p_2}{4p_0+2}A_3, \quad (7.5.44)$$

其中

$$A_1=\phi^{n+1}(1,j)-\phi^{n-1}(1,j)+\phi^{n-1}(0,j), \quad (7.5.45)$$

$$A_2=\phi^{n+1}(1,j)-2\phi^n(1,j)-2\phi^n(0,j)$$

$$+\phi^{n-1}(1,j)+\phi^{n-1}(0,j), \quad (7.5.46)$$

$$A_3=\phi^n(1,j+1)-2\phi^n(1,j)+\phi^n(1,j-1)+\phi^n(0,j+1)$$

$$-2\phi^n(0,j)+\phi^n(0,j-1). \quad (7.5.47)$$

适用于其他边界面的二阶近似吸收边界条件的差分格式,可用完全类似的方法导出.

3. 二维空间中三阶近似吸收边界条件的差分格式

直接将中心差分近似应用于边界面 $x=0$ 处的三阶近似吸收边界条件,所导出的差分格式是一种隐式格式. 为了获得其显式表示,Blaschak 和 Kriegs-

mann(1988)采用了如下的导出方法.

先用 $v(\Delta t)^2$ 乘以方程(7.5.29),并引用辅助函数

$$\psi = \left[\frac{p_0}{v}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + vp_2(\Delta t)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - q_0(\Delta t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\right]\phi, \quad (7.5.48)$$

则方程(7.5.29)可重写为

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v^3(\Delta t)^2 q_2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}. \quad (7.5.49)$$

对上式采用中心差分近似,可得到

$$\begin{cases} \psi^1(0,j) = \psi^0(0,j) = 0, \\ \psi^{n+1}(0,j) = \dfrac{q_2}{4}\Gamma + \psi^{n-1}(0,j), \quad n = 1,2,\cdots, \end{cases} \quad (7.5.50)$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma = {} & \phi^n(1,j+1) - 2\phi^n(1,j) + \phi^n(1,j-1) - \phi^n(0,j+1) \\ & + 2\phi^n(0,j) - \phi^n(0,j-1). \end{aligned} \quad (7.5.51)$$

再用中心差分近似对式(7.5.48)进行离散,代入式(7.5.50),并假设 $\Delta x = \Delta y = \Delta s$. 当满足 $\Delta s = 2v\Delta t$ 时,即可获得显式差分格式

$$\psi^{n+1}(0,j) = \frac{4}{2p_0 + q_0}\left[\psi^n(0,j) + \frac{q_0}{4}A_1 - \frac{p_0}{2}A_2 - \frac{p_2}{8}A_3\right], \quad (7.5.52)$$

其中 A_1,A_2 和 A_3 如式(7.5.45)~(7.5.47)所示.

4. 三维空间中 Mur 吸收边界条件的差分格式

再考虑三维空间中边界面 $x=0$ 处的吸收边界条件,则当取如式(7.5.22)所示的近似,即

$$\sqrt{1 - D^2} \approx 1 - D^2/2 \quad (7.5.53)$$

时,由方程(7.5.21)中的第一式可得到 Mur 给出的一种近似吸收边界条件

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\phi = 0. \quad (7.5.54)$$

设 Δx,Δy 和 Δz 分别为沿 x,y 和 z 轴的空间步长,j 和 k 分别为沿 y 轴和 z 轴的网格数(j、k 为非负整数). 当取 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s$ 时,可以得到

$$\begin{aligned} \phi^{n+1}(0,j,k) = {} & -\phi^{n-1}(1,j,k) + \frac{v\Delta t - \Delta s}{v\Delta t + \Delta s}[\phi^{n+1}(1,j,k) + \phi^{n-1}(0,j,k)] \\ & + \frac{2\Delta s}{v\Delta t + \Delta s}[\phi^n(0,j,k) + \phi^n(1,j,k)] + \frac{(v\Delta t)^2}{2\Delta s(v\Delta t + \Delta s)}[\phi^n(0,j+1,k) \\ & - 2\phi^n(0,j,k) + \phi^n(0,j-1,k) + \phi^n(1,j+1,k) - 2\phi^n(1,j,k) \\ & + \phi^n(1,j-1,k) + \phi^n(0,j,k+1) - 2\phi^n(0,j,k) + \phi^n(0,j,k-1) \\ & + \phi^n(1,j,k+1) - 2\phi^n(1,j,k) + \phi^n(1,j,k-1)]. \end{aligned} \quad (7.5.55)$$

当满足数值稳定性条件 $\Delta s = 2v\Delta t$ 时,上式中的系数可以简化. 这一差分格式已

在很多问题中得到广泛应用.

5. 二维空间中角点的近似吸收边界条件

由式(7.5.44)～(7.5.47)不难发现，用于二维网格空间的近似吸收边界条件在边界面 $x=0$ 处差分格式中含有点$(0,j-1)$和$(0,j+1)$$(j=0,1,2,\cdots,N_y$，其中 N_y 为沿 y 轴后边界处的网格编号). 也就是说，在计算 $\phi^{n+1}(0,0)$时需要知道 $\phi^n(0,-1)$，在计算 $\phi^{n+1}(0,N_y)$时需要知道 $\phi^n(0,N_y+1)$. 但是 $\phi^n(0,-1)$和 $\phi^n(0,N_y+1)$都是网格空间外的场值，不在计算机存储空间中. 在其他边界面上吸收边界条件的差分格式中也有类似的问题. 因此，在二维矩形网格空间中，4 个角点上的场值是不能用前面导出的差分格式计算的.

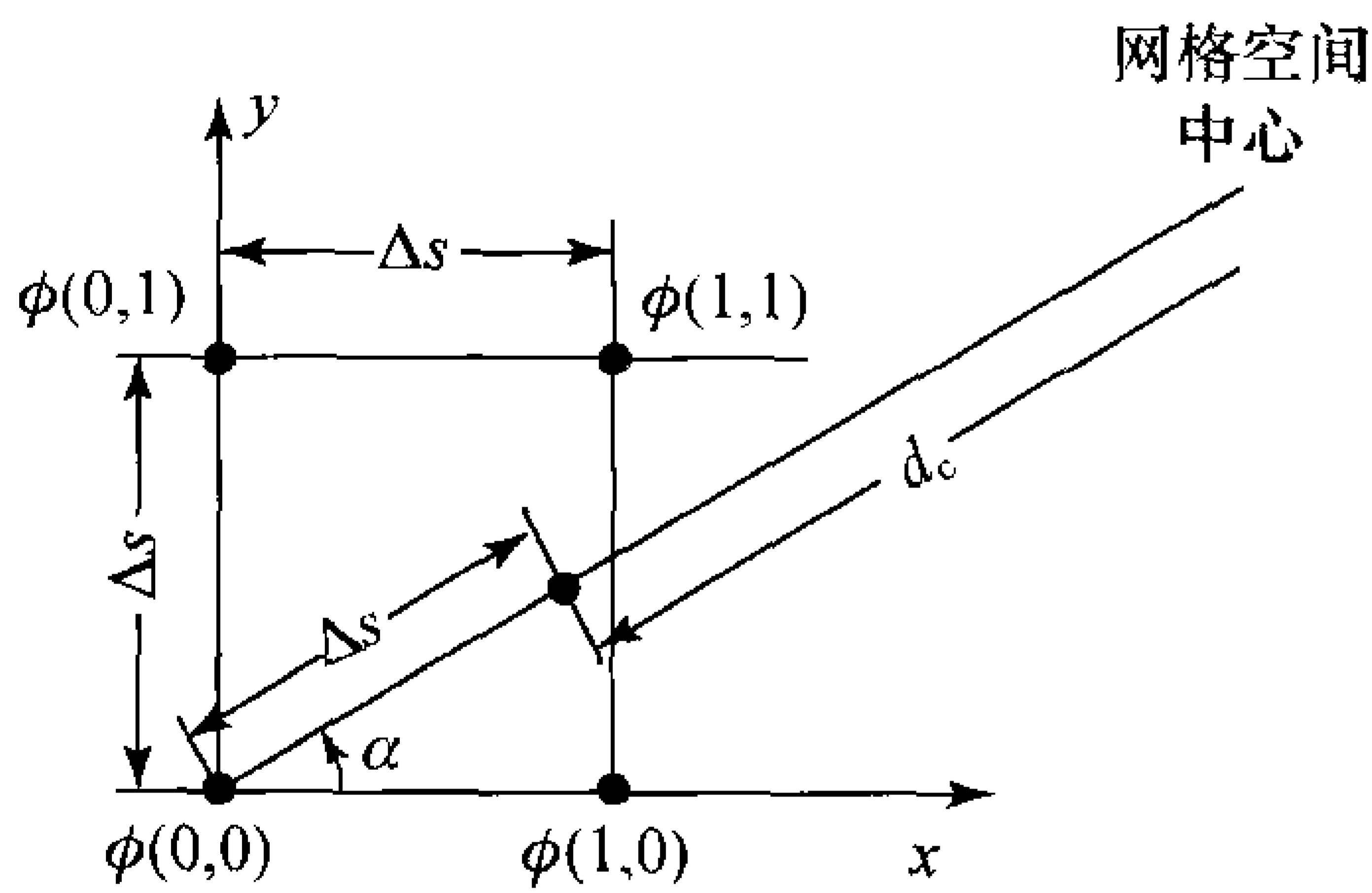


图 7-14 近似吸收边界条件对二维空间中角点的处理方法

针对这个问题，Taflove 和 Umashanker(1982)给出了一种行之有效的处理方法，且满足对吸收边界条件的以下各项要求：只需计算空间内部网格点上的场量；对外行数字波只引起少量的反射；是数值稳定的.

以角点(0,0)为例，如图 7-14 所示.

假设所有到达点(0,0)的外行波都沿从网格空间中心到该点的射线方向传播. 如果用 $\bar{\phi}$ 表示在径向射线上距(0,0)点 Δs 处的外行波场值，则该点上的场值可视为 $\bar{\phi}$ 沿射线传播 Δs 的结果. 若满足数值稳定性条件 $\Delta s=2v\Delta t$，则传播这段距离需要的时间为 $2\Delta t$. 因此，点(0,0)处的场值与 $\bar{\phi}$ 满足

$$\phi^{n+1}(0,0) = f_{\text{rad}}\bar{\phi}^{n-1}, \tag{7.5.56}$$

其中 f_{rad}为外行散射波沿径向的衰减因子，$\bar{\phi}^{n-1}$是对点(0,0)及其在网格空间内部的相邻点(0,1)，(1,0)和(1,1)处第 $n-1$ 时间步的场值进行线性插值的结果. 若用 d_c 表示从网格空间中心到 $\bar{\phi}$ 取值处的距离(以 Δs 为单位)，则

$$f_{\text{rad}} = \left(\frac{d_c}{d_c+1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5.57}$$

若用 α 表示径向射线与 x 轴之间的夹角，则有

$$\begin{aligned}\bar{\phi}^{n-1} &= (1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,0)+(1-\sin\alpha)\cos\alpha\,\phi^{n-1}(1,0)\\ &\quad+\sin\alpha(1-\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,1)+\sin\alpha\cos\alpha\,\phi^{n-1}(1,1).\end{aligned} \tag{7.5.58}$$

用类似的方法也可导出其他角点处的差分格式.

6. 三维空间中棱边的近似吸收边界条件

由于需要网格空间外的场值参与运算，三维空间近似吸收边界条件的差分格式在矩形网格空间的棱边上是不能执行的，可采用类似于二维空间中对角点

的处理方法. 例如,考虑棱边$(0,0,k)$($k=0,1,2,\cdots,N_z$,其中 N_z 为沿 z 轴顶边界面处的网格编号),用在网格空间中心到点$(0,0,k)$的径向射线上距该点 Δs 处的外行波场值 $\overline{\phi}^{n-1}$ 计算 $\phi^{n+1}(0,0,k)$,有

$$\phi^{n+1}(0,0,k) = f_{\text{rad}}\overline{\phi}^{n-1}, \tag{7.5.59}$$

其中 $\overline{\phi}^{n-1}$ 是对以点$(0,0,k)$为棱角的网格单元的 8 个角点上第 $n-1$ 时间步的场值进行线性插值的结果. 若用 α 和 β 分别表示径向射线与 x 轴和 z 轴的夹角,则

$$\begin{aligned}\overline{\phi}^{n-1} = &(1-\sin\beta)(1-\cos\beta\sin\alpha)(1-\cos\beta\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,0,k)\\&+(1-\sin\beta)(1-\cos\beta\sin\alpha)\cos\beta\cos\alpha\phi^{n-1}(1,0,k)\\&+(1-\sin\beta)\cos\beta\sin\alpha(1-\cos\beta\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,1,k)\\&+(1-\sin\beta)\cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha\phi^{n-1}(1,1,k)\\&+\sin\beta(1-\cos\beta\sin\alpha)(1-\cos\beta\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,0,k+1)\\&+\sin\beta(1-\cos\beta\sin\alpha)\cos\beta\cos\alpha\phi^{n-1}(1,0,k+1)\\&+\sin\beta\cos\beta\sin\alpha(1-\cos\beta\cos\alpha)\phi^{n-1}(0,1,k+1)\\&+\sin\beta\cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha\phi^{n-1}(1,1,k+1).\end{aligned} \tag{7.5.60}$$

用类似的方法也可导出其他棱边上的差分格式.

§7.6 Berenger 完全匹配层

1994 年,Berenger 提出了完全匹配层的概念. 与解析吸收边界条件完全不同,这种吸收边界条件利用非物理媒质构成计算区域的边界,并具有如下特性:平面电磁波可以无反射地射入其中,并在内部按指数规律衰减. 完全匹配层的吸收效率比解析吸收边界条件高出几个数量级,而且能很方便地用于时域和频域的不同算法.

7.6.1 平面波对半空间媒质分界面入射的无反射条件

首先讨论平面电磁波对半空间媒质分界面的入射问题. 如图 7-15 所示,Oyz 平面将三维空间分成两个区域:区域 1($x<0$)中的媒质是无耗的,用 ε_1 和 μ_1 描述,区域2($x>0$)中的媒质既有电损耗也有磁损耗,用 ε_2,μ_2,σ 和 σ_m 描述. 设一均匀简谐平面波从区域 1 入射到分界面上,入射角相对于 x 轴为 θ,入射波为 TE 波. 入射磁场 $\boldsymbol{H}^{\text{i}}$ 在频域可表示为

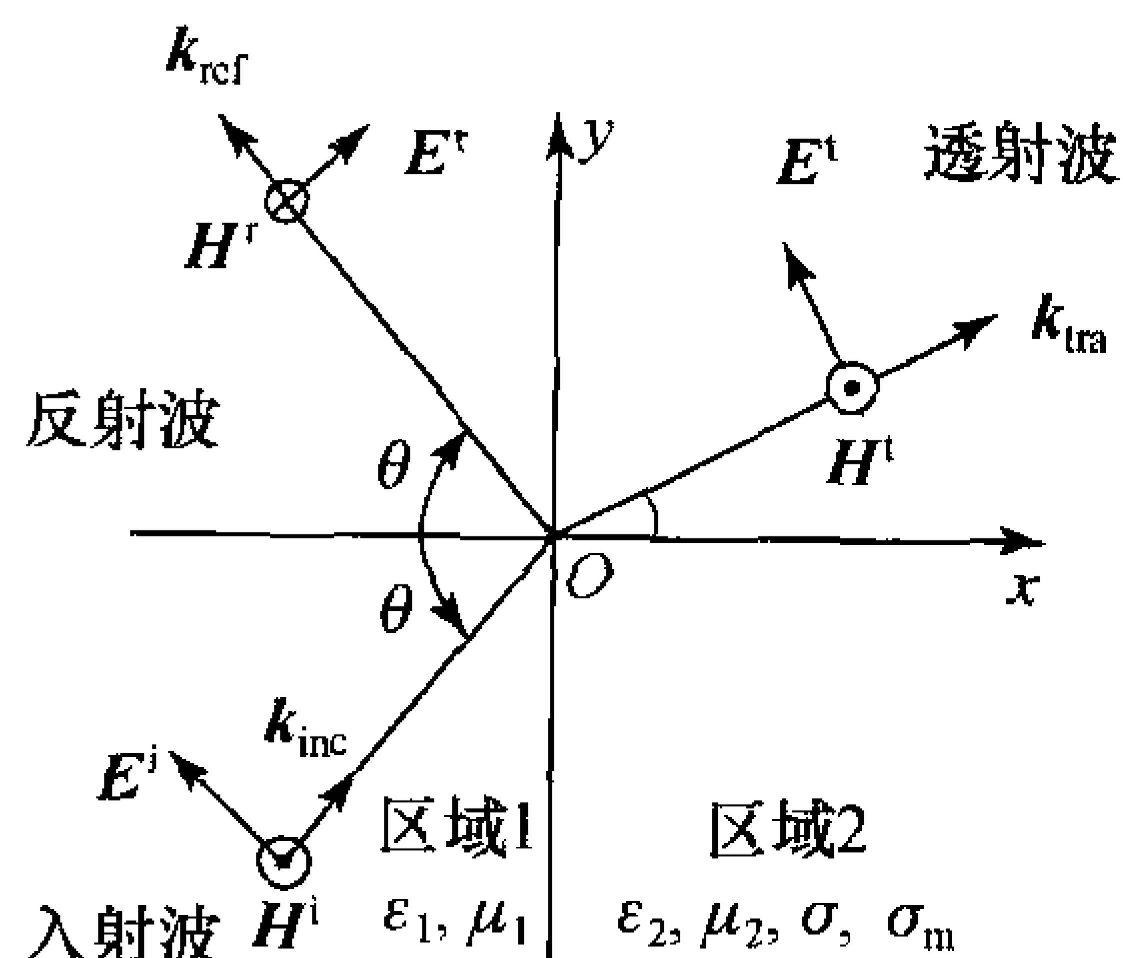


图 7-15 平面波对半空间媒质分界面的入射

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1x}x+\beta_{1y}y)}, \tag{7.6.1}$$

其中 H_0 为常数，β_{1x}和β_{1y}为区域 1 中的传播常数β_1 的分量. 若在分界面 $x=0$ 上存在反射，磁场的反射系数为 R，透射系数为 T，则在平面$x=0$两侧的总磁场可分别表示为

$$\boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 (1 + R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta_{1x}x}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1x}x+\beta_{1y}y)}, \tag{7.6.2}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{2x}x+\beta_{2y}y)}, \tag{7.6.3}$$

上式中的 β_{2x} 和 β_{2y} 为区域 2 中的传播常数 β_2 的分量. 利用麦克斯韦旋度方程 $\nabla \times \boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} + \sigma\boldsymbol{E}$ 可求出平面 $x=0$ 两侧的总电场

$$\boldsymbol{E}_1 = \left[-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\beta_{1y}}{\omega\varepsilon_1}(1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta_{1x}x}) + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\beta_{1x}}{\omega\varepsilon_1}(1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta_{1x}x})\right] H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1x}x+\beta_{1y}y)}, \tag{7.6.4}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \left[-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\beta_{2y}}{\omega\varepsilon_2\left(1-\dfrac{\sigma}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right)} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2\left(1-\dfrac{\sigma}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right)}\right] H_0 T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{2x}x+\beta_{2y}y)}. \tag{7.6.5}$$

由平面波传播的性质可知

$$\beta_{1x} = k_1\cos\theta, \quad \beta_{1y} = k_1\sin\theta, \tag{7.6.6}$$

$$\beta_{2x} = \sqrt{k_2^2\left(1-\frac{\sigma}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right)\left(1-\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{\mathrm{i}\omega\mu_2}\right) - (\beta_{2y})^2}, \tag{7.6.7}$$

其中 $k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}\,(i=1,2)$. 根据切向场分量在平面 $x=0$ 上的连续性，可得

$$\beta_{2y} = \beta_{1y} = k_1\sin\theta, \tag{7.6.8}$$

$$R = \frac{\dfrac{\beta_{1x}}{\omega\varepsilon_1} - \dfrac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2(1-\sigma/\mathrm{i}\omega\varepsilon_2)}}{\dfrac{\beta_{1x}}{\omega\varepsilon_1} + \dfrac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2(1-\sigma/\mathrm{i}\omega\varepsilon_2)}}, \quad T = 1 + R. \tag{7.6.9}$$

一般情况下，对于任意入射角 θ 有 $R \neq 0$. 但是，对于垂直入射($\theta = 0°$)的特殊情况，反射系数可表示为

$$R = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, \tag{7.6.10}$$

其中 η_1 和 η_2 分别为区域 1 和区域 2 的波阻抗

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2(1-\sigma_{\mathrm{m}}/\mathrm{i}\omega\mu_2)}{\varepsilon_2(1-\sigma/\mathrm{i}\omega\varepsilon_2)}}. \tag{7.6.11}$$

如果区域 1 和区域 2 中的媒质参数满足

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \mu_1 = \mu_2, \tag{7.6.12}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{\mu_1}, \tag{7.6.13}$$

则由式(7.6.11)得

$$\eta_1 = \eta_2, \tag{7.6.14}$$

从而有 $R=0$. 式(7.6.13)称为匹配条件. 还可由式(7.6.7)得

$$\beta_{2x} = \left(1-\frac{\sigma}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_1}\right)k_1 = k_1 + \mathrm{i}\sigma\eta_1. \tag{7.6.15}$$

于是,区域 2 中的透射波可表示为

$$\boldsymbol{E}_2 = \eta_1 H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x}\mathrm{e}^{-\sigma\eta_1 x}, \quad \boldsymbol{H}_2 = H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x}\mathrm{e}^{-\sigma\eta_1 x}. \tag{7.6.16}$$

由此可以看出,在满足式(7.6.12)和(7.6.13)的分界面上,垂直入射的均匀平面波可以无反射地透过,即两种媒质是完全匹配的. 此外,区域 2 中的透射波按指数衰减,但在有耗媒质中的传播仍是无色散的. 以上现象已被应用于时域有限差分法,但这种吸收边界只对垂直入射的平面波才有足够的吸收效果. 为此,需要使吸收边界远离波源,而这将大大扩展计算区域.

7.6.2 Berenger 完全匹配层

为了克服实际媒质的局限性,Berenger 采用非物理的媒质构成匹配层,以使其匹配特性与频率和入射角无关. 针对如图 7-15 所示的情况,他将 σ 和 σ_{m} 分别分裂为 σ_x,σ_y 和 $\sigma_{\mathrm{m}x}$,$\sigma_{\mathrm{m}y}$,并令

$$H_z = H_{zx} + H_{zy}. \tag{7.6.17}$$

这样,区域 2 中的 TE 波满足以下一组分量方程,即

$$\varepsilon_2 \frac{\partial E_{2x}}{\partial t} + \sigma_y E_{2x} = \frac{\partial(H_{2zx} + H_{2zy})}{\partial y}, \tag{7.6.18}$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial E_{2y}}{\partial t} + \sigma_x E_{2y} = -\frac{\partial(H_{2zx} + H_{2zy})}{\partial x}, \tag{7.6.19}$$

$$\mu_2 \frac{\partial H_{2zx}}{\partial t} + \sigma_{\mathrm{m}x} H_{2zx} = -\frac{\partial E_{2y}}{\partial x}, \tag{7.6.20}$$

$$\mu_2 \frac{\partial H_{2zy}}{\partial t} + \sigma_{\mathrm{m}y} H_{2zy} = \frac{\partial E_{2x}}{\partial y}. \tag{7.6.21}$$

分析表明,这是一种具有更广泛意义的方程组,具有以下特性:

(1) 如果 $\sigma_x=\sigma_y=0$,$\sigma_{\mathrm{m}x}=\sigma_{\mathrm{m}y}=0$,则以上四式退化为无耗媒质中 TE 波的方程组.

(2) 如果 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$,$\sigma_{\mathrm{m}x}=\sigma_{\mathrm{m}y}=\sigma_{\mathrm{m}}$,则以上四式退化为有耗媒质中 TE 波的方程组.

(3) 如果 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$,$\sigma_{\mathrm{m}x}=\sigma_{\mathrm{m}y}=\sigma_{\mathrm{m}}$,$\varepsilon_1=\varepsilon_2$,$\mu_1=\mu_2$,并满足式(7.6.13),则平面 $x=0$ 对区域 1 中的入射平面波是完全匹配的.

(4) 如果 $\sigma_y=\sigma_{\mathrm{m}y}=0$,则该媒质吸收沿 x 轴传播的具有分量 E_y 和 H_{zx} 的平面波,却不吸收沿 y 轴传播的具有分量 E_x 和 H_{zy} 的平面波. 与此对应的是 $\sigma_x=$

$\sigma_{mx}=0$ 的情况,效果正好相反.这一特点具有特殊意义.

对于简谐平面波,由方程(7.6.18)~(7.6.21)很容易得到相应的频域形式

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\left(1-\frac{\sigma_y}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right)E_{2x}=\frac{\partial}{\partial y}(H_{2zx}+H_{2zy}), \tag{7.6.22}$$

$$\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\left(1-\frac{\sigma_x}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right)E_{2y}=\frac{\partial}{\partial x}(H_{2zx}+H_{2zy}), \tag{7.6.23}$$

$$\mathrm{i}\omega\mu_2\left(1-\frac{\sigma_{mx}}{\mathrm{i}\omega\mu_2}\right)H_{2zx}=\frac{\partial E_{2y}}{\partial x}, \tag{7.6.24}$$

$$-\mathrm{i}\omega\mu_2\left(1-\frac{\sigma_{my}}{\mathrm{i}\omega\mu_2}\right)H_{2zy}=\frac{\partial E_{2x}}{\partial y}. \tag{7.6.25}$$

应该说明的是,为了方便,对频域和时域中所对应的场量使用相同的符号,但其差异是显而易见的.

引入以下符号

$$\omega_s=\left(1-\frac{\sigma_s}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_2}\right),\quad \omega_{ms}=\left(1-\frac{\sigma_{ms}}{\mathrm{i}\omega\mu_2}\right),\quad s=x,y, \tag{7.6.26}$$

方程(7.6.22)和(7.6.23)可分别写为

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\omega_y E_{2x}=\frac{\partial}{\partial y}(H_{2zx}+H_{2zy}), \tag{7.6.27}$$

$$\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\omega_x E_{2y}=\frac{\partial}{\partial x}(H_{2zx}+H_{2zy}), \tag{7.6.28}$$

由此得到

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial y}E_{2x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{w_y}\frac{\partial}{\partial y}H_{2z},\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x}E_{2y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{w_x}\frac{\partial}{\partial x}H_{2z}.$$

将方程(7.6.24)和(7.6.25)代入以上两式,即有

$$-\omega^2\varepsilon_2\mu_2 H_{2zx}=\frac{1}{w_{mx}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{w_x}\frac{\partial}{\partial x}H_{2z}, \tag{7.6.29}$$

$$-\omega^2\varepsilon_2\mu_2 H_{2zy}=\frac{1}{w_{my}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{w_y}\frac{\partial}{\partial y}H_{2z}. \tag{7.6.30}$$

再将以上两式相加,便得到 H_{2z} 满足的波动方程

$$\frac{1}{w_{mx}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{w_x}\frac{\partial H_{2z}}{\partial x}+\frac{1}{w_{my}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{w_y}\frac{\partial H_{2z}}{\partial y}+\omega^2\varepsilon_2\mu_2 H_{2z}=0. \tag{7.6.31}$$

该方程的解为

$$H_{2z}=H_0 T e^{\mathrm{i}(\sqrt{w_x w_{mx}}\beta_{2x}x+\sqrt{w_y w_{my}}\beta_{2y}y)}, \tag{7.6.32}$$

且满足如下的色散关系

$$(\beta_{2x})^2+(\beta_{2y})^2=k_2^2. \tag{7.6.33}$$

将式(7.6.32)代入方程(7.6.27)和(7.6.28),又可得到

$$E_{2x} = -H_0 T \frac{\beta_{2y}}{\omega\varepsilon_2}\sqrt{\frac{w_{my}}{w_y}} e^{i(\sqrt{w_x w_{mx}}\beta_{2x}x + \sqrt{w_y w_{my}}\beta_{2y}y)}, \quad (7.6.34)$$

$$E_{2y} = H_0 T \frac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2}\sqrt{\frac{w_{mx}}{w_x}} e^{i(\sqrt{w_x w_{mx}}\beta_{2x}x + \sqrt{w_y w_{my}}\beta_{2y}y)}. \quad (7.6.35)$$

由于由式(7.6.2),(7.6.4)和式(7.6.32),(7.6.34),(7.6.35)分别表示的区域1和区域2中的切向场分量在平面 $x=0$ 上必须满足连续性条件,因此有

$$w_y = w_{my} = 1, \quad \beta_{2y} = \beta_{1y} = k_1 \sin\theta, \quad (7.6.36)$$

$$R = \frac{\dfrac{\beta_{1x}}{\omega\varepsilon_1} - \dfrac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2}\sqrt{\dfrac{w_{mx}}{w_x}}}{\dfrac{\beta_{1x}}{\omega\varepsilon_1} + \dfrac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2}\sqrt{\dfrac{w_{mx}}{w_x}}}, \quad T = 1 + R. \quad (7.6.37)$$

由式(7.6.26)可知,与 $w_y = w_{my} = 1$ 等效的条件是 $\sigma_y = \sigma_{my} = 0$. 从而,如果满足条件 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$ 和

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_{mx}}{\mu_1}, \quad (7.6.38)$$

则有 $w_x = w_{mx}$. 由式(7.6.6),(7.6.33)和(7.6.36)可知,$\beta_{2x} = \beta_{1x}$.

将这些结果代入式(7.6.37)可以看出,在上述条件下,对任意频率和任意入射角都有 $R=0$. 区域2中的场为

$$H_{2z} = H_0 e^{i(w_x\beta_{1x}x + \beta_{1y}y)} = H_0 e^{i(\beta_{1x}x + \beta_{1y}y)} e^{-(\sigma_x \eta_1 \cos\theta)x}, \quad (7.6.39)$$

$$E_{2x} = -H_0 \eta_1 \sin\theta e^{i(\beta_{1x}x + \beta_{1y}y)} e^{-(\sigma_x \eta_1 \cos\theta)x}, \quad (7.6.40)$$

$$E_{2y} = H_0 \eta_1 \cos\theta e^{i(\beta_{1x}x + \beta_{1y}y)} e^{-(\sigma_x \eta_1 \cos\theta)x}. \quad (7.6.41)$$

由此可知,波在 Berenger 媒质层内是以与入射波相同的方向和速度传播的,且在与分界面垂直的方向上呈指数衰减,衰减系数与频率无关. 与前一小节中所描述的传统的媒质中的情况不同,这一性质适用于任意入射角. 因此,将满足上述条件的 Berenger 媒质称为 Berenger 完全匹配层.

如果分界面垂直于 y 轴,则对于向平面 $y=0$ 入射的 TE 平面波有完全类似的结果.

总体看来,如果用$(\sigma_x, \sigma_{mx}, \sigma_y, \sigma_{my})$表示 Berenger 媒质的损耗参数,则对从无耗区域中入射的 TE 波而言,在介电常数和磁导率满足上述要求的前提下,与 x 轴有垂直分界面的完全匹配层的损耗参数为$(\sigma_x, \sigma_{mx}, 0, 0)$;而与 y 轴有垂直分界面的完全匹配媒质的损耗参数为$(0, 0, \sigma_y, \sigma_{my})$,其中 σ_x, σ_{mx}, σ_y 和 σ_{my} 均满足式(7.6.13).

根据以上分析,构造一种由完全匹配层构成的 TE 波的吸收边界,如图7-16所示. 角点处重叠区域的媒质参数与相邻媒质的参数相同,也是完全匹配的. 为此,需要证明两个完全匹配层之间的匹配问题.

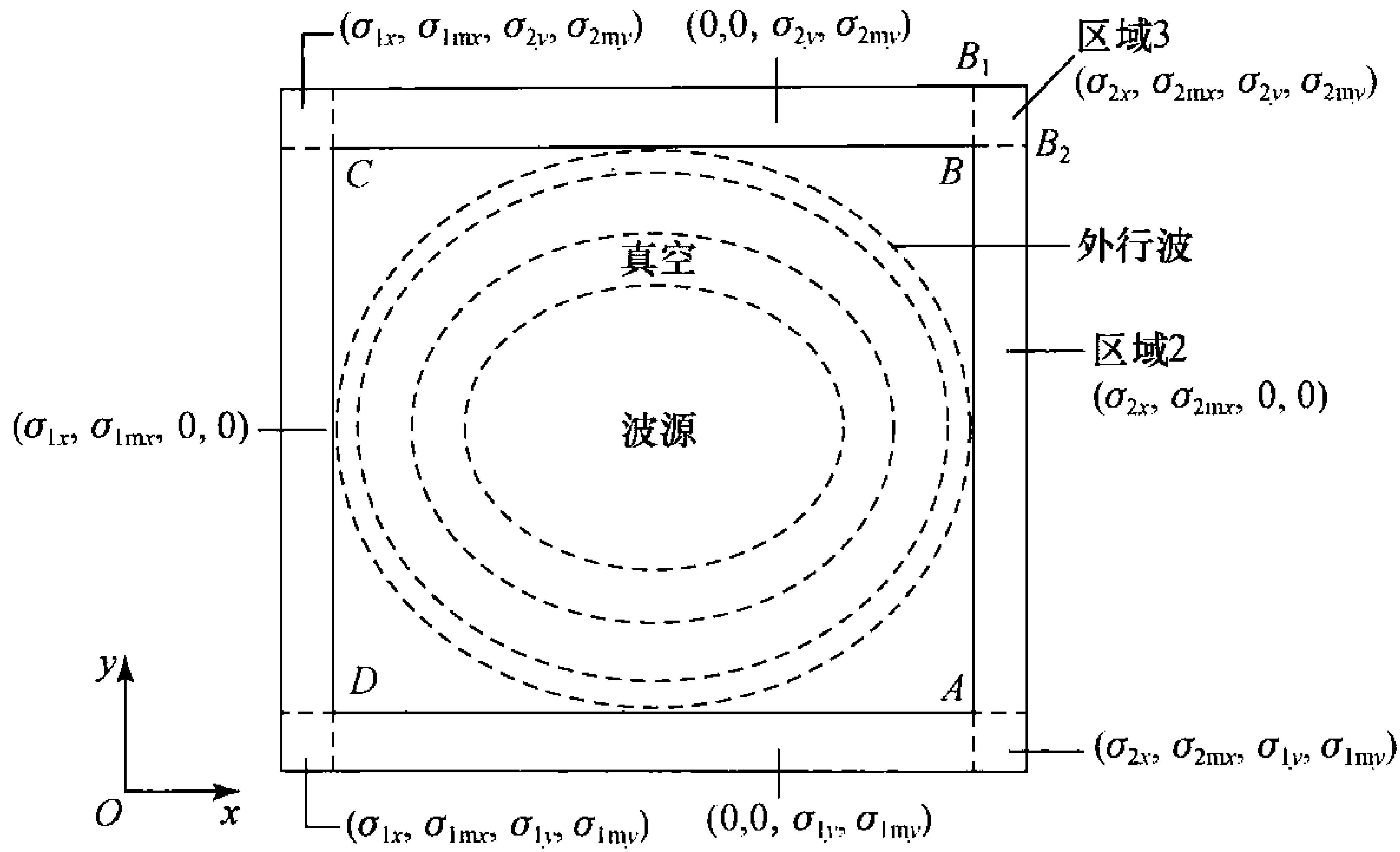


图 7-16 由完全匹配层构成的 TE 波的吸收边界

图 7-16 中右上角的重叠区域称为区域 3. 并以其为例，这个问题的特点是：将透入与 x 轴有垂直分界面的完全匹配层的波作为与 y 轴有垂直分界面的完全匹配层的入射波. 为方便起见，设区域 3 与区域 2 的分界面为平面 $y=0$. 入射波的磁场由式(7.6.39)表示，若反射系数仍用 R 表示，则区域 2 中总磁场为

$$\boldsymbol{H}_2 = \hat{\boldsymbol{z}} H_0 (1 + R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta_{2y}y}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(w_x \beta_{2x} x + \beta_{2y} y)}. \tag{7.6.42}$$

总电场可由方程(7.6.27)和(7.6.28)求出，即

$$\boldsymbol{E}_2 = \left[-\hat{\boldsymbol{x}} \frac{\beta_{2y}}{\omega \varepsilon_2} (1 - R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta_{2y}y}) + \hat{\boldsymbol{y}} \frac{w_x \beta_{2x}}{\omega w_x \varepsilon_2} (1 + R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\beta_{2y}y}) \right] H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(w_x \beta_{2x} x + \beta_{2y} y)}. \tag{7.6.43}$$

区域 3 中的场也满足类似于方程(7.6.32)～(7.6.35)的一组分量方程

$$H_{3z} = H_0 T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(w_x \beta_{3x} x + \sqrt{w_y w_{my}} \beta_{3y} y)}, \tag{7.6.44}$$

$$E_{3x} = - H_0 T \frac{\beta_{3y}}{\omega \varepsilon_3} \sqrt{\frac{w_{my}}{w_y}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(w_x \beta_{3x} x + \sqrt{w_y w_{my}} \beta_{3y} y)}, \tag{7.6.45}$$

$$E_{3y} = H_0 T \frac{\beta_{3x}}{\omega \varepsilon_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(w_x \beta_{3x} x + \sqrt{w_y w_{my}} \beta_{3y} y)} \tag{7.6.46}$$

以及如下的色散关系

$$\beta_{3x}^2 + \beta_{3y}^2 = k_3^2. \tag{7.6.47}$$

根据平面 $y=0$ 两侧切向场分量的连续性，可以导出

$$w_x \beta_{2x} = w_x \beta_{3x}, \tag{7.6.48}$$

$$R=\frac{\frac{\beta_{2y}}{\omega\varepsilon_2}-\frac{\beta_{3y}}{\omega\varepsilon_3}\sqrt{\frac{w_{my}}{w_y}}}{\frac{\beta_{2y}}{\omega\varepsilon_2}+\frac{\beta_{3y}}{\omega\varepsilon_3}\sqrt{\frac{w_{my}}{w_y}}},\quad T=1+R. \tag{7.6.49}$$

如果 $\varepsilon_3=\varepsilon_2$，则平面 $y=0$ 两侧的 w_x 相等，且 $w_y=w_{my}$，于是有

$$\beta_{3y}=\beta_{2y},\quad R=0. \tag{7.6.50}$$

这一结论对在平面 $y=0$ 上的任意入射角 $\varphi=90°-\theta$（其中 θ 为垂直于 x 轴入射到区域 2 的平面波的入射角）和任意频率都成立. 上式中 $R=0$ 的条件在区域 3 的媒质参数设置中已经得到满足. w_x 的连续性要求平面 $y=0$ 两侧的 σ_x 相等，而 σ_x 和 σ_{mx} 满足的匹配条件则要求该平面两侧的 σ_{mx} 也相等. 由于区域 3 中的损耗参数满足匹配条件，从而有 $w_y=w_{my}$.

上述分析方法完全适用于 TM 波的情况，所不同的是这时需要分裂 E_z，即令

$$E_z=E_{zx}+E_{zy}, \tag{7.6.51}$$

这样，区域 2 中的 TM 波所满足的一组分量方程为

$$\mu_2\frac{\partial H_{2x}}{\partial t}+\sigma_{my}H_{2x}=-\frac{\partial}{\partial y}(E_{2zx}+E_{2zy}), \tag{7.6.52}$$

$$\mu_2\frac{\partial H_{2y}}{\partial t}+\sigma_{mx}H_{2y}=\frac{\partial}{\partial x}(E_{2zx}+E_{2zy}), \tag{7.6.53}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial E_{2zx}}{\partial t}+\sigma_xE_{2zx}=\frac{\partial H_{2y}}{\partial x}, \tag{7.6.54}$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial E_{2zy}}{\partial t}+\sigma_yE_{2zy}=-\frac{\partial H_{2x}}{\partial y}, \tag{7.6.55}$$

与方程(7.6.18)～(7.6.21)对比，发现二者有完全的对应关系，而且匹配条件也完全相同. 于是，对 TE 波设置的吸收边界条件对 TM 波也同样有效.

推广到三维空间，所有场分量都需要分裂. 麦克斯韦旋度方程的分量式可写为

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_y\right)E_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(H_{zx}+H_{zy}), \tag{7.6.56}$$

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_z\right)E_{xz}=-\frac{\partial}{\partial z}(H_{yx}+H_{yz}), \tag{7.6.57}$$

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_z\right)E_{yz}=\frac{\partial}{\partial z}(H_{xy}+H_{xz}), \tag{7.6.58}$$

$$\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_x\right)E_{yx}=-\frac{\partial}{\partial x}(H_{zx}+H_{zy}), \tag{7.6.59}$$

$$\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_x\right)E_{zx}=\frac{\partial}{\partial x}(H_{yx}+H_{yz}),\tag{7.6.60}$$

$$\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_y\right)E_{zy}=-\frac{\partial}{\partial y}(H_{xy}+H_{xz}),\tag{7.6.61}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{my}\right)H_{xy}=-\frac{\partial}{\partial y}(E_{zx}+E_{zy}),\tag{7.6.62}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{mz}\right)H_{xz}=\frac{\partial}{\partial z}(E_{yx}+E_{yz}),\tag{7.6.63}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{mz}\right)H_{yz}=-\frac{\partial}{\partial z}(E_{xy}+E_{xz}),\tag{7.6.64}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{mx}\right)H_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}(E_{zx}+E_{zy}),\tag{7.6.65}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{mx}\right)H_{zx}=-\frac{\partial}{\partial x}(E_{yx}+E_{yz}),\tag{7.6.66}$$

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_{my}\right)H_{zy}=\frac{\partial}{\partial y}(E_{xy}+E_{xz}).\tag{7.6.67}$$

三维空间中完全匹配层的匹配条件与二维空间中的类似.分界面垂直于 $s(s=x,y,z)$ 轴的完全匹配层的损耗参数(σ_s,σ_{ms})满足匹配条件,其他参数均为零.透入到完全匹配层内的波沿 s 轴的正、负方向呈指数衰减.在角点处重叠区域内,完全匹配层的参数设置也与二维情况类似.

7.6.3 Berenger 完全匹配层在时域有限差分法中的应用

由于 Berenger 完全匹配层比 Engquist-Majda 吸收边界条件具有更好的吸收性能,因此很快就在时域有限差分法中得到广泛的应用.在直角坐标系中,最直接、最简单的应用是如图 7-16 所示的二维问题,其中除在完全匹配层内存在散射体或辐射体外,与完全匹配层最外层接触的区域均可设为自由空间.这些区域中的计算将执行传统的时域有限差分格式,而在完全匹配层中需采用由方程(7.6.18)～(7.6.21)或(7.6.52)～(7.6.55)导出的差分格式.为此,仍采用 Yee 氏网格单元,将分裂的 H_z 或 E_z 仍置于原来的位置.另外,由于电磁波在完全匹配层中衰减得很快,用通常方法推导差分格式可能引起较大误差,甚至导致数值不稳定,故常采用指数差分格式.具体处理方法请参看有关文献.

在三维问题中,有 6 个场分量被分裂,但仍可将分裂的场量分别重叠在 Yee 氏网格单元中的原有位置.然后,利用这种网格设置,可以建立被分裂的 12 个场分量的差分格式.

为了保证良好的吸收效果,需要设置足够厚的完全匹配层(即所占的网格层数足够多).由于完全匹配层被设置在网格空间的外层,其厚度的增加使计算机

的存储空间和占用的 CPU 时间明显增加. 另一个需要考虑的是电导率的分布，令其为常数会产生较强的界面反射，故一般选择令其为线性分布或几何递增分布的函数. 由于达到完全匹配层外部的入射波已经很弱，一般都把最外层设置成理想导体.

§7.7 各向异性完全匹配层

Berenger 完全匹配层对改善吸收边界条件起到非常重要的作用，但由于需对场分量进行分裂，不能应用于一般形式的麦克斯韦旋度方程，使其应用受到了一定限制. Gedney 完全匹配层的提出开启了这一方面的深入研究，并取得了一系列成果. 研究发现，场分量分裂并不是必须的. 只要完全匹配层的媒质是各向异性的，就可具有相同的性质，其中传播的电磁波也满足非场分量分裂的麦克斯韦旋度方程.

7.7.1 Gedney 完全匹配层

假定垂直于 z 轴的平面 $z=0$ 将空间分成两个区域：区域 1 中的媒质是各向同性的，用 ε_1 和 μ_1 描述；区域 2 中的媒质是单轴各向异性的，用张量 $\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2$ 和 $\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2$ 描述；区域 2 中的媒质对 z 轴是旋转对称的（即 $\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{xx}$，$\mu_{yy}=\mu_{xx}$），可表示为

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2=\varepsilon_2\begin{bmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{bmatrix},\quad\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2=\mu_2\begin{bmatrix}c&0&0\\0&c&0\\0&0&d\end{bmatrix},\tag{7.7.1}$$

其中 a,b,c,d 为常数. 设入射波为简谐平面波，则区域 2 中的场满足麦克斯韦旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2\cdot\boldsymbol{H},\quad\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2\cdot\boldsymbol{E}.\tag{7.7.2}$$

任意极化方向的入射波在区域 1 中可表示为

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{e}_yH_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1x}x+\beta_{1z}z)},\tag{7.7.3}$$

其中 H_0 为常数，β_{1x}和 β_{1z}为传播常数 $\boldsymbol{\beta}_1$ 的分量，其在区域 2 中激发的也是平面波. 令其传输常数为 $\boldsymbol{\beta}_2$，则由方程(7.7.2)可得到区域 2 中的场所满足的方程

$$\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{E}=\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2\cdot\boldsymbol{H},\quad\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{H}=-\omega\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2\cdot\boldsymbol{E},\tag{7.7.4}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_2=\beta_{2x}\hat{\boldsymbol{x}}+\beta_{2z}\hat{\boldsymbol{z}}$，从而导出磁场满足的波动方程

$$\boldsymbol{\beta}_2\times\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2^{-1}\cdot(\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{H})+\omega^2\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2\cdot\boldsymbol{H}=0.\tag{7.7.5}$$

将上式展开，并写成下述矩阵形式

$$\begin{bmatrix} k_2^2 c - \beta_{2z}^2/a & 0 & \beta_{2x}\beta_{2z}/a \\ 0 & k_2^2 - \beta_{2z}^2/a - \beta_{2x}^2/b & 0 \\ \beta_{2x}\beta_{2z}/a & 0 & k_2^2 d - \beta_{2x}^2/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.7.6)$$

其中 $k_2^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_2$. 用类似的方法,也可得到电场满足的方程.

区域 2 中单轴媒质的色散关系可由方程(7.7.6)左侧矩阵的行列式导出. 通过求解 β_{2x}还可得到 4 个特征解,从中可分离出相对于 y 轴的向前和向后的 TE_y 波($E_y=0$)和 TM_y 波($H_y=0$),并分别满足以下色散关系,即

$$k_2^2 - \beta_{2z}^2/ca - \beta_{2x}^2/bc = 0, \quad (7.7.7)$$

$$k_2^2 - \beta_{2z}^2/ca - \beta_{2x}^2/ad = 0. \quad (7.7.8)$$

假设区域 1 中的 TE_y 波入射到分界面 $z=0$ 上,则区域 1 中的总场为入射场与反射场的叠加. 用 R 表示平面 $z=0$ 上的磁场反射系数,则有

$$\boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{y}} H_0 (1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta_{1z}z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1z}z+\beta_{1x}x)}, \quad (7.7.9)$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \left[-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\beta_{1z}}{\omega\varepsilon_1}(1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta_{1z}z}) + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\beta_1 x}{\omega\varepsilon_1}(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\beta_{1z}z})\right] H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1x}x+\beta_{1z}z)}. \quad (7.7.10)$$

由于透入到区域 2 中的波仍为 TE_y 波,传输特性满足式(7.7.7),故磁场可表示为

$$\boldsymbol{H}_2 = \hat{\boldsymbol{y}} H_0 T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{2x}x+\beta_{2z}z)}, \quad (7.7.11)$$

其中 T 为磁场透射系数. 电场可由方程(7.7.4)中的第二式求出,即

$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{1}{\omega}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\cdot(\boldsymbol{\beta}_2\times\boldsymbol{H}_2) = \left(-\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\beta_{2z}}{\omega\varepsilon_2 a} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\beta_{2x}}{\omega\varepsilon_2 b}\right) H_0 T \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{2x}x+\beta_{2z}z)}. \quad (7.7.12)$$

根据平面 $z=0$ 两侧切向场分量的连续性条件,可得到

$$R = \frac{\beta_{1z} - \beta_{2z}/a}{\beta_{1z} + \beta_{2z}/a}, \quad T = 1 + R, \quad (7.7.13)$$

$$\beta_{2x} = \beta_{1x}. \quad (7.7.14)$$

将上式代入式(7.7.7),即可解出

$$\beta_{2z} = \sqrt{ack_2^2 - (a/b)\beta_{1x}^2}. \quad (7.7.15)$$

如果满足条件 $\varepsilon_1=\varepsilon_2, \mu_1=\mu_2, c=a$ 和 $a=1/b$,则有

$$k_1 = k_2, \quad \beta_{2z} = \sqrt{a^2k_1^2 - a^2\beta_{1x}^2} = a\sqrt{k_1^2 - \beta_{1x}^2} = a\beta_{1z}. \quad (7.7.16)$$

将式(7.7.16)代入式(7.7.13)可知,在上述条件下对任意 β_{1z},都有 $R=0$. 也就是说,对所有的入射角而言,平面 $z=0$ 都是无反射的.

类似地,对于 TM_y 波,所得的电场反射系数是式(7.7.13)的对偶,只需要式(7.7.13)～(7.7.16)中将 a 和 c 互换,并将 b 换成 d. 如果 $c=a, d=1/a$,则分界

面也是无反射的.

综合考虑 TE_y 波和 TM_y 波,满足无反射条件的完全匹配层的媒质参数 $\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2$ 和 $\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2$ 为如下形式的并矢

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_2=\varepsilon_1\bar{\bar{\boldsymbol{S}}},\quad \bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}}_2=\mu_1\bar{\bar{\boldsymbol{S}}},\quad \bar{\bar{\boldsymbol{S}}}=\begin{bmatrix}s_z & 0 & 0\\ 0 & s_z & 0\\ 0 & 0 & 1/s_z\end{bmatrix},\tag{7.7.17}$$

其中 s_z 为常数. 这种媒质的无反射特性与入射波的角度、极化方向和频率无关. 由式(7.7.7)和(7.7.8)还可以发现,TE_y 波和 TM_y 波的特性波阻抗是一样的. 人们将这类媒质称为单轴完全匹配层(uniaxial perfectly matched layer,简称UPML),以表征其具有单轴各向异性且完全匹配的特性.

与 Berenger 完全匹配层类似,对区域 2 中任意的 w_x,单轴完全匹配层都具有无反射特性. 例如,令

$$s_z=1-\frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_1}=1+\mathrm{i}\frac{\sigma_z}{\omega\varepsilon_1},\tag{7.7.18}$$

由式(7.7.16)得

$$\beta_{2z}=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sigma_z}{\omega\varepsilon_1}\right)\beta_{1z},\tag{7.7.19}$$

由上式和式(7.7.14)可以看出,入射波和透射波的相速度对任何入射角都是相同的,区域 1 和区域 2 中的特性波阻抗也是相同的. 这正说明分界面 $z=0$ 两侧的媒质是匹配的.

将式(7.7.14)和(7.7.19)代入式(7.7.11)和(7.7.12),可得到单轴完全匹配层中的 TE_y 波,即

$$\boldsymbol{H}_2=\hat{\boldsymbol{y}}H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1z}z+\beta_{1x}x)}\mathrm{e}^{-(\sigma_z\eta_1\cos\theta)z},\tag{7.7.20}$$

$$\boldsymbol{E}_2=(-\hat{\boldsymbol{z}}w_z\eta_1\sin\theta+\hat{\boldsymbol{x}}\eta_1\cos\theta)H_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_{1z}z+\beta_{1x}x)}\mathrm{e}^{-\sigma_z\eta_1\cos\theta z},\tag{7.7.21}$$

其中 θ 表示相对于 z 轴的入射角,$\eta_1=\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}$. 由此可见,透射到单轴完全匹配层中的波以与入射波相同的相速度传播时,沿垂直于分界面的方向按指数规律衰减,且衰减常数与频率无关,但依赖于 θ 和单轴完全匹配层的电导率 σ_z.

7.7.2 Gedney 完全匹配层的时域有限差分格式

由于不必对场量进行分裂处理,Gedney 完全匹配层的时域有限差分格式变得更加简单. 本小节只推导前一小节所描述的分界面与 z 轴垂直的单轴各向异性完全匹配层中的计算格式,故可去掉表示不同区域的下角标. 若媒质参数采用式(7.7.17)和(7.7.18),则方程(7.7.2)的分量式可分别表示为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathrm{i}\omega\mu \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (7.7.22)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} = - \mathrm{i}\omega\varepsilon \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (7.7.23)$$

方程(7.7.22)和(7.7.23)中的前两个分量式很容易转换到时域，可将其表示成传统的时域有限差分格式. 然而，第三个分量式不能直接转换，故不能按一般的方法导出其对应的差分格式，需增加一个中间步骤.

这里，仍采用 Yee 氏网格. 为使其中网格参数的设置更符合一般规律，引入等效磁阻率 σ_{mz}，并令其满足

$$\frac{\sigma_{mz}}{\mu} = \frac{\sigma_z}{\varepsilon}. \quad (7.7.24)$$

于是，方程(7.7.22)可改写为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathrm{i}\omega\mu \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sigma_{mz}}{\mathrm{i}\omega\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\sigma_{mz}}{\mathrm{i}\omega\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{mz}}{\mathrm{i}\omega\mu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}. \quad (7.7.25)$$

为了导出方程(7.7.25)中第三个分量式的差分格式，先计算一个中间量 $\overline{H}_z$. 令

$$\overline{H}_z = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{mz}}{\mathrm{i}\omega\mu}} H_z, \quad (7.7.26)$$

于是有

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mathrm{i}\omega\mu \overline{H}_z = - \mu \frac{\partial \overline{H}_z}{\partial t}. \quad (7.7.27)$$

这里所用频域量 $\overline{H}_z$ 暗含对时间的依赖关系为 $e^{-i\omega t}$，故有 $\frac{\partial\overline{H}_z}{\partial t}=-i\omega\overline{H}_z$，下同. 采用中心差分近似，由上式得到 $\overline{H}_z$ 的差分格式

$$\begin{aligned}&\overline{H}_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)\\&\quad=\overline{H}_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)\\&\qquad-\frac{\Delta t}{\mu}\left[\frac{E_y^n\left(i+1,j+\frac{1}{2},k\right)-E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)}{\Delta x}\right.\\&\qquad\left.-\frac{E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1,k\right)-E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta y}\right],\end{aligned}\tag{7.7.28}$$

其中 Δx 和 Δy 分别为沿 x 和 y 轴的空间步长，Δt 为时间步长. 由式(7.7.26)得

$$i\omega\overline{H}_z-\frac{\sigma_{mz}}{\mu}\overline{H}_z=i\omega H_z.\tag{7.7.29}$$

与其对应的时域形式为

$$\frac{\partial\overline{H}_z}{\partial t}+\frac{\sigma_{mz}}{\mu}\overline{H}_z=\frac{\partial H_z}{\partial t}.\tag{7.7.30}$$

由此可通过 $\overline{H}_z$ 得到 H_z 的差分格式，即

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}=H_z^{n-\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{\sigma_{mz}\Delta t}{2\mu}\right)\overline{H}_z^{n+\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{\sigma_{mz}\Delta t}{2\mu}\right)\overline{H}_z^{n-\frac{1}{2}}.\tag{7.7.31}$$

于是，通过如方程(7.7.28)和(7.7.31)所示的两个步骤即可完成 H_z 的计算.

类似地，可以导出方程(7.7.23)中第三个分量式的时域有限差分格式. 令

$$\overline{E}_z=\frac{1}{1-\frac{\sigma_z}{i\omega\varepsilon}}E_z,\tag{7.7.32}$$

于是有

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-i\omega\varepsilon\overline{E}_z=\varepsilon\frac{\partial\overline{E}_z}{\partial t},\tag{7.7.33}$$

从而得到 $\overline{E}_z$ 的差分格式

$$\begin{aligned}&\overline{E}_z^{n+1}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)=\overline{E}_z^{n}\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)\\&\quad+\frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)-H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\Bigg]. \tag{7.7.34}$$

由式(7.7.32)得

$$\mathrm{i}\omega\overline{E}_z-\frac{\sigma_z}{\varepsilon}\overline{E}_z=\mathrm{i}\omega E_z, \tag{7.7.35}$$

与其对应的时域形式为

$$\frac{\partial\overline{E}_z}{\partial t}+\frac{\sigma_z}{\varepsilon}\overline{E}_z=\frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{7.7.36}$$

由此可通过 $\overline{E}_z$ 得到 E_z 的时域有限差分格式

$$E_z^{n+1}=E_z^n+\left(1+\frac{\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon}\right)\overline{E}_z^{n+1}-\left(1-\frac{\sigma_z\Delta t}{2\varepsilon}\right)\overline{E}_z^n. \tag{7.7.37}$$

于是，通过如方程(7.7.34)和(7.7.37)所示的两个步骤即可完成 E_z 的计算.

对于分界面垂直于 x 轴和 y 轴的情况，可采用完全类似的方法导出相应的时域有限差分格式.

当用各向异性完全匹配层构成外层吸收边界时，在棱边、角点处会出现重叠区域. 对于重叠区域的媒质，可设

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}&=\begin{bmatrix}1/s_x&0&0\\0&s_x&0\\0&0&s_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_y&0&0\\0&1/s_y&0\\0&0&s_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_z&0&0\\0&s_z&0\\0&0&1/s_z\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}s_ys_z/s_x&0&0\\0&s_xs_z/s_y&0\\0&0&s_xs_y/s_z\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{7.7.38}$$

其中

$$s_x=1-\frac{\sigma_x}{\mathrm{i}\omega\varepsilon},\quad s_y=1-\frac{\sigma_y}{\mathrm{i}\omega\varepsilon},\quad s_z=1-\frac{\sigma_z}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}, \tag{7.7.39}$$

在重叠区域中所满足的麦克斯韦旋度方程可表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{i}\omega\mu\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}\cdot\boldsymbol{H},\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}\cdot\boldsymbol{E}, \tag{7.7.40}$$

其时域有限差分格式可以按照前面的方法类似地导出. 对于不同交叠区域的媒质描述，可通过选择式(7.7.39)中的 σ_x，σ_y 和 σ_z 来实现.

§7.8 高阶时域有限差分法

经典的 Yee 氏时域有限差分法在对时间变量和空间变量微商的差分近似

时都采用了具有二阶精度的中心差分. 为叙述简单起见,我们把这种方法记做FDTD(2,2). 虽然 FDTD(2,2)在很多领域得到了广泛的应用,但由于存在数值色散,限制了它在大尺度问题中的应用. 为了保证一定的计算精度,数值色散误差的存在要求网格空间步长要足够小,一般要求不大于波长的十分之一. 此外,稳定条件的限制同时也就规定了可以选取的最大时间步长. 为了增加空间步长,又不降低计算精度,就必须减小数值色散误差. 达到此目的的一个最直接的途径是提高差分近似的精度,这就产生了高阶时域有限差分法.

人们对高阶时域有限差分法已开展了多方面的研究,对各阶精度差分近似的搭配进行了比较. 结果发现,当时间上取二阶精度、空间上取四阶精度时,FDTD(2,4)相对比较优越. 下面仅对这一形式作简要介绍.

7.8.1　高阶时域有限差分法的差分形式

在§7.1中,我们已导出了如式(7.1.5)所表示的函数 $f(x)$的具有二阶精度的中心差分近似. 在直角坐标系的均匀网格空间中,我们可以给出函数 $f(x,y)$分别对 x 和 y 的二阶中心差分 $D_{2x}f(x,y)$和 $D_{2y}f(x,y)$,按以前的离散表示方法有

$$D_{2x}f(i,j)=\frac{1}{\Delta x}\left[f\left(i+\frac{1}{2},j\right)-f\left(i-\frac{1}{2},j\right)\right], \tag{7.8.1}$$

$$D_{2y}f(i,j)=\frac{1}{\Delta y}\left[f\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-f\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right], \tag{7.8.2}$$

其中 Δx 和 Δy 为沿 x 和 y 方向的空间步长.

如果我们把 $f(x)$的泰勒(Taylor)展开精确到四阶,就可得到具有四级精度的中心差分近似. 由于

$$\begin{aligned}f\left(x\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)=&f(x)+\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)\\&+\frac{1}{3!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+\frac{1}{4!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)+\cdots,\end{aligned} \tag{7.8.3}$$

$$\begin{aligned}f\left(x\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)=&f(x)+\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)\\&+\frac{1}{3!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+\frac{1}{4!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)+\cdots,\end{aligned} \tag{7.8.4}$$

由上两式,分别得到

$$f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{24}\Delta x^{3}\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}f(x)+O(\Delta x^{5}),\tag{7.8.5}$$

$$f\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{3}{2}\Delta x\right)=3\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{27}{24}\Delta x^{3}\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}f(x)+O(\Delta x^{5}).\tag{7.8.6}$$

因此又有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f\left(x-\frac{3}{2}\Delta x\right)-f\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)+27f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-27f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{24\Delta x}+O(\Delta x^{4}),\tag{7.8.7}$$

这是一种具有四阶近似的中心差分形式. 据此，我们可以定义二元函数 $f(x,y)$ 的四阶中心差分 D_{4x} 和 D_{4y} 的离散表示

$$D_{4x}f(i,j)=D_{2x}f(i,j)+\frac{1}{24\Delta x}\left[3f\left(i+\frac{1}{2},j\right)-3f\left(i-\frac{1}{2},j\right)-f\left(i+\frac{3}{2},j\right)+f\left(i-\frac{3}{2},j\right)\right],\tag{7.8.8}$$

$$D_{4y}f(i,j)=D_{2y}f(i,j)+\frac{1}{24\Delta y}\left[3f\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-3f\left(i,j-\frac{1}{2}\right)-f\left(i,j+\frac{3}{2}\right)+f\left(i,j-\frac{3}{2}\right)\right].\tag{7.8.9}$$

把以上定义运用到二维电磁场问题中，即可得到一种二维 FDTD(2,4)，其中对时间变量仍保持二阶中心差分. 例如，对 TM_z 问题，可将其方程

$$\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}=-\frac{\partial E_z}{\partial y},$$

$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

变换为相应的 FDTD(2,4)差分格式

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta t}{\mu}D_{4y}E_z^{n}\left(i,j+\frac{1}{2}\right),\tag{7.8.10}$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{\Delta t}{\mu}D_{4x}E_z^{n}\left(i+\frac{1}{2},j\right),\tag{7.8.11}$$

$$E_z^{n+1}(i,j)=E_z^{n}(i,j)+\frac{\Delta t}{\varepsilon}D_{4x}H_y^{n+\frac{1}{2}}(i,j)-\frac{\Delta t}{\varepsilon}D_{4y}H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j),\tag{7.8.12}$$

对三维问题,也可采用类似的办法得到相应的差分格式.

7.8.2 稳定性和色散特性分析

为了说明高阶时域有限差分法的确能减小数值色散误差,需要对其稳定性和色散特性进行定量分析.为了得到稳定的条件,仍然可以利用式(7.2.11)所示的增长因子 q,其中 F 表示任一场分量的频谱分量,它们可由式(7.8.10)~(7.8.12)的傅里叶变换求得,由此可知[47]

$$q = \pm\sqrt{1-(v\Delta t)^2\left[\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2\right]}+\mathrm{i}v\Delta t\sqrt{\left[\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2\right]}, \tag{7.8.13}$$

其中

$$M_x = \frac{1}{24}\left[27\sin\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right)-\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\right],$$

$$M_y = \frac{1}{24}\left[27\sin\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right)-\sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\right]. \tag{7.8.14}$$

而 $k_x=k\cos\alpha, k_y=k\sin\alpha, v=1/\sqrt{\varepsilon\mu}, k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. α 为波的传播方向与 x 轴之间的夹角.

为了保证计算的稳定,增长因子必须满足条件 $|q|\leqslant 1$. 据此,可由式(7.8.13)得到 FDTD(2,4)的稳定性条件为

$$v\Delta t\sqrt{\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2}\leqslant 1, \tag{7.8.15}$$

采用与以前类似的方法,可以得到 FDTD(2,4)的色散方程

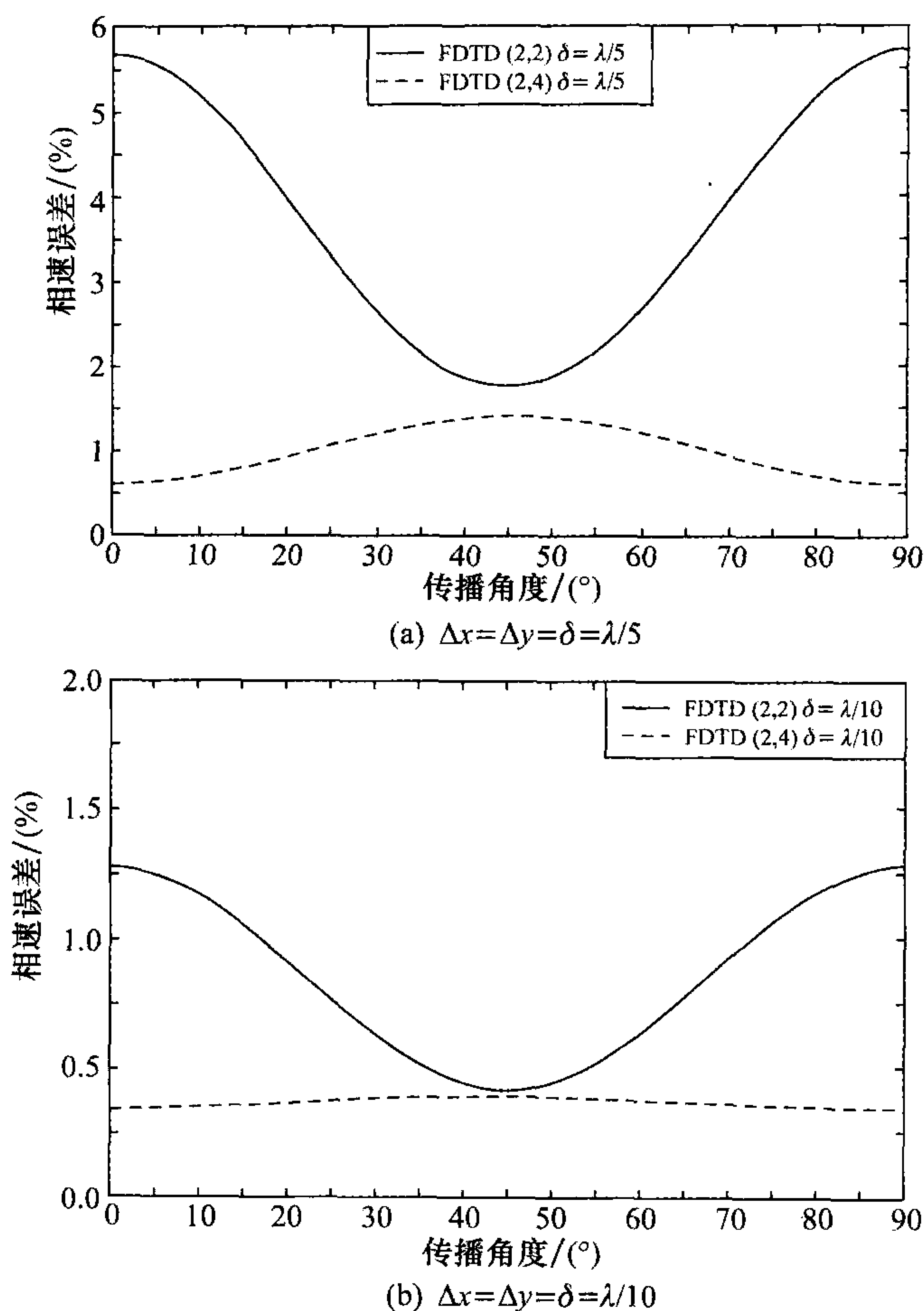
$$\sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)=v\Delta t\sqrt{\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2}, \tag{7.8.16}$$

或更直观地表示为

$$\left[\frac{1}{v\Delta t}\sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)\right]^2 = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{9}{8}\sin\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right)-\frac{1}{24}\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\right]^2 + \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{9}{8}\sin\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right)-\frac{1}{24}\sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\right]^2, \tag{7.8.17}$$

以上结果不难推广到三维的情况.

图 7-17(a)和(b)分别给出了在不同空间步长时根据以上公式计算的 FDTD(2,4)的色散特性与 FDTD(2,2)的比较,可以明显地看出 FDTD(2,4)的优越性.



(a) $\Delta x=\Delta y=\delta=\lambda/5$

(b) $\Delta x=\Delta y=\delta=\lambda/10$

图 7-17 FDTD(2,4)与 FDTD(2,2)数值色散特性的比较

以上仅是 FDTD(2,4)的最基本的形式和具有的特性. 为了进一步提高这一方法的效能,已经提出了很多改进措施. 其中有一项措施是在差分格式中引入权重系数,使之介于 FDTD(2,2)和 FDTD(2,4)之间,权重系数的选择由优化数值色散特性来决定. 新的研究已经把高阶时域有限差分法与 PML 相结合,甚至建立在非正交网格体系中.

§ 7.9 ADI-FDTD 法

到现在为止,以前所讨论的时域有限差分法都是显式法,它的最大特点是只有其时间步长满足 Courant 条件时计算才是稳定的. 该稳定条件不仅限制了可

选取的最大时间步长,而且时间步长还和计算域内所选取的最小空间步长相关.空间步长越小,时间步长也要相应地减小.这一限制大大影响了计算效率.隐式时域差分法是无条件稳定的,时间步长也可取得更长,但在计算的每一时间步时都要解代数方程,故也不能提高计算效率.

在求解热传导问题中,人们早已发展了一种交替方向隐式法(Alternating Direction Implicit Method),简称 ADI.其基本做法是:在求解偏微分方程时,先选取一个变量方向按隐式差分格式处理,而余下的变量方向按显式差分格式处理,然后交换隐式和显式差分格处理的变量方向.对于每一步而言,计算仍是条件稳定的,但复合的结果使整个计算成为无条件稳定的.

1999 年,T. Namiki 给出了一种利用 ADI 原理求解麦克斯韦方程的时域有限差分格式,称之为 ADI-FDTD 法,它被证明是无条件稳定的.这一方法的提出,很快引起了人们广泛研究的兴趣,目前已经取得了很多成果.下面对 ADI-FDTD 法的基本原理作简要介绍.

7.9.1　ADI-FDTD 法的基本格式

为了书写简便,以下仅以 TE_z 波问题为例说明利用 ADI-FDTD 法建立差分格式的基本步骤.TE_z 波的麦克斯韦方程在直角坐标中具有如下的形式

$$\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial H_z}{\partial y},\tag{7.9.1}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t}=-\frac{\partial H_z}{\partial x},\tag{7.9.2}$$

$$\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}.\tag{7.9.3}$$

差分格式的建立仍在 Yee 氏网格中进行.与传统的方法不同的是,把 n 到 $n+1$时间步分为两个子时间步进行,第一个子时间步为 n 到 $n+1/2$,第二个子时间步为 $n+1/2$ 到 $n+1$.在第一个子时间步建立差分格式时,方程(7.9.1)为显式,而方程(7.9.2)和(7.9.3)为隐式,仍采用中心差分近似,其形式为

$$\begin{aligned}E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=&E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\\&+\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right)\left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.9.4}$$

$$\begin{aligned}E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=&E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\\&-\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{7.9.5}$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)=H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right)\left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right]-\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.9.6}$$

方程(7.9.5)的特点是,右边的 H_z 与左边的 E_y 取相同时间的值;方程(7.9.6)的特点则是右边 E_y 与左边 H_z 取相同时间的值.显然,方程(7.9.5)不能直接用步进法计算,因为 $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ 还是未知的.为解决这一问题,可利用(7.9.6)消去 $H_z^{n+\frac{1}{2}}$,从而得到

$$\begin{aligned}&E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)-\left[\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta x}{\Delta t}\right)^2+2\right]E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)\\&=-\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta x}{\Delta t}\right)^2E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\\&\quad+\left(\frac{2\mu\Delta x}{\Delta t}\right)\left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^n\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right]\\&\quad+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right.\\&\quad\left.+E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^n\left(i-\frac{1}{2},j+1\right)\right],\end{aligned}\tag{7.9.7}$$

它可以表示成一个对角带状矩阵方程,由此可解出 $E_y^{n+\frac{1}{2}}$,在此之后方程(7.9.6)也就可以计算了.

在第二个子时间步,把方程(7.9.2)表示成显式,其他两个表示成隐式,其形式为

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right)\left[H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.9.8}$$

$$E_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right],\tag{7.9.9}$$

$$H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)=H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right)\left[E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right].$$
(7.9.10)

在此过程中方程(7.9.8)不能直接执行,但可利用式(7.9.10)消去 H_z^{n+1},从而有

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j-1\right)-\left[\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta y}{\Delta t}\right)^2+2\right]E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)+E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)$$
$$=-\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta y}{\Delta t}\right)^2E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)$$
$$+\left(\frac{2\mu\Delta y}{\Delta t}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.+E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j-\frac{1}{2}\right)-E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right]. \quad (7.9.11)$$

由该方程解出 E_x^{n+1} 后,后面两个方程就都可以执行了.完成了这两个子时间步的计算就可进入下一个时间步,依此可完成全部按步进法进行的计算.

对三维电磁场问题,要考虑 6 个场分量的计算,其中每个场分量都满足类似(7.9.3)的方程.对比方程(7.9.6)和(7.9.10),可以发现它们之间的差别.在适用于第一子时间步的方程(7.9.6)中对 E_x 取的是显式,对 E_y 取的是隐式;而在适用于第二子时间步的方程(7.9.10)中正好相反,对 E_x 取的是隐式,而对 E_y 则取的是显式.把这一交替原则运用到三维电磁场的 6 个分量的方程中,就能得到三维电磁场问题的 ADI-FDTD 差分格式,这里不再一一列出.

7.9.2 稳定性分析

以上建立的 ADI-FDTD 差分格式应该是无条件稳定的,下面对此加以证明.

对二维 TE_z 波而言,3 个分量一般可以表示为

$$\begin{cases}E_x=E_{x0}q_l^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy)},\\E_y=E_{y0}q_l^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy)},\\H_z=H_{z0}q_l^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy)},\end{cases}\quad(7.9.12)$$

其中 q_l 为增长因子,l 取值 1,2,分别代表第一子时间和第二子时间步.为了计算 q_1,把式(7.9.12)代入方程(7.9.4)~(7.9.6),可以得到

$$\begin{cases}(q_1-1)E_{x0}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_y\Delta y\right)H_{z0}=0,\\(q_1-1)E_{y0}+\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_x\Delta x\right)q_1H_{z0}=0,\\\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\mu\Delta y}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_y\Delta y\right)E_{x0}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\mu\Delta x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_x\Delta x\right)q_1E_{y0}-(q_1-1)H_{z0}=0.\end{cases}\tag{7.9.13}$$

把 E_{x0},E_{y0} 和 H_{z0} 作为未知量,由系数行列式为零可得

$$\alpha q_1^2-2q_1+\beta=0,\tag{7.9.14}$$

其中

$$\alpha=1+\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\Delta x}\right)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}k_x\Delta x\right),$$

$$\beta=1+\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon\mu}\,\Delta y}\right)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}k_y\Delta y\right).$$

由方程(7.9.14)可解得 q_1 为

$$q_1=\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{\alpha\beta-1}}{\alpha}.\tag{7.9.15}$$

类似地,把式(7.9.12)代入方程(7.9.8)~(7.9.10),又可得到

$$\begin{cases}(q_2-1)E_{x0}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_y\Delta y\right)q_2H_{z0}=0,\\(q_2-1)E_{y0}+\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_x\Delta x\right)H_{z0}=0,\\\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\mu\Delta y}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_y\Delta y\right)q_2E_{x0}-\mathrm{i}\left(\dfrac{\Delta t}{\mu\Delta x}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}k_x\Delta x\right)E_{y0}-(q_2-1)H_{z0}=0.\end{cases}\tag{7.9.16}$$

由此得

$$\beta q_2^2-2q_2+\alpha=0,\tag{7.9.17}$$

于是

$$q_2=\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{\alpha\beta-1}}{\beta},\tag{7.9.18}$$

这样,对整个时间步的增长因子 q 有

$$|q|=|q_1q_2|=|q_1||q_2|=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=1.\tag{7.9.19}$$

这说明 ADI-FDTD 对 TE_z 波的运算格式是无条件稳定的. 对于三维问题,也可用类似的方法证明,按上述规则建立起来的 ADI-FDTD 差分格式也是无条件稳定的.

§7.10　时域有限差分法的并行算法[7]

计算电磁学的发展使电磁场问题的计算效率不断提高.但是,就目前的水平而言,只用单 CPU 的计算机进行串行计算已远远不能满足很多复杂的电磁场问题的要求.高性能计算机的发展趋势是开发应用多 CPU 的并行计算机系统.为了适应这一趋势,必须发展电磁场问题的并行计算方法.时域有限差分法是最容易并行化的一种方法.下面将通过对时域有限差分法并行算法的讨论,来说明电磁场并行计算方法具体实现的要领.

7.10.1　电磁场计算并行化的必要性

在前几章中,已对最重要的几种用于电磁场计算的数值方法进行了论述.研究这些方法的主要目的不仅是希望借助计算机解决各种复杂的电磁场问题,而且要尽量提高计算效率,尽量少地占用计算机的存储空间和 CPU 时间.一种方法的计算效率可由其计算的复杂度粗略地反映出来.

在微分方程法中,时域有限差分法的计算复杂度仅为 $O(N)$(N 为空间网格总数).但是,这种方法也有其自身的缺点,即设置离散未知量的网格点必须遍布整个计算空间,而且,对开放性问题还要附加吸收边界条件,这也就额外地扩大了计算空间.用时域有限差分法求解电磁场问题时,N 往往很大,从而大大限制了计算效率.在积分方程法中,虽然矩量法采用了表面积分方程可使某些问题的计算空间降低一维,从而使 N(N 为未知量的个数)相对减少,但即使采用多层快速多极子算法,计算复杂度一般也难以低于 $O(N\log N)$.

基于以上原因,利用现有的数值方法求解电磁场问题时,若未知量的个数增大到一定程度,就会使所需的内存空间和 CPU 时间超出单 CPU 计算机的技术水平.这正是很多实际电磁场问题不能解决的原因.以用时域有限差分法计算带引擎终端的飞机进气道的雷达散射截面为例[32],假设进气道的半径为 16 个波长,长度为 120 个波长(相当于一般喷气式飞机的实际进气道在 3 cm 波段的电长度).若空间步长为波长的 1/20,则总的未知量的个数 N 约为 4.63×10^9.假定完成一次计算需 50 000 个时间步(腔体结构达到稳定所需的时间较长),为了计算各个方向的雷达散射截面需运行 5 000 次.如果使用单 CPU 的计算机 Cray Y-MP 完成以上计算,即使不考虑庞大的存储空间,粗略的估算时间长达 2 400 年.显然,这是没有实际意义的.进一步考虑,利用高频近似技术与时域有限差分法结合的混合方法可减少计算量,其中时域有限差分法仅用于包括引擎在内的进气道终端部分的计算.设该部分的长度为 15 个波长,未知量的个数 N 约为 3.86×10^8.假定一次运算需 5 000 个时间步,共运算 5 000 次,在 Cray Y-MP 机

上进行计算也需要 20 年(假设是可行的).

以上分析表明,计算方法的改善可在很大程度上提高计算效率,但目前计算电磁学的发展水平对解决复杂的电磁场问题还是远远不够的. 所幸的是,计算机技术的飞速发展正在大幅度地提高高性能计算机的存储能力和计算速度.

由于高性能计算机均为多处理器构成并采用并行算法,因此,为了用高性能计算机解决电磁场问题,就必须研究各种数值方法并行化的问题. 电磁场计算的并行化,一方面要尽量吸收已有的并行计算的研究成果;另一方面要解决电磁场计算本身的特殊问题,以便达到最佳使用效果,实现高效率的计算.

7.10.2 并行算法设计的一般过程

为了适应大规模计算的需求,最直观的想法就是将多台计算机并联起来,或用多台处理器构成并行系统,称为并行计算机(parallel computer)、高性能计算机(high performance computer)或超级计算机(super computer).

与单 CPU 计算机的串行运作方式不同,并行计算机是按并行方式运作的,因此在并行计算机发展的同时发展了并行算法(parallel algorithm). 利用并行算法进行的计算称为并行计算(parallel computing).

并行算法是一些可同时执行的进程(process)的集合,通过这些进程之间的互相作用和协调动作求解给定的问题. 并行算法的目标是尽可能地减少时间复杂性(即缩短求解时间),通常是通过增加处理器的空间复杂性(如增加处理器的数目)来实现的.

并行算法设计指经过任务划分(partitioning)、通信分析(communication)、任务组合(agglomeration)和处理器映射(mapping)这 4 个阶段,最终设计出一种体现并行性、可扩放性、局部性和模块性的并行算法. 这个过程称为 PCAM 设计过程.

PCAM 设计过程的步骤和要点可详述为:

(1) 将整个计算问题分成一些小的计算任务,以充分开拓算法的并行性和可扩放性. 具体方法是:先进行域分解(即数据的分解),再进行功能分解(即计算的分解),二者互为补充. 划分的设计原则是: 划分过程中应避免数据和计算的重复,使数据集和计算集互不相交;划分产生的任务的尺寸应大致相等,所划分的任务数与问题的尺寸应成比例.

绝大多数并行算法采用的是域分解,其步骤是:首先分解与问题相关的数据,尽可能地使数据片大致相等;然后将每个操作关联到相应的数据上,由此产生一系列任务,每个任务均包括一些数据及其相关的操作. 经验表明,划分应优先集中在最大的数据或经常被访问的数据结构上. 一个三维计算空间的一维、二维和三维域分解如图 7-18 所示.

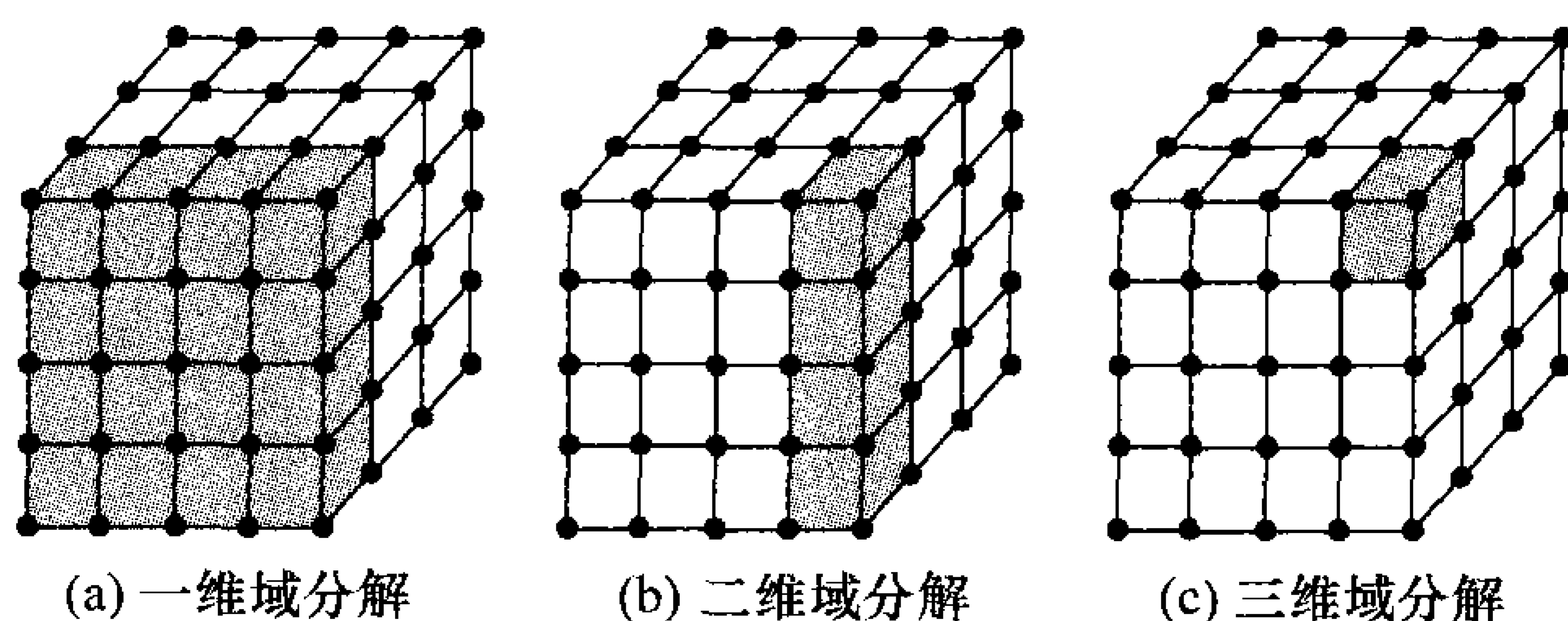


图 7-18　三维计算空间的域分解(图中每个阴影部分均代表一个任务)

(2) 为了执行并行计算,各个任务之间需进行数据传递.由划分产生的多个任务通常不能完全独立地并行执行.当一个任务需要用到其他任务中的数据时,就会产生通信要求.通信的设计原则是:所有任务执行的通信量应大致相等;每个任务应只与少数邻近的任务相互通信;各个通信操作能并行执行,不同任务的计算也能并行执行.

(3) 通过合并小尺寸的任务以减少任务数,从而提高效率并减少通信成本.理想的情况是每台处理器上有且只有一个任务,从而获得一个单程序多数据流(single-programme multiple-data,简称 SPMD)模式的程序.组合的设计原则是:组合中的数据重复不应以牺牲可扩放性为代价;组合后的任务数仍与问题的尺寸成比例;将现有的串行程序并行化应考虑修改串行代码所增加的成本.

(4) 为每个任务指定相应的处理器,以减少算法总的执行时间.具体地讲,将能够并行执行的任务放在不同的处理器上,将需要频繁通信的任务放在同一台处理器上.映射的设计原则是保证合理的计算负载平衡,并衡量不同策略的成本.

基于域分解的算法有多种专用的负载平衡技术,如局部法、概率法、循环法等,以试图使每台处理器上只有一个粗粒度任务.最常用的递归对剖技术可将计算区域分成计算成本大致相等的子区域,同时使通信代价尽量最小.

7.10.3　基于消息传递接口的并行程序设计

消息传递接口是全球工业、政府和科研部门联合推出的一种基于标准消息传递模型的并行程序设计平台,是一个发展较快、使用范围较广的公共消息传递库,也是当今国际上最流行的并行编程环境之一.最初的 1.0 版本于 1994 年 6 月推出,目前正式公布的是 1.2.5 版本.消息传递接口系统主要由消息传递函数库和宏定义组成,包含 200 多个函数(根据 1997 年修订的标准),支持多种版本的 Fortran 和 C 语言,具有精确的定义、完备的异步通信功能,还具有可移植性、

高效性、灵活性和易用性，既适用于分布存储的大规模并行处理器和工作站机群，也可用于共享存储的对称多处理器.

基于消息传递接口的并行程序设计是指用户必须显式地为处理器分配数据和负载，并通过发送、接收消息(message)实现处理器之间的数据交换. 这是大规模并行处理器和工作站机群的主要编程方式，其中每个进程都有各自独立的地址空间，并且必须通过消息传递访问其他进程中的数据. 消息传递的通信开销比较大，主要用来开发粗粒度任务的并行性.

在基于消息传递接口的并行程序设计中，一组进程所执行的程序是由用标准串行语言书写的代码和用于发送、接收消息的库函数共同构成的. 消息传递接口就是在现有机器的软硬件通信基础上实现并行计算程序中各并行任务之间的通信、协调和同步等功能，并对这些任务加以管理.

消息传递接口进程之间通信的基本单位是消息. 一个消息可分为数据和包装两个部分，前者由待发送数据缓冲区在内存中的首地址、数据单元类型和数据单元个数组成，后者由发送进程的序号、接收进程的序号、消息标号和通信器组成.

消息传递接口最重要的特性就是使用了称为通信器的结构——一种建立在进程组上的具有多种属性的不透明对象，也是通信域的具体表现形式，包括进程组(即系统内部一类有序以太网和交换机). 系统规定任何通信函数必须基于某个通信器进行. 如在高端科学计算中，有许多为集群设计的网格接口卡(如 Myrinet)，这些通信器不仅能在集群节点间提供更大的带宽，而且能减少延迟.

7.10.4 时域有限差分法的并行算法设计

在对用于电磁场计算的数值方法并行化的研究中，时域有限差分法的并行算法起步最早，成果最丰富，应用也最广泛. 经分析不难发现，在时域有限差分法的 Yee 氏网格中，任一网格点上的电场(或磁场)分量只与其前一时间步的值及其四周环绕的网格点上的磁场(或电场)分量有关，而与其他网格点上的场量没有直接关系. 这样的局域特性非常适于执行基于域分解的并行计算，每个子区域可单独由一台处理器进行计算，在迭代过程中只需在其边界处与相邻子区域执行切向场分量的通信操作. 由于通信量不大，因而容易获得较好的计算效果.

下面以一个长度为 $18\Delta s$(Δs 为沿 y 轴的空间步长)的一维并行计算区域为例，说明并行算法设计的一些主要问题.

假定将该区域沿 y 轴均匀划分成 4 个子区域，并映射到 4 台处理器(即 4 个进程)上. 由于在 Yee 氏网格中电场分量 E_z 和磁场分量 H_x 被交叉放置，且二者

相距半个空间步长，因此可对该区域进行如图 7-19 所示的域分解. 每台处理器上分配到的计算单元数分别为 5，5，4 和 4，基本达到负载平衡. 此外，将进程之间的划分边界分别放置在 $H_x^n(5)$，$H_x^n(10)$和 $H_x^n(14)$之后(上角标 n 和 $n-1$ 分别表示第 n 和 $n-1$ 时间步). 这样，计算进程 0 中 $H_x^n(5)$的值，要用到进程 1 中 $E_z^{n-1}(6)$的值；计算进程 1 中 $E_z^n(6)$和 $H_x^n(10)$的值，分别要用到进程 0 中 $H_x^{n-1}(5)$的值和进程 2 中 $E_z^{n-1}(11)$的值；计算进程 2 中 $E_z^n(11)$和 $H_x^n(14)$的值，分别要用到进程 1 中 $H_x^{n-1}(10)$的值和进程 3 中 $E_z^{n-1}(15)$的值；计算进程 3 中 $E_z^n(15)$的值，要用到进程 2 中 $H_x^{n-1}(14)$的值. 可见，以上计算的完成需要进程之间适时的通信操作. 当然，也可对该区域进行另一种域分解，即将进程之间的划分边界分别放置在 $E_z(5)$，$E_z(10)$和 $E_z(14)$之后. 这时，进程之间的通信操作显然与前一种情况不同.

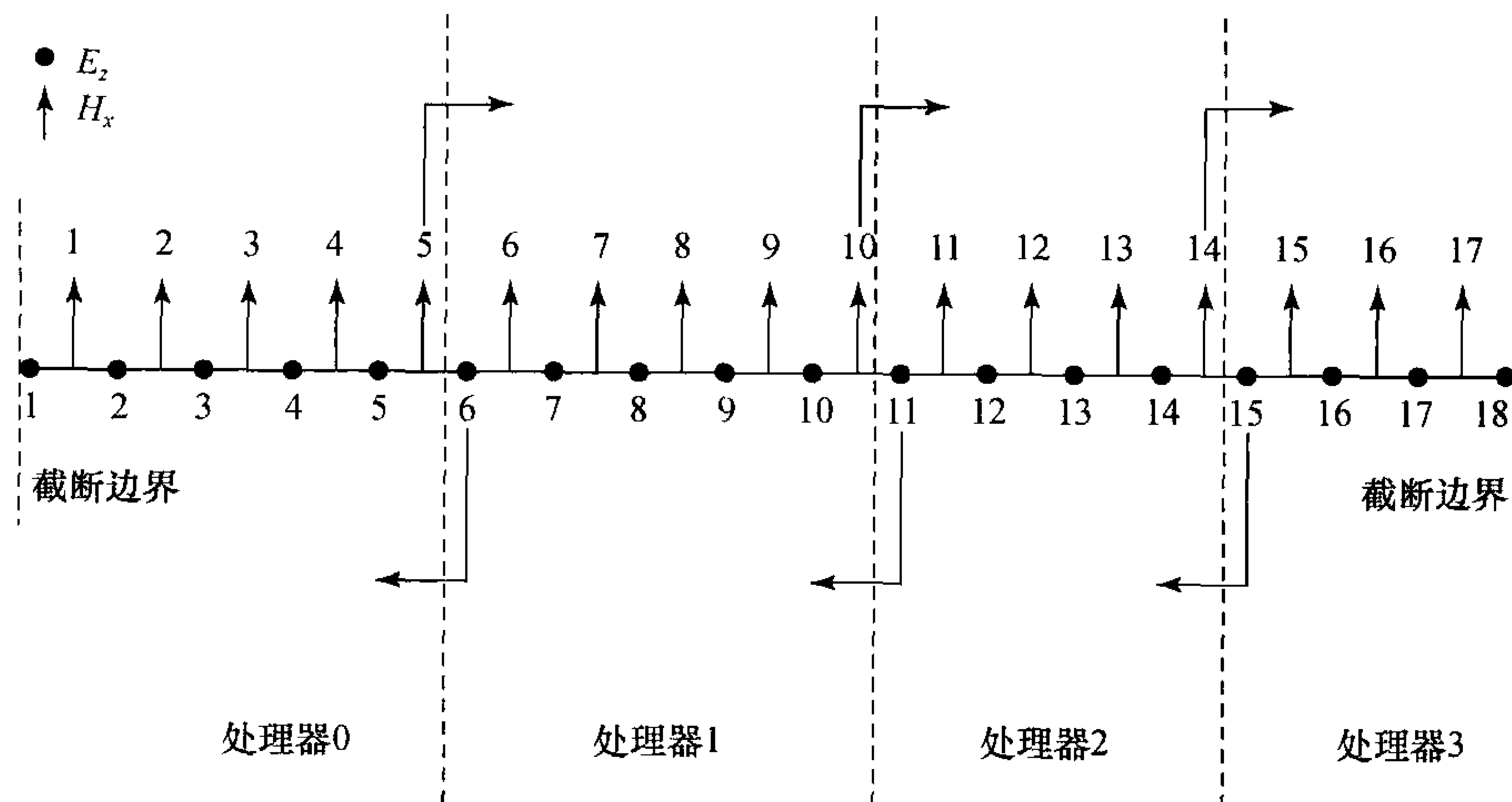


图 7-19　对时域有限差分法的一维并行计算区域进行域分解

在时域有限差分法的并行算法中执行迭代计算和通信操作的过程如图 7-20 所示(仍采用如图 7-19 所示的一维模型).

由于每个网格点上 E_z(或 H_x)的新值与该点在前一时间步的 E_z(或 H_x)值及其邻近点在前半个时间步的 H_x(或 E_z)值有关，因此在第 n 时间步执行迭代计算和通信操作的过程如图 7-20 所示，可概括为以下 4 步：

(1) 从后一进程接收/发送本进程边界上前一时间步的 E_z^{n-1}；

(2) 计算本进程内每个网格点(非截断边界)上当前时间步的 H_x^n；

(3) 向后一进程发送/接收本进程边界上当前时间步的 H_x^n；

(4) 计算本进程内每个网格点(非截断边界)上下一时间步的 E_z^{n+1}.

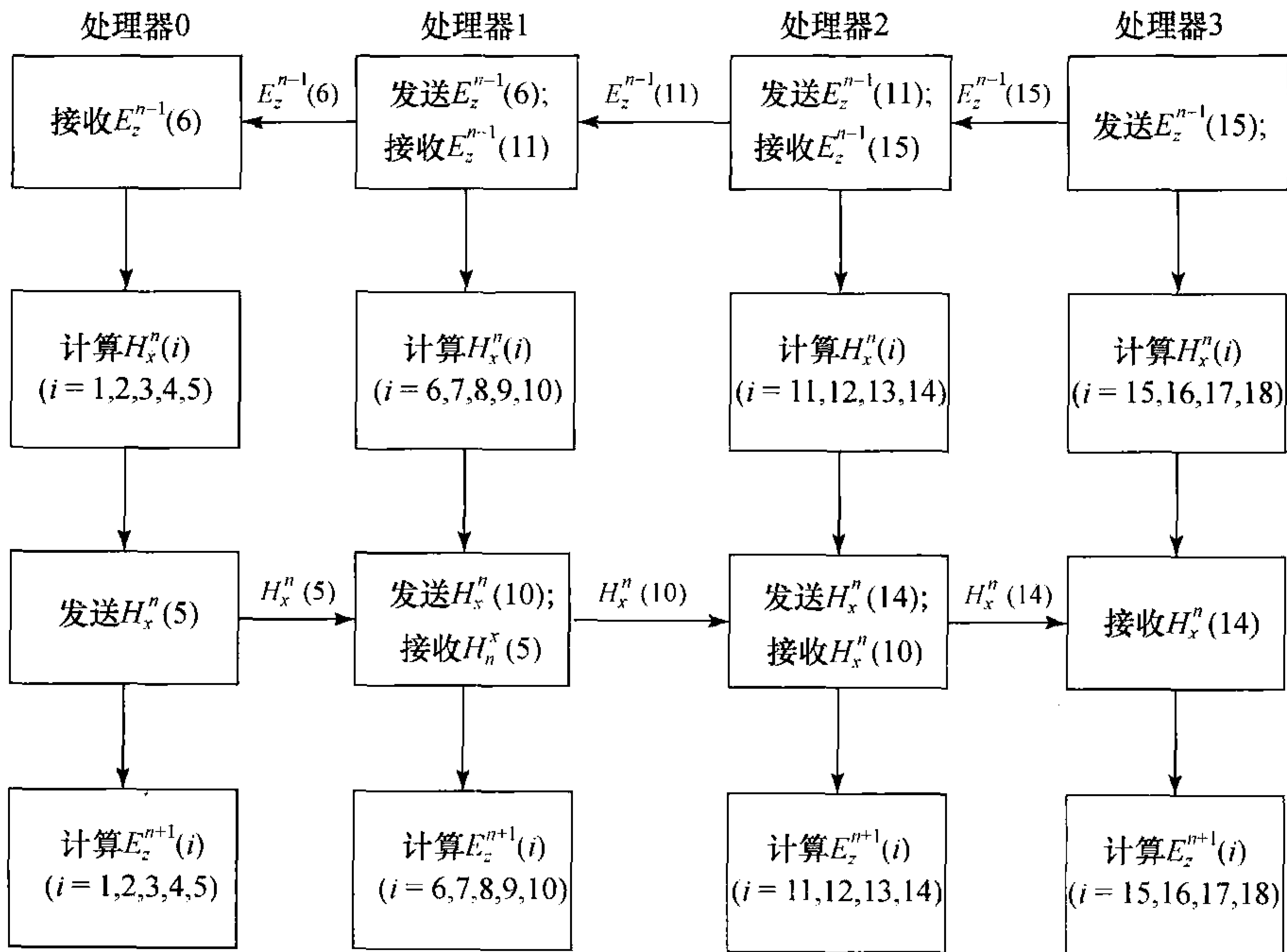


图 7-20 在第 n 时间步执行迭代计算和通信操作的过程

以上步骤将在给定的总的时间步数 N 内循环执行. 最后,还需通过一个全局归约操作,将每个进程的计算结果归并到进程 0 并依次全部输出.

值得注意的是,在截断边界处场分量的计算不能直接进行,需要特殊处理,因此,包含截断边界的进程所执行的计算内容与其他进程有所不同. 若采用单程序多数据流模式,应采用特殊标识,使各个处理器执行相应的计算内容. 此外,在引入波源的进程中,必然也包括特殊的计算内容.

如果并行计算区域是二维的,对其进行一维或二维域分解,所形成的子区域为矩形,边界为多条直线. 对进程边界处的每个场分量都要执行与一维情况类似的通信操作,从而使总的通信量相应地增加. 包含截断边界的进程也必须包括对边界场分量的特殊处理,所需的通信操作和计算任务的标识比一维情况复杂得多. 对于更复杂的问题,还有更多需要特殊处理的因素. 例如,对电磁散射问题,还需赋予包含连接边界的进程新的计算内容,这也必然增加总的通信量.

如果并行计算区域是三维的,对其进行三维划分,所形成子区域为长方体,边界为多个平面. 除了通信操作和计算任务的标识更加复杂外,不存在其他困难.

目前,时域有限差分法的并行算法已应用于很多复杂的三维问题,并取得了良好的效果.

7.10.5　时域有限差分法并行算法的加速比性能分析

评价时域有限差分法并行算法的一个重要性能指标是加速比．对同一个并行计算实例，若用 1 台处理器的执行时间为 T_1，用 p 台处理器的执行时间为 T_p，则其加速比定义为

$$S(p) = T_1/T_p \tag{7.10.1}$$

这里将以一些实例中获得的加速比曲线加以说明．

假设一个一维时域有限差分法的并行计算区域被放置在真空或空气中，长度为 2 900 001Δs（Δs 为沿 y 轴的空间步长）．取电磁波的波长 $\lambda=0.032\,\text{m}$，离散后的相对波长（称为数字化波长）$\lambda_d=\lambda/\Delta s=32$．截断边界为 $j_{\min}=-1\ 450\ 000$ 和 $j_{\max}=1\ 450\ 000$．平面波源位于 $j_s=-1\ 449\ 991$ 处，电场和磁场分量分别为 E_z 和 H_x，时间步数为 10．这时，由平面波源振动所产生的电磁波仍处在稳态的建立过程中．分别在 $p(p=2,3,4,\cdots,64)$ 台处理器上运行一维时域有限差分法的并行程序，并调用消息传递接口系统提供的墙上时间函数 MPI-WTIME 以获取执行并行部分所需的时间 T_p，再求出与处理器数目 p 所对应的加速比 $S(p)$．加速比曲线如图 7-21 所示．由此看出，一维时域有限差分法的并行算法具有较好的加速比性能．

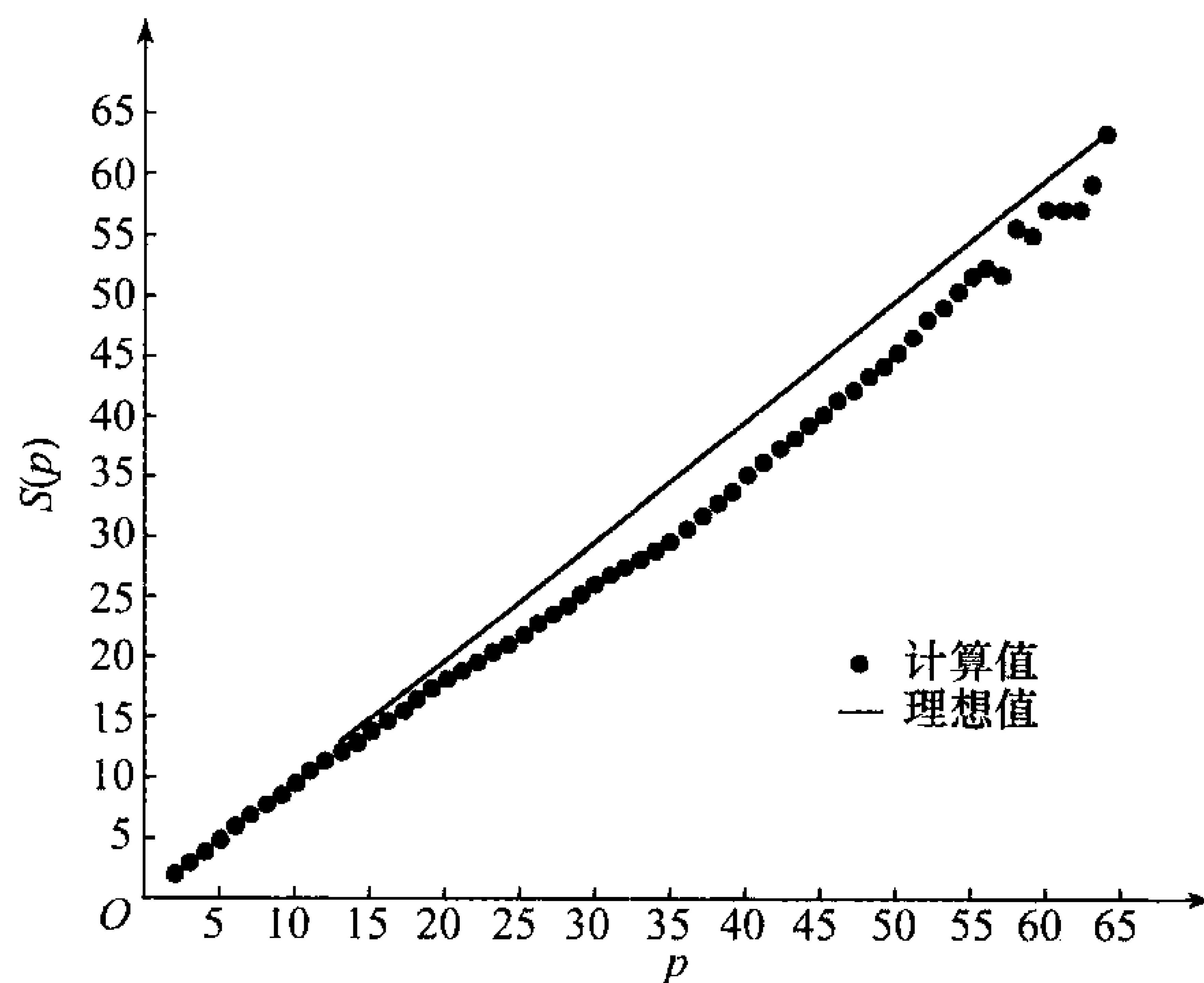


图 7-21　一维时域有限差分法并行算法的加速比曲线

$(p=2,3,\cdots,64)$

假设一个二维时域有限差分法的并行计算区域被放置在真空或空气中，尺寸为 1 500 001$\Delta s\times 21\Delta s=31\ 500\ 021(\Delta s)^2$（$\Delta s$ 为均匀空间步长）．对计算区域采用一维域分解，取 $\lambda=0.032\,\text{m}$，$\lambda_d=\lambda/\Delta s=32$．截断边界为 $i_{\min}=-750\ 000$，

$i_{max}=750\ 000$，$j_{min}=-10$ 和 $j_{max}=10$. 点波源位于点$(i_s,j_s)=(0,0)$处，TM 波的电场分量为 E_z，磁场分量为 H_x 和 H_y，时间步数为 10. 分别在 $p(p=2,3,4,\cdots,20)$台处理器上运行二维时域有限差分法的并行程序，并按照与一维实例类似的方法求出处理器数目 p 所对应的加速比 $S(p)$. 加速比曲线如图 7-22 所示. 由此看出，二者符合得很好，说明二维时域有限差分法的并行算法具有很好的加速比性能.

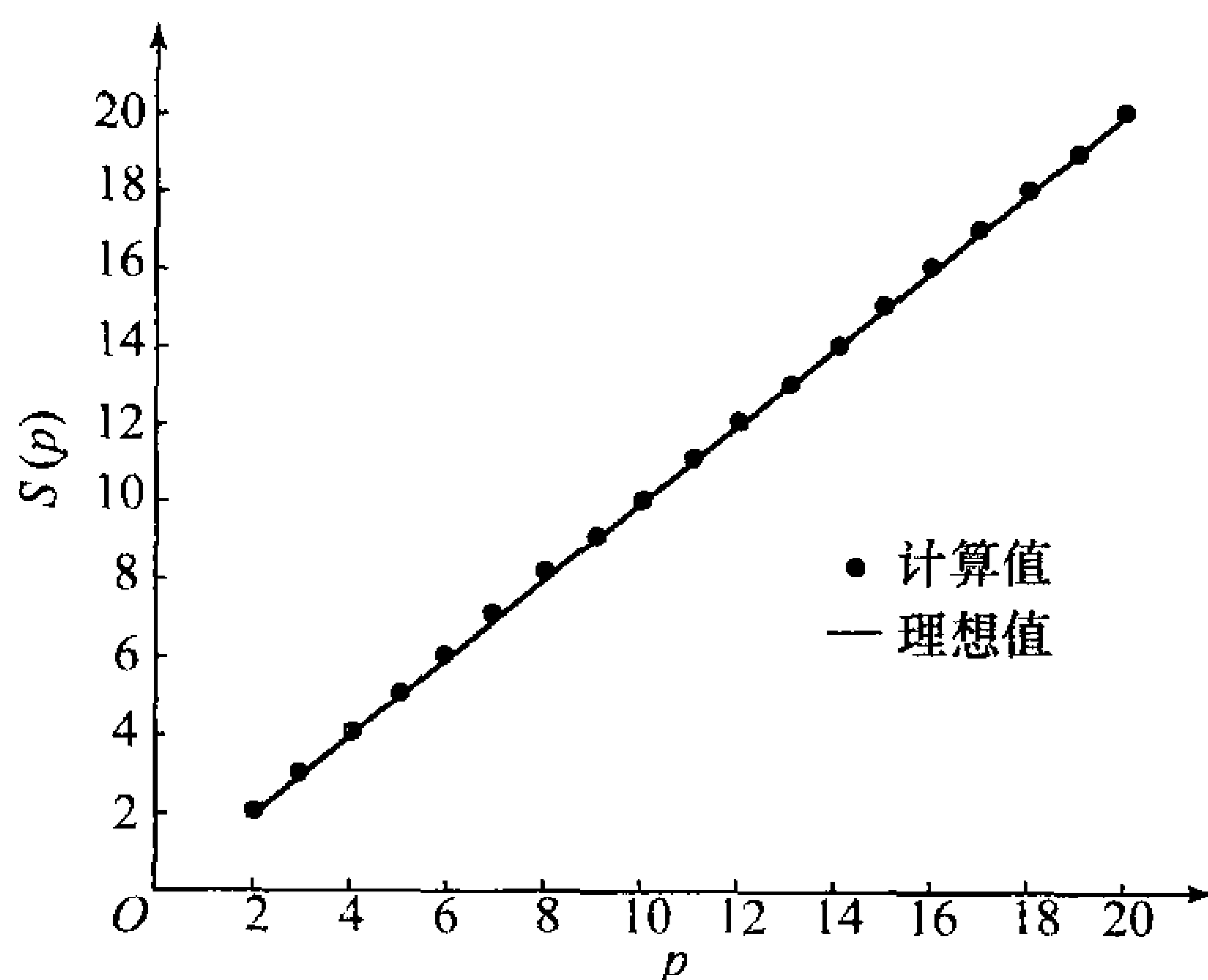


图 7-22　二维时域有限差分法并行算法的加速比曲线

$(p=2,3,\cdots,20)$

设有一个放在介质基底上的宽为 2×10^{-7} m、厚为 1×10^{-7} m 的印制板偶极天线，我们在一个并行机群上使用一维域分解的时域有限差分法的并行算法，从而得到天线长度不同时的输入阻抗，并用四种方法展示了该算法的加速性能，如图 7-23 所示：

(1) 图 7-23(a)表明，计算量相同的问题的计算时间随着处理器数目的增加而减少.

(2) 图 7-23(b)给出按式(7.10.1)计算的加速比. 由图(b)中可以清楚地看到，随着处理器数目的增加，加速比越来越偏离理想的数据，这是因为在一维域分解的情况下，随着处理器数目的增加，虽然每次迭代计算时处理器之间的通信量不变，但每台处理器的计算区域却变小了，即每台处理器需要花费相对更多的时间和相邻处理器进行通信，从而导致加速比下降.

(3) 图 7-23(c)给出的也是按同样公式计算的加速比，但两组数据对应着计算量不同的问题，其中加速比较大(或较小)的对应计算量较大(或较小)的问题. 由图(c)中可以清楚地看到，问题的尺寸越大，越容易在更多的处理器上得到接近于理想加速比的计算结果，这是因为本问题中的域分解是沿偶极天线长度增加的方向进行的. 采用相同数目的处理器参与运算时，天线越长，问题的尺寸越

大,每台处理器的计算量越大,但和天线较短的问题具有相同的通信量.也就是说,问题尺寸的增大导致每台处理器的绝对计算开销增加而绝对通信开销不变,从而使得相对通信开销减小.由此可见,对于尺寸的较大问题,执行一维域分解的时域有限差分法的并行算法可以获得较高的加速比.

(4) 图 7-23(d)给出了采用以下定义的扩展加速比

$$S(p)=pT_1/T_p. \qquad (7.10.2)$$

其中 T_1 表示在 1 台处理器上计算一段长度为 Δs 的偶极天线的输入阻抗所需的时间,T_p 表示在 $p(p>1)$ 台处理器上计算长度为 $p\Delta s$ 的偶极天线的输入阻抗时每台处理器计算其中长度为 Δs 的一段所需的时间.由图(d)中可以看到扩展加速比是高度线性的,这是因为在这种情况下,随着处理器数目的增加,每台处理器上的计算开销和通信开销始终是相同的.

在一维实例的计算中,由于在处理器上可能有同时执行的其他任务破坏了负载平衡,并引起等待、竞争等额外开销,又由于网络上数据的频繁交换可能引起更大的通信开销,并造成较低的网络速率及网络或交换机的"瓶颈",所以由时域有限差分法并行算法得到的加速比曲线比理想曲线略低.随着处理器数目的增加,计算值与理想值的偏差增大,这是因为处理器之间的通信量也随之增加,引起更大的通信开销,从而延长了执行时间.在二维实例的计算中,由于

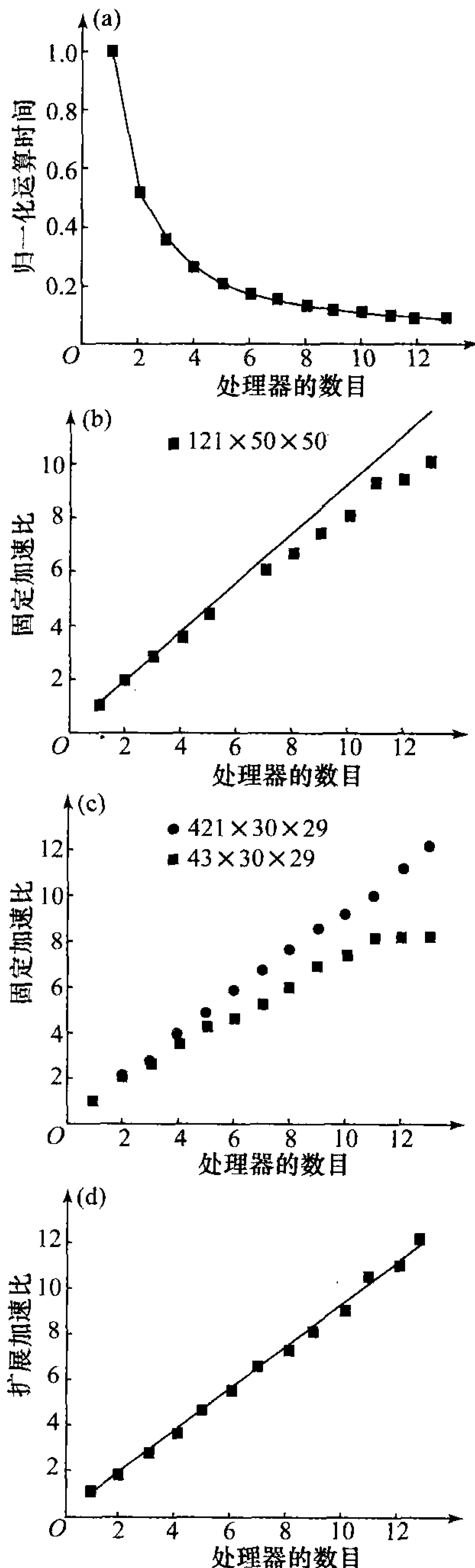


图 7-23　三维时域有限差分法并行算法的四种加速性能曲线

((b)和(c)中给出了不同问题的网络划分的具体情况)

在处理器上没有其他任务同时执行，且当时网络速率较高，所以由时域有限差分法并行算法得到的加速比曲线与理想曲线几乎完全重合. 在个别点上计算值略高于理想值的现象是由定义的固有特性造成的. 根据所用单 CPU 计算机的存储空间，时域有限差分法串行算法(1 台处理器)的最大计算区域约为

$$32\ 000\ 000\Delta s(\text{一维})$$

或

$$4618\Delta s\times 4618\Delta s=21\ 325\ 924(\Delta s)^2(\text{二维}).$$

根据并行机群(64 台节点机)的存储空间，时域有限差分法并行算法的最大计算区域约为

$$20\ 480\ 000\ 004\ 618\Delta s(\text{一维})$$

或

$$36\ 950\Delta s\times 36\ 950\Delta s=1\ 365\ 302\ 500(\Delta s)^2(\text{二维}).$$

推广到三维情况，串行算法的最大计算区域约为

$$220\Delta s\times 220\Delta s\times 220\Delta s=10\ 648\ 000(\Delta s)^3,$$

并行算法的最大计算区域约为

$$880\Delta s\times 880\Delta s\times 880\Delta s=681\ 472\ 000(\Delta s)^3.$$

需要说明的是，考虑到还有其他一些占用存储空间的因素(如数据缓存单元等)，实际的计算区域应取得略小些.

由此可见，时域有限差分法的并行算法不仅大大提高了时域有限差分法自身的计算能力，而且与传统的串行算法相比，大大节省了计算时间，提高了计算效率，充分显示出并行计算技术的高性能特性，从而更能满足大规模电磁场问题的计算需求.

第八章　时域多分辨分析法

电磁场计算的时域多分辨分析法(Multiresolution Time Domain,MRTD)是一种更一般意义上的时域有限差分法,或者说后者是前者的一种特殊情况.时域多分辨分析法的最突出特点,是它具有自适应性的网格细化功能,可在粗网格的框架内获得细网格中的计算精度,从而可大大节省计算机资源,提高计算效率.时域多分辨分析法利用了小波分析中的多分辨分析原理,把待求场量用正交小波基展开,并用伽辽金法对麦克斯韦方程进行离散.本章将先介绍小波分析的多分辨分析,然后讨论由各种正交小波基构成的计算电磁场的时域多分辨分析法.

§8.1　多分辨分析和小波正交基

8.1.1　函数空间的标准正交基和函数的最佳逼近

大多数的数值计算方法都可以理解为把属于某一个无穷维函数空间的待求函数投影到一个有限维子空间,这一投影则通过该子空间的函数基表示成级数形式.为了对有关内容的叙述方便,需要介绍一些基本的概念.

(1) 设 X 为内积空间,$x,y\in X$,M 和 N 为 X 的两个子空间,则有

若$\langle x,y\rangle=0$,就称 x 与 y 正交,记做 $x\perp y$.

若对 $\forall y\in M$ 都有$\langle x,y\rangle=0$,则称 x 与 M 正交,记做 $x\perp M$.

若对 $\forall x\in M$ 和 $\forall y\in N$ 都有$\langle x,y\rangle=0$,就称 M 与 N 正交,记做 $M\perp N$.

(2) 设 X 为线性空间,M 和 N 是 X 的两个子空间,若对每个 $x\in X$ 均可唯一地表示为

$$x = y + z,\quad y\in M,\quad z\in N,\tag{8.1.1}$$

则称 X 为 M 和 N 的正交和,记为

$$X = M\oplus N.\tag{8.1.2}$$

若 X 为内积空间,$M\subset X$,则称 X 中所有与 M 正交的元素组成的集合为 M 的正交补,并记做 $M^{\perp}$,即

$$M^{\perp} = \{x \mid x\in X,\quad x\perp M\}.\tag{8.1.3}$$

(3) 设 M 为内积空间 X 的线性子空间,$x\in X$,若有 $x_0\in M$,$y\perp M$,使得

$$x = x_0 + y,$$

则称 x_0 为 x 在 M 上的正交投影或正交分解.可以证明,正交投影若存在就一定

是唯一的.

(4) 设 X 为内积空间,$E\subset X$,若 E 中的所有元素间都是两两正交的,就称 E 为一正交集. 若 E 中的每个元素的范数都是 1,就称为标准(规范)正交集. 因此,对所有 $x,y\in E$ 有

$$\langle x,y\rangle=\begin{cases}0, & x\neq y,\\ 1, & x=y.\end{cases} \tag{8.1.4}$$

如果标准正交集是可数的,就可表示成序列

$$\{e_n\}=\{e_1,e_2,\cdots\}.$$

不难证明,任何标准正交序列都是线性无关的. 设标准正交序列$\{e_n\}=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$的所有可能的线性组合之集合为 M,则 M 称为序列$\{e_n\}$的张成,并记做

$$M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}. \tag{8.1.5}$$

这时空间 M 中的任一元素 x 都可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{m}\langle x,e_i\rangle e_i, \tag{8.1.6}$$

且称序列$\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$为 M 的标准正交基.

(5) 设序列$\{e_n\}$为内积空间 X 中的一个标准正交序列,如果 X 中不存在与所有$\{e_n\}$都正交的非零元素,就称$\{e_n\}$为 X 的一个完全标准正交基,并简称为标准正交基.

可以证明,若$\{e_n\}$为希尔伯特空间 H 中的(完全)标准正交基,$x\in H$,则有

$$\| x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2, \tag{8.1.7}$$

该式称为帕塞瓦尔(Parseval)等式,并且有

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i, \tag{8.1.8}$$

它是一种广义的傅里叶级数. 若 M 为标准正交基$\{e_n\}$中的 m 个矢量构成的新序列的张成,即 $M=\mathrm{span}\{e_{1'},e_{2'},\cdots,e_{m'}\}$,则对任意 $x\in H$,级数

$$x_0=\sum_{i=1'}^{m'}\langle x,e_i\rangle e_i \tag{8.1.9}$$

是 x 在 M 上的正交投影,而且可以证明 x_0 就是 x 在 M 中的最佳逼近.

由以上理论可以看出标准正交基在函数表示和逼近中的重要意义. 然而,以往所知的函数空间的标准正交基都存在一定的缺点,而下面讨论的小波正交基具有不一般的独特性质.

8.1.2 小波函数和离散小波变换

傅里叶变换虽然获得了广泛的应用,但对某些应用还是有严重的不足,主要

是不能用它对信号进行时间和频率的局域性分析.从傅里叶变换的定义可以看出,若要应用傅里叶变换研究信号的频谱特性,必须知道在整个时域($-\infty<t<\infty$)中信号的全部信息,由于$|e^{\pm i\omega t}|=1$,即傅里叶变换的积分核在任何情况下其模值均为1,故信号$f(t)$的频谱$\hat{f}(\omega)$上任一频点值是由$f(t)$在整个时间域上的贡献决定的;反之,信号$f(t)$在某一时刻的状态也是由频谱$\hat{f}(\omega)$在整个频域($-\infty<\omega<\infty$)上的贡献决定的,也就是说,在时域和频域傅里叶变换没有任何分辨能力.

为了克服傅里叶变换的上述缺点,人们发展了一种窗口傅里叶变换,即在普通傅里叶变换中增加了一个窗口函数$g(t-\tau)$,它不仅在时间上具有局域性并且能够平移.这种变换比原来的傅里叶变换在局域分析方面有了改进,但由于时-频窗口是固定的,仍然不能满足要求.

为了克服以上缺点,摩尔莱特(Marlet)等于1984年提出了具有伸缩和平移功能的小波变换.在这种变换中选择一个平方可积函数$\psi(t)\in L^2(R)$,称之为基本小波或小波母函数,再令

$$\psi_{a,b}(t)=|a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),\quad a,b\in R,\quad a\neq 0,\tag{8.1.10}$$

称$\psi_{a,b}(t)$为由小波母函数$\psi(t)$生成的依赖于参数a和b的连续小波.以连续小波$\psi_{a,b}(t)$为积分核构成的变换称为连续小波变换.

显然,在小波变换中$\psi_{a,b}(t)$的作用与$g(t-\tau)e^{i\omega t}$在窗口傅里叶变换中的作用类似,其中b与τ都是起着时间平移的作用,本质差别是a与ω所起作用的不同.在窗口傅里叶变换中,ω的变化只改变窗口包络内谐波的频率成分,而与窗口的大小和形状无关.在连续小波变换中a是一个尺度参数,它的作用是既改变窗口的大小和形状,也改变小波的频谱结构.由$\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$可知,随着a的减小,$\psi_{a,b}(t)$的支撑集变窄,但频谱$\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$却向高频端展宽;反之,当a增大时,$\psi_{a,b}(t)$的支撑集将变宽,而$\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$却向低频部分集中.这种特性正是复杂信号分析中时-频窗口的自适应性.

一般讲,小波母函数的选择不是唯一的,但也不是任意的.为了满足对小波变换所提出的要求,$\psi(t)$需要满足一定的条件.首先,$\psi(t)$应具有紧支撑集或至少具有速降特性,这一点可用它所具有的消失矩的阶数来衡量.消失矩的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^k\psi(t)\,dt=0,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1,\tag{8.1.11}$$

其中n为消失矩的阶数.n数越大,表示函数$\psi(t)$的速降性越好.

另外,还要求$\psi(t)$的平均值为零,即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,dt=0,\tag{8.1.12}$$

它也称做小波的容许条件，这一条件也表示为

$$C_{\varphi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{8.1.13}$$

这意味着 $\hat{\psi}(\omega)$连续可积，且 $\hat{\psi}(0)=0$. 这又意味着

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0,$$

这正是条件(8.1.12). 以上要求说明小波母函数 $\psi(t)$的取值必须有正有负，即具有振荡性，而且是很快衰减的振荡，这也正是称它为小波的原因.

为了适应实际计算的需要，应对 a 和 b 进行离散化处理. 如令 $a=a_0^{-m}$，$b=nb_0a_0^{-m}$，其中 $a_0>1$，$b_0>0$，$m,n\in Z$，则有离散后的小波

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{\frac{m}{2}} \psi(a_0^m t - nb_0). \tag{8.1.14}$$

若选 $a_0=2$，$b_0=1$，就得到二进制的离散小波

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n), \quad m,n \in Z. \tag{8.1.15}$$

从对希尔伯特空间中标准正交基对函数展开所起的作用可以想到，如果能使上述小波成为 $L^2(R)$的标准正交基，它将会成为一种非常重要的数学工具，会比一般的标准正交基有更大的应用价值. 要使式(8.1.15)表示的离散小波成为 $L^2(R)$的标准正交基，必须有

$$\langle \psi_{m,n}, \psi_{m',n'} \rangle = \delta_{m,m'} \cdot \delta_{n,n'}, \quad m,n,m',n' \in Z, \tag{8.1.16}$$

一旦这一条件得到满足，则对每个函数 $f(t)\in L^2(R)$都可表示为级数

$$f(t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{m,n}\psi_{m,n}(t), \tag{8.1.17}$$

其中

$$C_{m,n} = \int_{-}^{\infty} f(t)\psi_{m,n}^*(t) dt, \quad m,n \in Z, \tag{8.1.18}$$

而级数将按下列形式收敛

$$\lim_{M_1,N_1,M_2,N_2\to\infty} \| f(t) - \sum_{m=-M_1}^{N_1} \sum_{n=-M_2}^{N_2} C_{m,n}\psi_{m,n}(t) \| = 0,$$

式(8.1.18)称为离散小波变换.

剩下的关键问题，是如何建立满足以上要求的标准正交小波基.

8.1.3 正交多分辨分析和小波正交基

小波正交基的发现和构建经历了一个曲折的发展过程，后来用多分辨分析(Multi-Resolution Analysis，简称 MRA)统一了起来. 由于篇幅的限制，下面不拟讨论如何利用多分辨分析构造小波正交基，而是着重讨论如何利用多分辨分析对函数进行逐级逼近和分析.

正交多分辨分析由 $L^2(R)$ 的一组闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 和正交尺度函数 φ 构成，它们必须满足以下条件

(1) 单调性：$V_j \subset V_{j+1}$；

(2) 平移不变性：若 $u(x)\in V_j \Leftrightarrow u(x-k)\in V_j, k\in Z$；

(3) 伸缩相关性：若 $u(x)\in V_j \Leftrightarrow u(2x)\in V_{j+1}$；

(4) 逼近性：$\bigcap_{j\in Z} V_j=\{0\}, \overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$；

(5) 存在尺度函数 $\varphi(x)\in V_0$，且 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 为 V_0 的标准正交基.

由(1)和(4)可知，在多分辨分析中，$L^2(R)$ 是一个包着一个的一系列闭子空间的极限，而最小的闭子空间为 $\{0\}$，即

$$\{0\}\subset \underset{j\to-\infty}{\cdots} \subset V_{j-1}\subset V_j\subset V_{j+1}\subset \underset{j\to\infty}{\cdots}\subset L^2(R).$$

由(3)可知，任何两相邻子空间之间相差一个二进分辨率. 这样一来，只要知道了任一个子空间中的标准正交基，就可以通过分辨率的二进伸缩，立即得到相邻子空间中的标准正交基，因而也就得到所有子空间中的标准正交基. 进一步由(5)可推知，由于已知 $\{\varphi(x-k)_{k\in Z}\}$ 为 V_0 的标准正交基，则显然

$$\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2x-k)\}_{k\in Z}$$

为 V_1 的标准正交基，更一般地讲，$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k)\}_{j,k\in Z}$ 为空间 V_j 的标准正交基，也就是说

$$V_j=\text{span}\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k)\}_{j,k\in Z}, \tag{8.1.19}$$

即多分辨分析中的子空间是尺度函数通过平移和伸缩产生的标准正交基的张成. 所以 V_j 也称为尺度空间，j 称为尺度因子.

虽然每一个尺度空间 V_j 都已经有了各自的标准正交基，但因为 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 不是 $L^2(R)$ 的正交分解，我们不能指望把各子空间的正交基简单地加在一起就成为 $L^2(R)$ 的正交基. 但是，我们可以从所给条件出发来构造 $L^2(R)$ 的正交分解子空间序列.

因为 V_j 是 $L^2(R)$ 的闭子空间，而 $L^2(R)$ 是一个希尔伯特空间，从而可以定义投影算子 $P_j: L^2(R)\to V_j$，亦即

$$V_j=P_jL^2(R),\quad j\in Z. \tag{8.1.20}$$

由于有 $V_j\subset V_{j+1}$，则 $P_{j+1}-P_j$ 也是 $L^2(R)$ 上的投影算子. 若用 W_j 标记该算子的值域，则有

$$W_j=(P_{j+1}-P_j)L^2(R),\quad j\in Z, \tag{8.1.21}$$

且 W_j 是 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补，可记做

$$V_{j+1}=W_j\oplus V_j,\quad j\in Z. \tag{8.1.22}$$

W_j 是 $L^2(R)$ 的闭子空间，它具有以下重要性质

(1) $\{W_j\}_{j\in Z}$ 两两正交；

(2) W_j 是 $L^2(R)$ 的正交分解，即

$$L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j; \tag{8.1.23}$$

(3) 若 $u(x) \in W_j \Leftrightarrow u(2x) \in W_{j+1}$.

所以，当有了任一子空间 W_j 的正交基后，就可得到所有子空间的正交基，从而也就获得了 $L^2(R)$ 的正交基.

由于 $\varphi(t) \in V_0 \subset V_1$，而 $\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2x-k)\}_{k\in Z}$ 是 V_1 的标准正交基，则下式

$$\varphi(x) = \sum_{k\in Z} C_k \varphi(2x-k), \tag{8.1.24}$$

称为二尺度方程. 由多分辨分析理论可知，根据 $\varphi(x)$ 的性质和二尺度方程可以求得小波母函数 $\psi(x)$，由它生成的序列

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in Z, \tag{8.1.25}$$

是子空间 W_j 的标准正交基，即

$$W_j = \mathrm{span}\{\psi_{j,k}\}_{k\in Z}. \tag{8.1.26}$$

由于 $\{W_j\}_{j\in Z}$ 是 $L^2(R)$ 的正交分解，故序列(8.1.25)是 $L^2(R)$ 的标准正交基. 一般称(8.1.25)为 $L^2(R)$ 的小波正交基，W_j 为小波空间.

从需要的角度看，小波母函数 $\psi(x)$ 最好是具有较好的局域性和光滑性. 由于 $\psi(x)$ 是通过尺度函数 $\varphi(x)$ 构造出来的，故在很大程度上取决于 $\varphi(x)$ 的局域性和光滑性，通常 $\varphi(x)$ 为一个低通平滑函数.

由以上分析可知，一旦符合要求的尺度函数和小波母函数被构造出来，通过尺度函数 $\varphi(x)$ 的平移和伸缩获得序列 $\{\varphi_{j,k}(x)\} = \{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k)\}_{j,k\in Z}$ 成为尺度空间 V_j 的标准正交基；同样地，通过小波母函数的平移和伸缩而获得序列 $\{\varphi_{j,k}(x)\} = \{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\}_{j,k\in Z}$ 成为小波空间 W_j 的标准正交基，且其全体就构成希尔伯特空间 $L^2(R)$ 的标准正交基.

8.1.4　多分辨分析中函数的分解与逼近

由前面对多分辨分析的介绍可知，$L^2(R)$ 被分解为一系列尺度空间和小波空间，而且在相邻子空间之间有二进分辨率的差别. 这就意味着一个函数在不同子空间中的投影，可以表示为不同分辨率的基函数展开.

设 $f(x) \in L^2(R)$，根据投影定义 $P_j L^2(R) = V_j$，可知 $P_j f(x)$ 为 V_j 中的函数. 若记做 $f_j(x)$，则有

$$P_j f(x) = f_j(x) \in V_j. \tag{8.1.27}$$

若定义 D_j 为 $L^2(R)$ 到 W_j 的投影，即 $W_j = D_j L^2(R)$，则 $D_j f(x)$ 为 W_j 中的函数. 若记做 $g_j(x)$，则有

$$D_j f(x) = g_j(x) \in W_j. \tag{8.1.28}$$

根据尺度空间与小波空间之间的关系

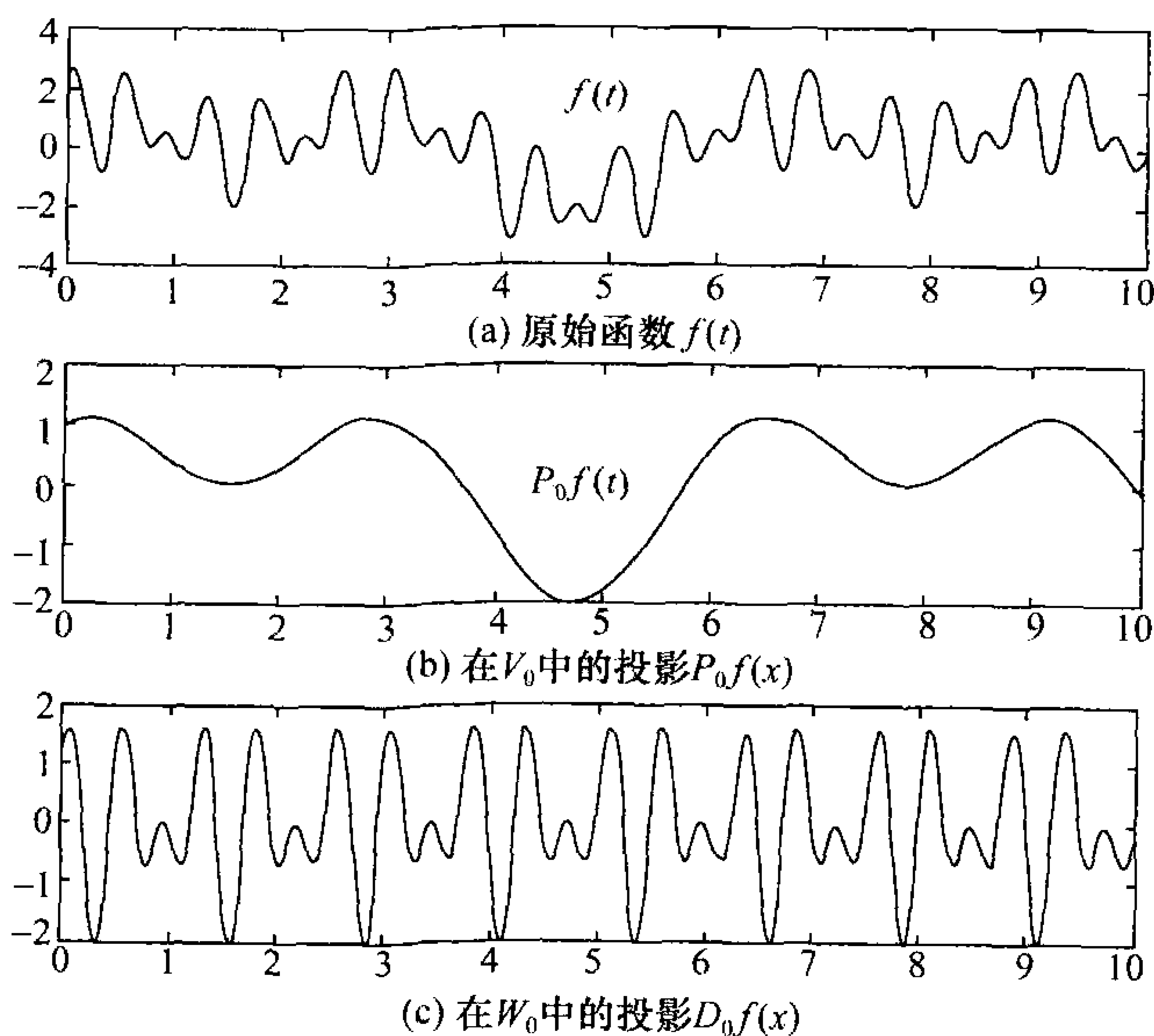
$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

可知

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + g_j(x), \tag{8.1.29}$$

而且 $f_j(x)$和 $g_j(x)$相互正交.

对式(8.1.29),可以解释为 $g_j(x)$是 $f_{j+1}(x)$与 $f_j(x)$之差,而 $f_{j+1}(x)$和 $f_j(x)$为 $f(x)$在两个不同分辨空间中的投影,$g_j(x)$是这两个投影之差. 由于尺度函数的低通特性,在 V_j 上的投影主要是函数的轮廓概貌,或称平滑逼近,而小波空间中的投影为其细节信息. 如果把 $f_{j+1}(x)$看做是原始函数,$f_j(x)$看做它的一个投影,则 $g_j(x)$就是投影与原函数之间差异的精细部分. 这种情况有如图8-1所给出的示意.



(a) 原始函数$f(t)$

(b) 在V_0中的投影$P_0f(x)$

(c) 在W_0中的投影$D_0f(x)$

图 8-1　函数的分解波形

如果把过程(8.1.29)继续下去,就可得

$$f_{j+1}(x)=g_j(x)+g_{j-1}(x)+g_{j-2}(x)+\cdots+g_k(x)+f_k(x), \tag{8.1.30}$$

这是函数的一种多级正交分解. $f_k(x)$是 $f_{j+1}(x)$的概貌;$g_k(x)(k=j,j-1,\cdots)$是各级精微差异,随着 k 的降低,被舍去的误差越来越精微,即对函数的逼近越来越精确. 从另外一个角度看,也就是对函数分析得越来越精细,即是一种多分辨率分析.

根据尺度空间和小波空间中标准正交基的特点,显然可以有如下表示

$$P_jf(x) = f_j(x) = \sum_{k\in Z}\langle f(x),\varphi_{j,k}(x)\rangle\varphi_{j,k}(x), \tag{8.1.31}$$

$$D_j f(x) = g_j(x) = \sum_{k\in Z} \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle \psi_{j,k}(x), \tag{8.1.32}$$

而$\langle f(x), \varphi_{j,k}(x)\rangle$和$\langle f(x), \psi_{j,k}(x)\rangle$分别就是离散尺度函数变换和离散小波函数变换.这样就把函数的多分辨分析与小波变换联系了起来.

§8.2　常用的小波正交基

通过各种途径已经构造出了相当数量的小波正交基,基于它们所具有的不同特性,在各种不同领域已有了成功的应用.下面将简要描述在电磁场的时域多分辨分析中成功应用的几种小波正交基,以其为讨论基于不同正交小波基的时域多分辨分析方法的基础.

8.2.1　正交小波基的性能描述

在描述个别正交小波基的特性之前,我们先就反映其性能的指标或参量加以说明.

1. 正交性

正交性是正交小波基最基本的特性.在一个多分辨分析结构中,若已构造了小波正交基,则除了小波的正交性外,还包括尺度函数以及尺度函数与小波函数之间的正交关系.

在讨论正交多分辨分析时已经说明,若尺度函数为$\varphi(x)$,由它构造出的小波母函数为$\psi(x)$,则由它们经平移和伸缩生成的离散尺度函数和小波

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), \quad j,k \in Z, \\ \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in Z, \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

具有以下的正交性

$$\langle \varphi_{j,k}(x), \varphi_{j,k'}(x) \rangle = \delta_{kk'}, \quad j,k,k' \in Z', \tag{8.2.2}$$

$$\langle \psi_{j,k}(x), \psi_{j',k'}(x) \rangle = \delta_{jj'}\delta_{kk'}, \quad j,j',k,k' \in Z, \tag{8.2.3}$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

此外,由于有下列空间分解关系

$$V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots \oplus W_{j-k} \oplus V_{j-k},$$

则有

$$\begin{gathered} \langle \psi_{j,k}(x), \varphi_{i,k'}(x) \rangle = 0, \\ j \geqslant i, \quad j,i,k,k' \in Z. \end{gathered} \tag{8.2.4}$$

除了上面定义的正交小波,还可以定义其他形式的小波,其正交性质会有所

不同.

2. 支撑集的紧性

若函数 $f(x)$ 的定义域为 Ω,则在 Ω 中使 $f(x)\neq 0$ 的那些点的全体所构成的集合的闭包称为 $f(x)$ 的支撑集或支集,若该集合是紧集,称 $f(x)$ 具有紧支撑集.

我们希望尺度函数和小波母函数具有良好的局域性,其支撑集的紧性和长度直接反映了它们所具有的局域性.有的小波具有理想的紧支撑集,有的支撑集却会扩展到整个实轴,表现出明显的差异.对不具备紧支集的小波在应用中需要截断,因而会引入误差.所以,要根据需要选择合适的小波.不存在时域和频域同时具有紧支撑集的小波基,人们一般更希望在时域具有紧支撑集,故通常讨论在时域支撑集的紧性.

3. 消失矩和衰减性

函数 $\psi(x)$ 若满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x)\mathrm{d}x = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots,m-1, \tag{8.2.5}$$

就说它具有 m 阶消失矩.小波函数消失矩的阶数是其特性的一个重要指标,它与小波的支撑集的长度和衰减的速度直接相关.理论证明,若

$$|\psi| \leqslant C(1+|x|)^{-m-1-\epsilon}, \psi(x) \in C^m(R),$$

且当 $l\leqslant m$ 时,$\psi^{(l)}(x)$ 有界,则 $\psi(x)$ 有直至 m 阶的消失矩,其中 C 为常数.

在实际应用中,小波矩也不一定完全消失,只要相对而言非常小就可以了.此外,多少阶消失矩为最佳,和实际问题的要求有关.

4. 连续性和可微性

一个理想的小波函数应具有良好的连续性和尽量高阶的可微性.但是,实际的小波函数往往存在某种缺陷,尤其是难以保证各种性能均优良,这就要求根据实际需要加以选择.

5. 对称性

若函数 $\varphi(x)\in L^2(R)$,当 $\varphi(a+x)=\varphi(a-x)$ 时,称 $\varphi(x)$ 相对于 a 是对称的;当 $\varphi(a+x)=-\varphi(a-x)$ 时,就称 $\varphi(x)$ 相对于 a 是反对称的.对称性是尺度函数和小波函数的重要性质之一,它会给应用带来很多方便.

8.2.2 Haar 小波正交基

Haar 小波是最早提出并得到应用的小波,它在多分辨分析理论建立之前就已经出现,但也可以通过多分辨分析构造出来.构造 Haar 小波的尺度函数为

$$\varphi(x) = h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{8.2.6}$$

它是特征函数 $\chi_{[0,1)}(x)$,小波母函数 $\psi(x)$ 为

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{8.2.7}$$

其波形如图 8-2 所示.

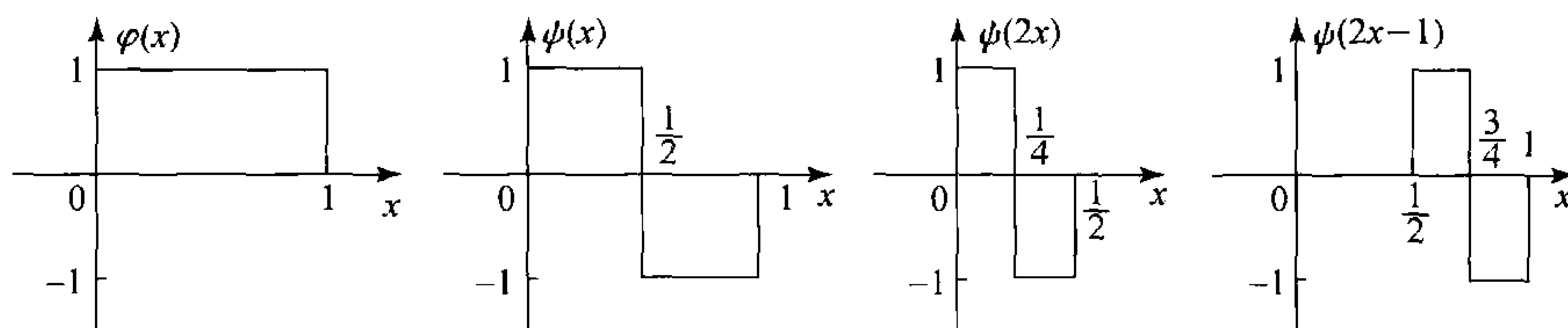


图 8-2 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$的波形

由 $\psi(x)$生成的离散小波为

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \\ &= \begin{cases} 2^{j/2}, & \dfrac{k}{2^j} \leqslant x < \dfrac{2k+1}{2^{j+1}}, \\ -2^{j/2}, & \dfrac{2k+1}{2^{j+1}} \leqslant x < \dfrac{k+1}{2^j}, \quad j,k \in Z, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.2.8}$$

它构成 $L^2(R)$的一个标准正交基,其波形如图 8-3 所示.

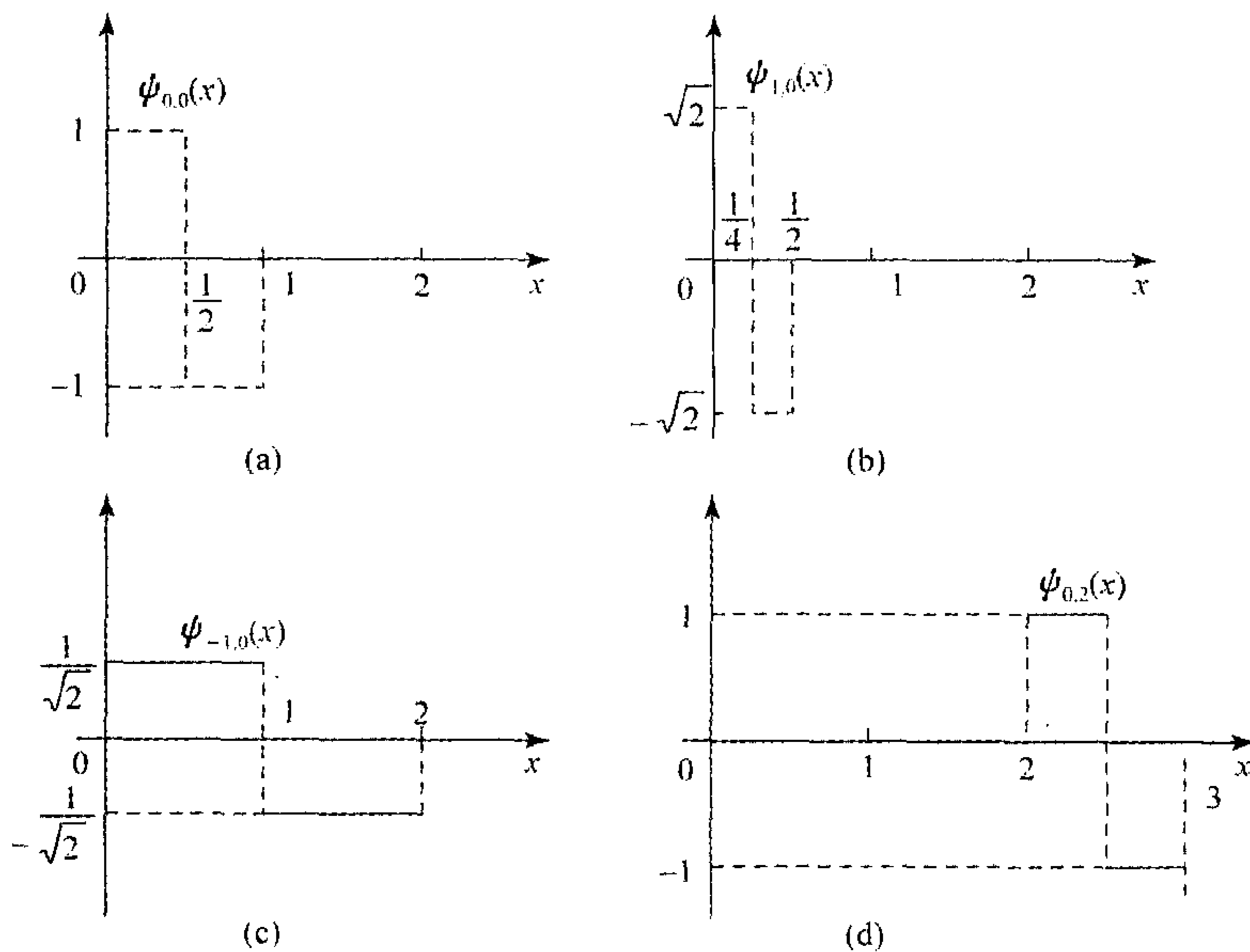


图 8-3 $\psi_{j,k}(x)$的波形

不难看出，Haar 小波在时域上是不连续的，但具有对称性，$\psi(x)$ 的支撑集为$[0,1]$，显然是紧的. 它的最大优点是计算简单.

8.2.3 Battle-Lemarie 小波正交基

Battle-Lemarie 小波基是从 B-样条函数出发，利用多分辨分析构造出来的正交小波基. 样条函数(Spline Function)是一类分段光滑且在各段交接处具有一定光滑性的函数. 在小波分析中用得最多的是基数 B-样条(Cardinal B-Spline)函数，因为它具有最小可能的支撑集长度.

m 阶 B 样条是 Haar 尺度函数与其自身 m 次卷积运算所得的函数，记做 $N_m(x)$. 其前三阶的形式为

$$N_1(x)=\chi_{[0,1)}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases} \tag{8.2.9}$$

$$\begin{aligned}N_2(x)&=N_1(x)*N_1(x)=\int_0^1 N_1(\tau)N_1(x-\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\end{aligned} \tag{8.2.10}$$

$$\begin{aligned}N_3(x)&=N_2(x)*N_1(x)=xN_1(x)-(2-x)N_2(x)\\ &=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{3}{4}-(x-\frac{3}{2})^2, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{1}{2}(x-3)^2, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned} \tag{8.2.11}$$

$N_1(x)$，$N_2(x)$和 $N_3(x)$分别称为一次，二次和三次 B 样条函数. 显然，由 $N_1(x)$构造的小波正交基就是 Haar 小波基. 由 $N_2(x)$不能直接构成正交多分辨分析，需要通过正交化方法而构造所需的尺度函数，该函数可表示为

$$\varphi(x)=\sqrt{3}\sum_k C_n\varphi(x-k), \tag{8.2.12}$$

其中 C_n 为$(1+2\cos^2\frac{\xi}{2})^{-1/2}$的傅里叶系数. 而小波母函数则可表示为

$$\psi(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_k(d_{k+1}-2d_k+d_{k-1})N_2(2x-k), \tag{8.2.13}$$

其中 d_k 为$\left[(1-\sin^2\frac{\xi}{4})/(1+\cos^2\frac{\xi}{2})(1+\cos^2\frac{\xi}{4})\right]^{1/2}$的傅里叶系数.

由于正交化过程破坏了紧支撑性，$\varphi(x)$不是紧支撑的.

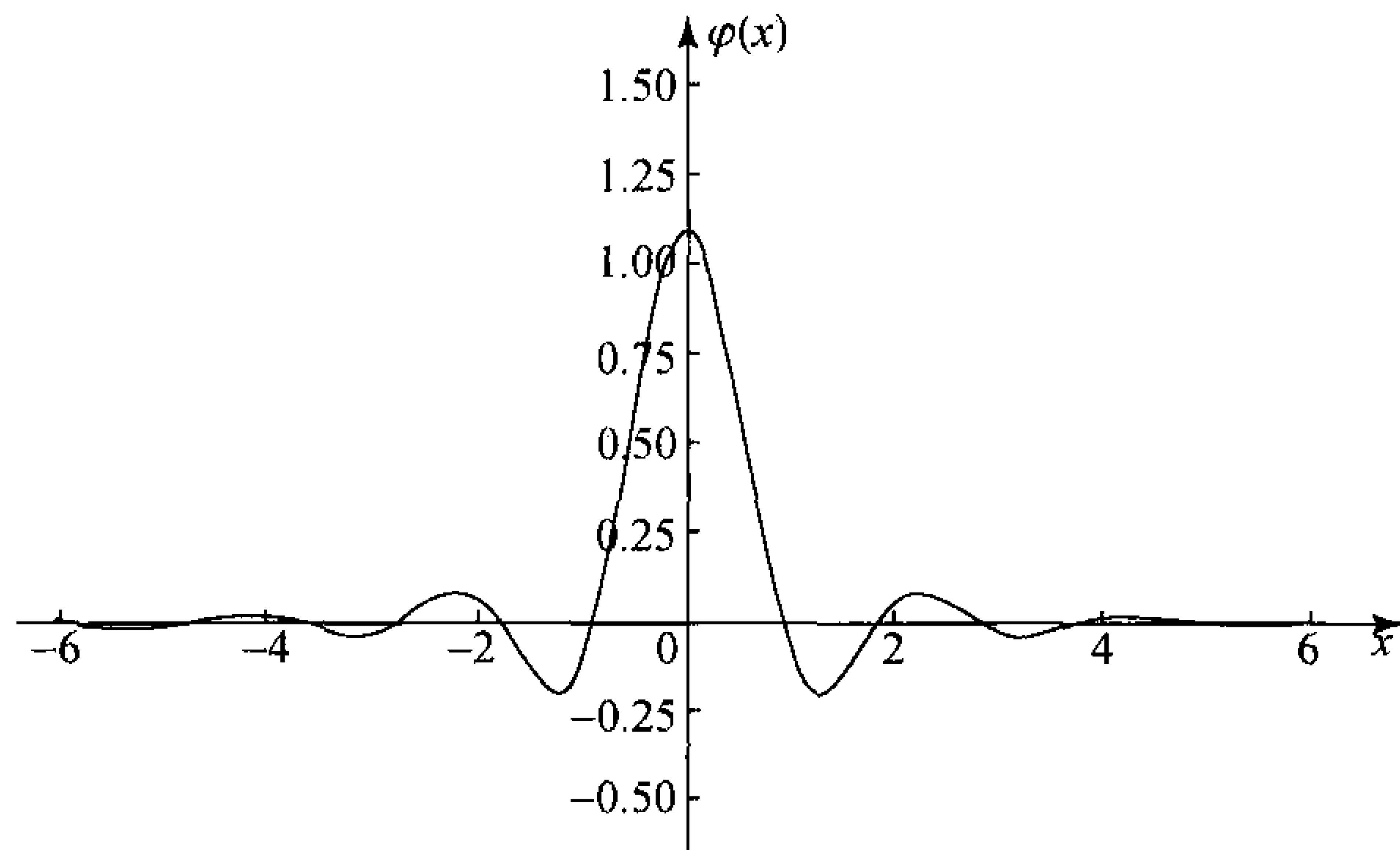
类似地，对于三次样条函数也需要正交化方法构造相应的尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波母函数 $\psi(x)$，由它们所产生的正交小波基称为三次 B-样条 Battle-Lemarie 正交小波基. $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 及其频谱由图 8-4 和图 8-5 给出.

尺度函数和小波母函数有时用其傅里叶变换给出更为方便，Battle-Lemarie 三次样条的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 对应的傅里叶变换分别为

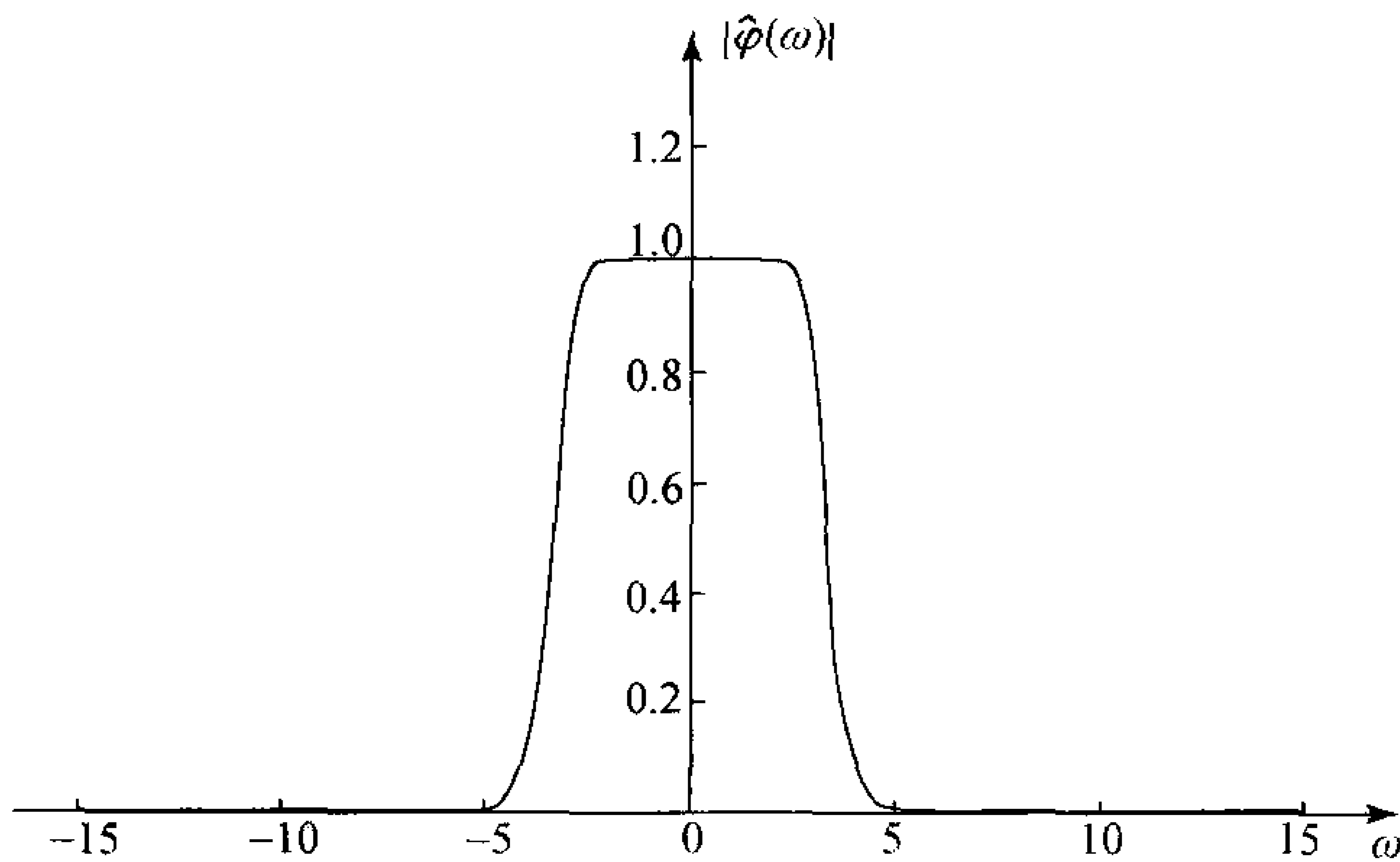
$$\hat{\varphi}(\omega)=\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^4\left[1-\frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{2}{5}\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)-\frac{4}{315}\sin^6\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.2.14}$$

$$\hat{\psi}(\omega)=e^{i\omega/2}\,\frac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}(\omega/2+2\pi)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{8.2.15}$$

如图 8-4(b)和图 8-5(b)所示.



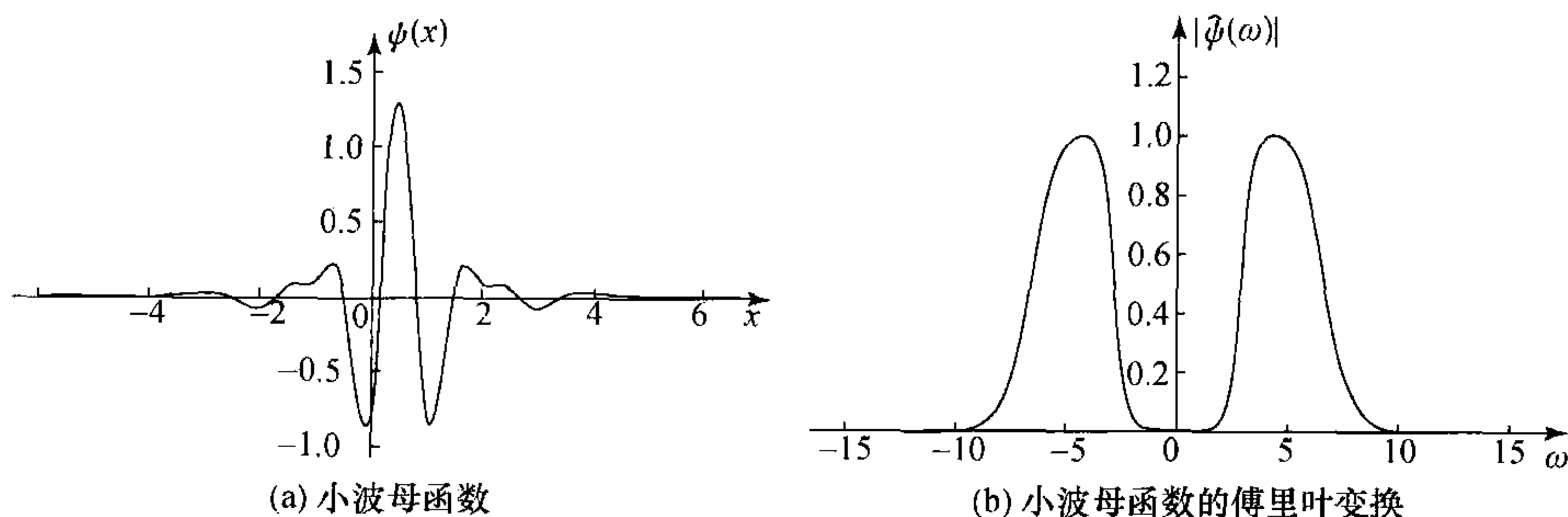
(a) 小波尺度函数



(b) 小波尺度函数的傅里叶变换

图 8-4 三次 B 样条 Battle-Lemarie 小波尺度函数及其傅里叶变换

由图 8-4 和图 8-5 可以看出，$\varphi(x)$ 具有低通的性质，而 $\psi(x)$ 则是一种带通函数.



(a) 小波母函数　　(b) 小波母函数的傅里叶变换

图 8-5　三次样条 Battle-Lemarie 小波母函数及其傅里叶变换的幅度

虽然 B 样条函数具有紧支撑集,但为了正交规一化所采取的措施,使得具有正交性的 Battle-Lemarie 小彼正交基丧失了紧支撑性,使其支撑集扩展到整个实轴. 所幸的是小波函数是指数衰减的.

8.2.4 Daubechies 小波正交基

上面提到的小波正交基中,Haar 小波基具有紧支撑集,而 Battle-Lemarie 小波基则不具备,还有很多小波基也不具有紧支撑集. 由于小波的紧支撑集特性对其应用具有重要意义,因此形成一套构造具有紧支撑集的正交小波基的方法十分必要. 正是在这种情况下,Daubechies 等进一步发展了多分辨分析法,形成了一套构造紧支撑集正交小波基的方法. 遗憾的是,所获得的标准正交小波基不能写成解析形式,但是,它们的图形可以通过一种"级连算法"的程序计算到任意高的精度.

构造紧支撑集的小波的关键是构造出紧支撑集的正交尺度函数 $\varphi(x)$. 按照 Daubechies 的方法,$\varphi(x)$用一个有限项的三角多项式 $m_0(\xi)$来表达它的傅里叶变换

$$\hat{\varphi}(\xi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}\xi),\tag{8.2.16}$$

其中

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2N-1}g_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}.\tag{8.2.17}$$

对应不同的 N,可得不同的 $\varphi_N(x)$和 $\psi_N(x)$. 由此可以看出,φ_N 和 ψ_N 由低通滤波系数序列$\{g_n\}_{n=0}^{2N-1}$完全确定. 可以证明,当 $N=1$ 时,φ_N 和 ψ_N 退化为 Haar 尺度函数和小波母函数. Daubechies 小波基不仅具有 Haar 小波的正交性和紧支撑性,更具有连续性. 但是,除 Haar 小波外,φ_N 和 $\psi_N(N>1)$没有解析表达式,而由系数$\{g_n\}$确定它们的一切.

当 $N=2\sim10$ 时,$\{g_n\}$的值由表 8-1 给出,而相应的一些图形则由图 8-6 给出. 由图 8-6 可以看出,Daubechies 小波不具对称性. 理论已证明,实的正交、紧支撑集的小波,只有 Haar 系是对称的. 此外,ψ_N 的消失矩为 N,而 φ_N 和 ψ_N 的支撑集长度为 $2N-1$.

表 8-1 低通滤波系数 g_n 数值计算表

	n	g_n
$N=2$	0	.482 962 913 144 534 1
	1	.836 516 303 737 807 7
	2	.224 143 868 042 013 4
	3	−.129 409 522 551 260 3
$N=3$	0	.332 670 552 950 082 5
	1	.806 891 509 311 092 4
	2	.459 877 502 118 491 4
	3	−.135 011 020 010 254 6
	4	−.085 441 273 882 026 7
	5	.035 226 291 885 709 5
$N=4$	0	.230 377 813 308 896 4
	1	.714 846 570 552 915 4
	2	.630 880 767 939 858 7
	3	−.027 983 769 416 859 9
	4	−.187 034 811 719 093 1
	5	.030 841 381 835 560 7
	6	.032 883 011 666 885 2
	7	−.010 597 401 785 069 0
$N=5$	0	.160 102 397 974 192 9
	1	.603 829 269 797 189 5
	2	.724 308 528 437 772 6
	3	.138 428 145 901 320 3
	4	−.242 294 887 066 382 3
	5	−.032 244 869 584 638 1
	6	.077 571 493 840 045 9
	7	−.006 241 490 212 798 3
	8	−.012 580 751 999 082 0
	9	.003 335 725 285 473 8
$N=6$	0	.111 540 743 350 109 5
	1	.494 623 890 398 453 3
	2	.751 133 908 021 095 9
	3	.315 250 351 709 198 2
	4	−.226 264 693 965 440 0
	5	−.129 766 867 567 262 5
	6	.097 501 605 587 322 5
	7	.027 522 865 530 305 3
	8	−.031 582 039 317 486 2
	9	.000 553 842 201 161 4
	10	.004 777 257 510 945 5
	11	−.001 077 301 085 308 5
$N=7$	0	.007 852 054 085 003 7
	1	.396 539 319 481 891 2
	2	.729 132 090 846 195 7
	3	.469 782 287 405 188 9
	4	−.143 906 003 928 521 2
	5	−.224 036 184 993 841 2
	6	.071 309 219 266 827 2
	7	.080 612 609 151 077 4
	8	−.038 029 936 935 010 4
	9	−.016 574 541 630 665 5
	10	.012 550 998 556 098 6
	11	.000 429 577 972 921 4
	12	−.001 801 640 704 047 3
	13	.000 353 713 799 974 5
$N=8$	0	.054 415 842 243 107 2
	1	.312 871 590 914 316 6
	2	.675 630 736 297 319 5
	3	.585 354 683 654 215 9
	4	−.015 829 105 256 382 3
	5	−.284 015 542 961 582 4
	6	.000 472 484 573 912 4
	7	.128 747 426 620 489 3
	8	−.017 369 301 001 809 0
	9	−.044 088 253 930 797 1
	10	.013 981 027 917 400 1
	11	.008 746 094 047 406 5
	12	−.004 870 352 993 452 0
	13	−.000 391 740 373 377 0
	14	.000 675 449 406 450 6
	15	−.000 117 476 784 124 8
$N=9$	0	.038 077 947 363 877 8
	1	.243 834 674 612 585 8
	2	.604 823 123 690 095 5
	3	.657 288 078 051 273 6
	4	.133 197 385 824 988 3
	5	−.293 273 783 279 166 3
	6	−.096 840 783 222 949 2
	7	.148 540 749 338 125 6
	8	.030 725 681 479 338 5
	9	−.067 632 829 061 327 9
	10	.000 250 947 114 834 0
	11	.022 361 662 123 679 8
	12	−.004 723 204 757 751 8
	13	−.004 281 503 682 463 5
	14	.001 847 646 883 056 3
	15	.000 230 385 763 523 2
	16	−.000 251 963 188 942 7
	17	.000 039 347 320 316 3
$N=10$	0	.026 670 057 900 547 3
	1	.188 176 800 077 634 7
	2	.527 201 188 931 575 7
	3	.688 459 039 453 436 3
	4	.281 172 343 660 571 5
	5	−.249 846 424 327 159 8
	6	−.195 946 274 377 286 2
	7	.127 369 340 335 754 1
	8	.093 057 364 603 554 7
	9	−.071 394 147 166 350 1
	10	−.029 457 536 821 839 9
	11	.033 212 674 059 361 2
	12	.003 606 553 566 987 0
	13	−.010 733 175 483 300 7
	14	.001 395 251 747 068 8
	15	.001 992 405 295 192 5
	16	−.000 685 856 694 956 4
	17	−.000 116 466 855 128 5
	18	.000 093 588 670 320 2
	19	−.000 013 264 202 894 5

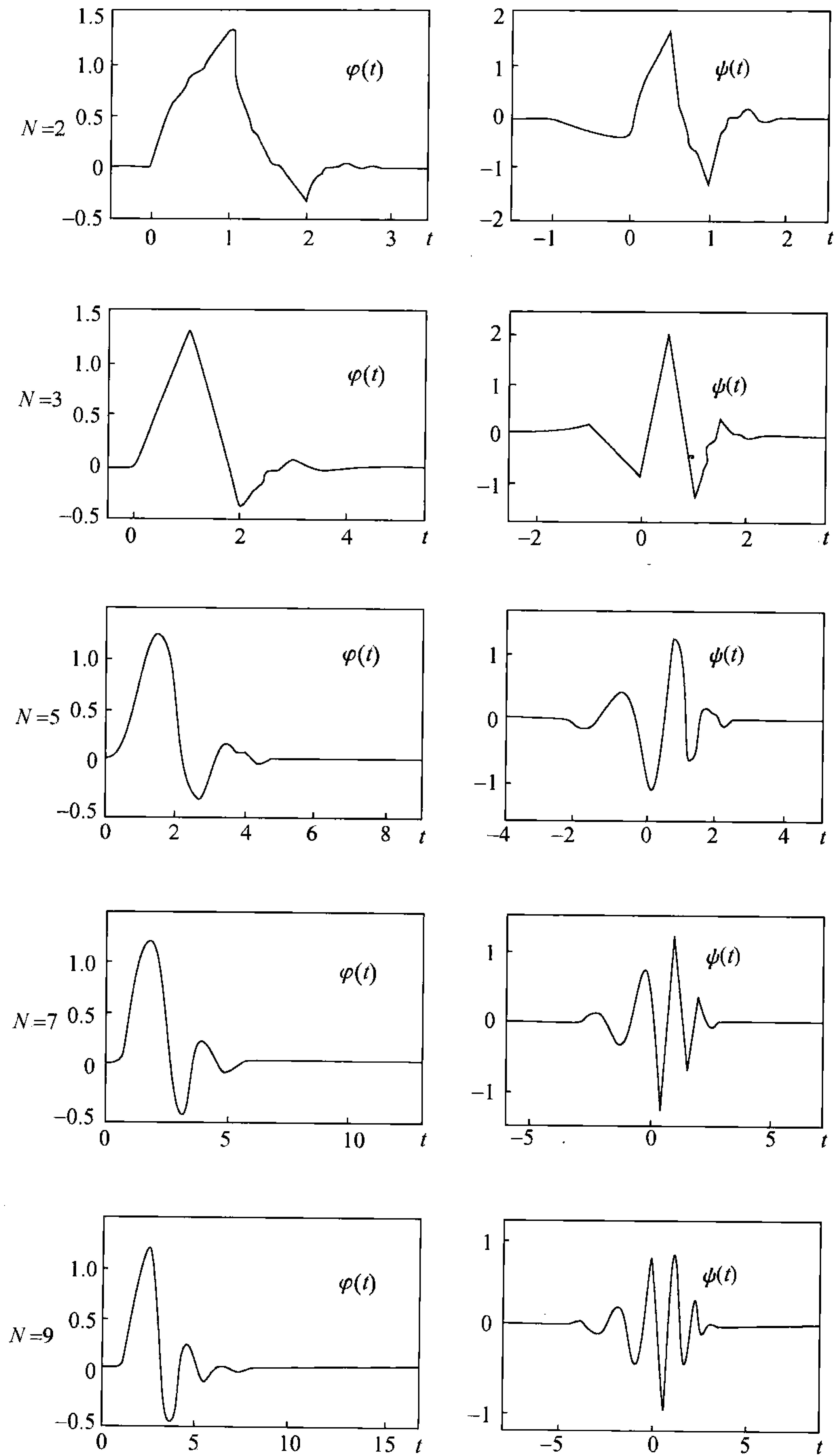


图 8-6　各阶的 Daubechies 小波 $\psi(t)$和相应尺度函数 $\varphi(t)$

§8.3 基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法[56,60]

虽然时域有限差分法具有非常突出的优越性，但由于存在数值色散，用于电大目标（目标尺度远大于入射波波长）时会导致明显的误差. 此外，由于整个网格区间的离散化使得所需的网格数目巨大，尽管时域有限差分方法的计算复杂度相对最低，但所需的存储空间和 CPU 时间仍然非常可观，以致很多复杂的电磁场问题在当代计算机技术水平上仍无法解决.

为了提高时域有限差分法的计算效率并满足各种需要，人们对其进行了各种改进，其中之一就是局部网格细化技术. 采用这种技术的目的在于，在提高计算精度的同时又不过多地增加对计算机的要求，基本做法是对场量变化较快或几何结构需精确模拟的区域进行网格细分. 这种方法完全是在时域有限差分法的原有框架内进行的，在算法上没有新意.

在 20 世纪 90 年代，一种用于电磁场计算的叫做时域多分辨分析（MRTD）法被提出来[55]，该方法将电磁场用多分辨分析的尺度函数和小波函数作为基函数展开，并用伽辽金法对麦克斯韦旋度方程进行离散，构成一种既与时域有限差分法有关又具有更深刻意义的全新的时域方法. 时域多分辨分析法给出了一个新的统一的理论构形，将时域有限差分法与其他电磁场的分析方法联系起来，从而使复杂的电磁场问题对计算机存储空间和 CPU 时间的要求降低了一个数量级. 这是因为与传统的时域有限差分法相比，在相同的精度水平上，时域多分辨分析法所用的网格可以更粗些，只在所需的区域选用更高的分辨率. 事实上，传统的时域有限差分法只不过是在时域多分辨分析法中将小波基函数换成矩形脉冲（Haar 尺度函数）的特殊情况.

在计算细化区域的边界场时，应用局部网格细化技术的时域有限差分法会用到非细化区域中不存在的场值，作插值计算时会引入误差，而时域多分辨分析法无需对初始网格进行细化. 在小波基函数中，场量的展开系数由检验函数在每个网格点由计算得到，通过在每个初始网格点利用更高阶的展开基函数而达到高分辨率. 在每个网格点的展开系数与其邻近网格点的系数有关，但该系数在不需要对场进行高分辨描述的区域中足够小，完全可以忽略，而这对高分辨区域边界及其内部的系数没有影响. 因此，时域多分辨分析法提供了一种截断高分辨区域的严格的方法，作为决定是否需要高分辨的检验函数：当小波系数较大时，对高分辨的小波系数进行计算；较小时则被忽略，小波系数的计算不再继续. 在这种方法的计算中，高分辨区域自适应地改变，小波系数提供低一阶分辨率水平上场的空间变化率和时间变化率的信息.

时域多分辨分析的展开基函数若只用尺度函数，则称为 S-MRTD；若也与小波母函数混合使用，则称为 W-MRTD.

8.3.1 Haar 尺度函数多分辨分析和 FDTD

为了说明时域多分辨分析与时域有限差分法之间的关系，考虑由 Haar 尺度函数作为基函数时所形成的 MRTD 方程. 为简单起见，把展开的对象限制为在无耗无源均匀媒质中沿 x 轴方向传播的电磁波所满足的麦克斯韦方程

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{8.3.1}$$

时间离散函数用 $h(t)$ 表示，Haar 尺度函数仍用 $\varphi(x)$ 表示，它们分别为具有宽度 Δt 和 Δx 的单位矩形脉冲. 基函数由 $h(t)$ 和 $\varphi(x)$ 平移得到，其形式为

$$h_k(t) = h\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right), \tag{8.3.2}$$

$$k, m \in Z,$$

$$\varphi_m^0(x) = \varphi^0\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right), \tag{8.3.3}$$

其中

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & |t| = \dfrac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

而 φ^0 的上角标表示只用零级[相当于式(8.2.1)中 $j=0$].

按照 MRTD 的习惯表示方法. 可把场量依上述基函数展开为

$$\begin{aligned} E_z(x,t) &= \sum_{k,m} E_{k+\frac{1}{2},m}^{\varphi^0} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_m^0(x), \\ H_y(x,t) &= \sum_{k,m} H_{k,m+\frac{1}{2}}^{\varphi^0} h_k(t)\varphi_{m+\frac{1}{2}}^0(x). \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

其中上角标 φ^0 表示是对零级尺度函数的展开系数.

把展开式(8.3.5)代入方程(8.3.1)的第一式，并利用伽辽金法进行离散，即可得到

$$\begin{aligned} &\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k,m} E_{k+\frac{1}{2},m}^{\varphi^0}\varphi_m^0(x)\frac{\partial}{\partial t}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\right]h_{k'}(t)\varphi_{m'}^0(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{h,m} H_{k,m+\frac{1}{2}}^{\varphi^0} h_k(t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{m+\frac{1}{2}}^0(x)\right]h_{k'}(t)\varphi_m^0(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

根据表达式(8.3.4)，容易证明函数 $h_k(t)$ 具有以下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_k(t)h_l(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-k)h(\tau-l)\Delta t\,\mathrm{d}\tau = (\Delta t)\delta_{k,l}. \tag{8.3.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_k(t) \frac{\partial}{\partial t} h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)\frac{\partial}{\partial t} h\left(\frac{t}{\Delta t} - \left(k' + \frac{1}{2}\right)\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[u\left(\frac{t}{\Delta t} - \left(k' + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - u\left(\frac{t}{\Delta t} - \left(m' + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{t}{\Delta t} - k\right)\frac{1}{\Delta t}\left[\delta\left(\frac{t}{\Delta t} - k'\right) - \delta\left(\frac{t}{\Delta t} - (k'+1)\right)\right]\mathrm{d}t$$
$$= \delta_{k,k'} - \delta_{k,k'+1}. \tag{8.3.8}$$

用类似的方法可以证明，$\varphi_m^0(x)$也具有如式(8.3.7)和式(8.3.8)的性质，只需把变量 t 变为 x 就可以了. 利用这些性质，可由式(8.3.6)得到

$$\Delta x \sum_{k,m} E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m}(\delta_{k,k'} - \delta_{k,k'+1})\delta_{m,m'} = \frac{\Delta t}{\varepsilon}\sum_{k,m} H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}}(\delta_{m,m'} - \delta_{m,m'+1})\delta_{k,k'},$$

而且进一步可得

$$E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m} = E^{\varphi^0}_{k-\frac{1}{2},m} + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}(H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}} - H^{\varphi^0}_{k,m-\frac{1}{2}}). \tag{8.3.9}$$

类似地，把展开式(8.3.5)代入式(8.3.1)的第二式，并且将 $h_{k'+\frac{1}{2}}(t)$和$\varphi^0_{m'+\frac{1}{2}}(x)$作检验函数的伽辽金法，可以得到

$$H^{\varphi^0}_{k+1,m+\frac{1}{2}} = H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}(E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m+1} - E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m}). \tag{8.3.10}$$

这样的结果构成一个步进的递推关系. 为了对比，并进一步理解这些方程的意义，把传统的 FDTD 法中的中心差分近似用于方程(8.3.1)，且仍用 FDTD 中的惯用符号，就可得到

$$E_z^{k+\frac{1}{2}}(m) = E_z^{k-\frac{1}{2}}(m) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\left[H_y^k(m+\frac{1}{2}) - H_y^k\left(m - \frac{1}{2}\right)\right], \tag{8.3.11}$$

$$H_y^{k+1}\left(m+\frac{1}{2}\right) = H_y^k\left(m+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}[E_z^{k+\frac{1}{2}}(m+1) - E_z^{k+\frac{1}{2}}(m)]. \tag{8.3.12}$$

分别把式(8.3.9)和式(8.3.10)与式(8.3.11)和式(8.3.12)进行对比，不难发现两者具有完全一样的格式. 由 FDTD 中各量的含义可知，$E^{\varphi^0}_{k,m}$可理解为电场 E_z 在网格 m 处 k 时间步的取值，而 $H^{\varphi^0}_{k,m}$则是磁场 H_y 在网格 m 处 k 时间步的取值. 这一结果说明，时域多分辨分析法和时域有限差分法在原理上是相通的，时域有限差分法只是时域多分辨分析法的一种最简单的特殊情况. 如果在展开式中采用高阶的尺度函数，就可得到高阶的时域有限差分法. 如果在展开式中增加小波基函数，就能得到更复杂但也更精确的电磁场的时域算法.

8.3.2　基于 Haar 单阶小波的一维时域多分辨分析法

用 Haar 尺度函数和小波函数作为正交基的时域多分辨分析法具有简单的形式. 由于 Haar 尺度函数和小波函数具有有限的支撑集，大大有利于时域多分辨分析法的执行，使得就入射波而言，对吸收边界条件及非均匀媒质的处理相对简单. 基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法的计算流程类似于应用局部细化网格结构的时域有限差分法. 后者可在某些特殊的电磁场问题中得到有效的应用，但为了防止不稳定性，需采取某种经验性的、往往不具有一般性的修正. 相比之下，时域多分辨分析法在一种稳定的结构中提供了完全不同的严格的算法.

为了便于理解，首先对一维电磁场问题的时域多分辨分析法进行阐述，然后再推广到二维和三维问题. 而且，首先分析单一分辨率的问题，然后再推广到多分辨率. 假设考虑的是均匀媒质空间，分别用 Δx 和 Δt 表示空间和时间的离散步长，时间离散函数用 $h(t)$ 表示，尺度函数为 $\varphi(x)$，小波母函数 $\psi(x)$ 由式(8.2.6)和(8.2.7)给出. $h_k(t)$ 和 $\varphi_m^0(x)$ 仍如式(8.3.2)和(8.3.3)所示，$\psi_m(x)$ 则为

$$\psi_m(x) = \psi\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right), \tag{8.3.13}$$

式中没有指明小波母函数的等级，其对任何单一等级都是成立的[以下用到的是 $\psi_m^0(x)$]. 应用对象仍如式(8.3.1)所表示的在无耗无源均匀媒质空间中，沿 x 轴传播的电磁波满足的麦克斯韦旋度方程.

将电磁场各分量分别按以下形式展开，即

$$E_z(x,t) = \sum_{k,m}[E_{k,m}^{\varphi^0} h_k(t)\varphi_m^0(x) + E_{k,m}^{\psi^0} h_k(t)\psi_m^0(x)], \tag{8.3.14}$$

$$H_y(x,t) = \sum_{k,m}[H_{k,m}^{\varphi^0} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{m+\frac{1}{4}}^0(x) + H_{k,m}^{\psi^0} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\psi_{m+\frac{1}{4}}^0(x)], \tag{8.3.15}$$

并代入方程(8.3.1)，然后利用伽辽金法. 考虑到尺度函数和小波函数的正交性，不难得到单阶小波的时域多分辨分析方程

$$E_{k+1,m}^{\varphi^0} = E_{k,m}^{\varphi^0} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}(H_{k,m}^{\varphi^0} - H_{k,m}^{\psi^0} - H_{k,m-1}^{\varphi^0} + H_{k,m-1}^{\psi^0}), \tag{8.3.16}$$

$$E_{k+1,m}^{\psi^0} = E_{k,m}^{\psi^0} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}(H_{k,m}^{\varphi^0} + 3H_{k,m}^{\psi^0} - H_{k,m-1}^{\varphi^0} + H_{k,m-1}^{\psi^0}), \tag{8.3.17}$$

$$H_{k,m}^{\varphi^0} = H_{k-1,m}^{\varphi^0} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x}(E_{k,m+1}^{\varphi^0} + E_{k,m+1}^{\psi^0} - E_{k,m}^{\varphi^0} - E_{k,m}^{\psi^0}), \tag{8.3.18}$$

$$H_{k,m}^{\psi^0} = H_{k-1,m}^{\psi^0} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x}(-E_{k,m+1}^{\varphi^0} - E_{k,m+1}^{\psi^0} + E_{k,m}^{\varphi^0} - 3E_{k,m}^{\psi^0}), \tag{8.3.19}$$

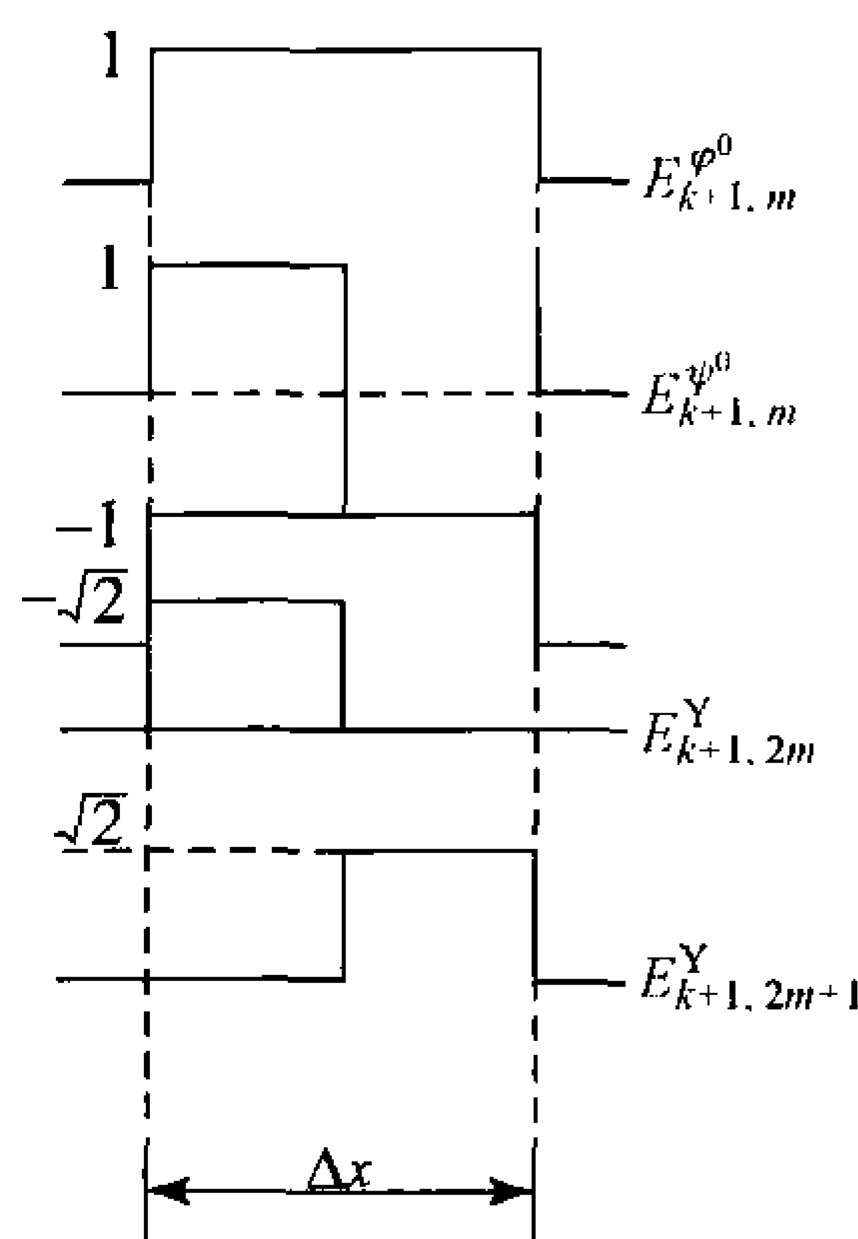


图 8-7 时域多分辨分析法和时域有限差分法中的电场展开项

其中 k 表示时间离散点的编号，m 表示沿 x 轴的空间离散点的编号，上角标表示相应的空间展开函数. 如上面所证明的，如果在形如式(8.3.14)和(8.3.15)的空间函数中只包含尺度函数，则由方程(8.3.16)～(8.3.19)可精确地得到一维时域有限差分方程. 这正说明经典的时域有限差分法可以看成是时域多分辨分析法的一种特例. 进一步观察可以发现，上面导出的方程(8.3.16)～(8.3.19)与以 $\Delta x/2$ 为空间步长的时域有限差分格式等效.

图 8-7 分别描述了时域多分辨分析法和时域有限差分法中的电场展开项，其中上角标 Y 表示 Yee 氏网格中用时域有限差分法计算的场量. 在 Yee 氏网格中，时域有限差分方程可改写为

$$E^{Y}_{k+1,2m} = E^{Y}_{k,2m} + \frac{2\Delta t}{\varepsilon \Delta x}(H^{Y}_{k,2m} - H^{Y}_{k,2m-1}), \tag{8.3.20}$$

$$E^{Y}_{k+1,2m+1} = E^{Y}_{k,2m+1} + \frac{2\Delta t}{\varepsilon \Delta x}(H^{Y}_{k,2m+1} - H^{Y}_{k,2m}), \tag{8.3.21}$$

$$H^{Y}_{k,2m} = H^{Y}_{k-1,2m} + \frac{2\Delta t}{\mu \Delta x}(E^{Y}_{k,2m+1} - E^{Y}_{k,2m}), \tag{8.3.22}$$

$$H^{Y}_{k,2m+1} = H^{Y}_{k-1,2m+1} + \frac{2\Delta t}{\mu \Delta x}(E^{Y}_{k,2m+2} - E^{Y}_{k,2m+1}). \tag{8.3.23}$$

经以下替换，两种差分格式的等效性将更加明显

$$E^{\varphi^0}_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{Y}_{k,2m} + E^{Y}_{k,2m+1}), \tag{8.3.24}$$

$$E^{\psi^0}_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E^{Y}_{k,2m} - E^{Y}_{k,2m+1}), \tag{8.3.25}$$

$$H^{\varphi^0}_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H^{Y}_{k,2m} + H^{Y}_{k,2m+1}), \tag{8.3.26}$$

$$H^{\psi^0}_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H^{Y}_{k,2m} - H^{Y}_{k,2m+1}). \tag{8.3.27}$$

8.3.3 基于 Haar 多阶小波的一维时域多分辨分析法

将单阶小波的一维时域多分辨分析法推广到包含任意多阶小波的一般情况，对每阶小波函数都可按以上方式单独推导，因为在式(8.3.13)中并没有限定小波函数的等级. 但是，随着小波级数的增加，计算变得越来越复杂，因此需要一种新的表示方法使方程更加紧凑.

很容易发现，方程(8.3.16)～(8.3.19)可以等效地表示成以下两个矩阵方程，即

$$\begin{bmatrix} E_{k+1,m}^{\varphi^0} \\ E_{k+1,m}^{\psi^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{k,m}^{\varphi^0} \\ E_{k,m}^{\psi^0} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{k,m-1}^{\varphi^0} \\ H_{k,m}^{\varphi^0} \\ H_{k,m-1}^{\psi^0} \\ H_{k,m}^{\psi^0} \end{bmatrix}, \tag{8.3.28}$$

$$\begin{bmatrix} H_{k,m}^{\varphi^0} \\ H_{k,m}^{\psi^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{k-1,m}^{\varphi^0} \\ H_{k-1,m}^{\psi^0} \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k,m}^{\varphi^0} \\ E_{k,m+1}^{\varphi^0} \\ E_{k,m}^{\psi^0} \\ E_{k,m+1}^{\psi^0} \end{bmatrix}. \tag{8.3.29}$$

若空间离散点 m 处用到的小波函数分辨率的最高等级为 L，则一般形式的时域多分辨分析方程可写为

$$[E_{k+1,m}^{L+1}] = [E_{k,m}^{L+1}] + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}^{L+1} [H_{k,m-1,m}^{L+1}], \tag{8.3.30}$$

$$[H_{k,m}^{L+1}] = [H_{k-1,m}^{L+1}] + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \boldsymbol{A}_{\mathrm{h}}^{L+1} [E_{k,m,m+1}^{L+1}], \tag{8.3.31}$$

其中

$$[E_{k,m}^{L+1}] = [E_{k,m}^{\varphi^{0,0}}, E_{k,m}^{\psi^{0,0}}, E_{k,m}^{\psi^{1,0}}, E_{k,m}^{\psi^{1,1}}, \cdots, E_{k,m}^{\psi^{L,0}}, \cdots E_{k,m}^{\psi^{L,2^L-1}}]^{\mathrm{T}}, \tag{8.3.32}$$

$$[H_{k,m-1,m}^{L+1}] = [H_{k,m}^{\varphi^{0,-1}}, H_{k,m}^{\varphi^{0,0}}, H_{k,m}^{\psi^{0,-1}}, H_{k,m}^{\psi^{0,0}}, \cdots, H_{k,m}^{\psi^{L,-2^L}}, \cdots, H_{k,m}^{\psi^{L,2^L-1}}]^{\mathrm{T}}, \tag{8.3.33}$$

$$[E_{k,m,m+1}^{L+1}] = [E_{k,m}^{\varphi^{0,0}}, E_{k,m}^{\varphi^{0,1}}, E_{k,m}^{\psi^{0,0}}, E_{k,m}^{\psi^{0,1}}, \cdots, E_{k,m}^{\psi^{L,0}}, \cdots, E_{k,m}^{\psi^{L,2^L+1}}]^{\mathrm{T}}, \tag{8.3.34}$$

$$[H_{k,m}^{L+1}] = [H_{k,m}^{\varphi^{0,0}}, H_{k,m}^{\psi^{0,0}}, H_{k,m}^{\psi^{1,0}}, H_{k,m}^{\psi^{1,1}}, \cdots, H_{k,m}^{\psi^{L,0}}, \cdots, H_{k,m}^{\psi^{L,2^L-1}}]^{\mathrm{T}}, \tag{8.3.35}$$

在以上各式中，尺度函数和小波函数分别表示为

$$\varphi^{n,i}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \varphi^0(2^n x - i), \quad \psi^{n,i}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \psi^0(2^n x - i), \tag{8.3.36}$$

其中 n 表示尺度函数和小波函数的等级，i 表示空间平移量. A_{e}^{L+1} 和 A_{h}^{L+1} 均为 $2^{L+1} \times 2^{L+2}$ 阶矩阵，其元素由以下积分给定

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_m^{n,i}(x)}{\partial x} [\varphi, \psi_m^{p,j}(x \pm 2^{-N-1})] \mathrm{d}x, \tag{8.3.37}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi_m^{n,i}(x)}{\partial x} [\varphi, \psi_m^{p,j}(x \pm 2^{-N-1})] \mathrm{d}x. \tag{8.3.38}$$

其中 N 为在计算域中小波函数分辨率等级数的最大值. 例如，当尺度函数取 0 阶，小波函数最高取 1 阶，即 $L=1$ 时，小波函数分辨率的最高等级数为 2. 这

时有

$$
\boldsymbol{A}_{\mathrm{e}}^{2}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 6\end{bmatrix}, \tag{8.3.39}
$$

$$
\boldsymbol{A}_{\mathrm{h}}^{2}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0\\ 1 & -1 & -3 & -1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & -6 & 0 & -2 & 0\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -2 & -6 & 0\end{bmatrix}. \tag{8.3.40}
$$

8.3.4 二维和三维时域多分辨分析法的推广

将上述方法推广到二维和三维电磁场问题,不存在原则上的困难,只需选择适当的 Haar 尺度函数和小波函数的组合构造基函数. 在二维问题中,时间离散函数仍选用 $h_k(t)$,只需对坐标 x 和 y 分别离散化. 如果只用一阶小波,则可选择以下几种基函数的组合

$$
h_k(t)\varphi_m(x)\varphi_n(y),\quad h_k(t)\psi_m(x)\varphi_n(y),
$$

$$
h_k(t)\varphi_m(x)\psi_n(y),\quad h_k(t)\psi_m(x)\psi_n(y),
$$

其中 m 和 n 为整数,分别表示沿 x 轴和 y 轴的空间离散点的编号. 以上函数的平移表达式仍可由式(8.3.2),(8.3.3)和(8.3.13)给出.

以 TM 波为例,E_z 分量可展开为

$$
\begin{aligned}
E_z(x,y,t)=\sum_{k,m,n}\big[&E_{z,k,m,n}^{\varphi_x\varphi_y}h_k(t)\varphi_m(x)\varphi_n(y)+E_{z,k,m,n}^{\psi_x\varphi_y}h_k(t)\psi_m(x)\varphi_n(y)\\
&+E_{z,k,m,n}^{\varphi_x\psi_y}h_k(t)\varphi_m(x)\psi_n(y)+E_{z,k,m,n}^{\psi_x\psi_y}h_k(t)\psi_m(x)\psi_n(y)\big],
\end{aligned} \tag{8.3.41}
$$

对 H_x 和 H_y 也可给出类似的表达式. 将上式代入无耗无源均匀媒质中的麦克斯韦旋度方程的分量式

$$
\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x},\quad \frac{\partial H_x}{\partial t}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}. \tag{8.3.42}
$$

仍利用伽辽金法,则可得到 H_y 满足的一组方程

$$
H_{y,k,m,n}^{\varphi_x\varphi_y}=H_{y,k-1,m,n}^{\varphi_x\varphi_y}+\frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\left(E_{z,k,m+1,n}^{\varphi_x\varphi_y}+E_{z,k,m+1,n}^{\psi_x\varphi_y}-E_{z,k,m,n}^{\varphi_x\varphi_y}-E_{z,k,m,n}^{\psi_x\varphi_y}\right), \tag{8.3.43}
$$

$$
H_{y,k,m,n}^{\psi_x\varphi_y}=H_{y,k-1,m,n}^{\psi_x\varphi_y}-\frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\left(E_{z,k,m+1,n}^{\varphi_x\varphi_y}+E_{z,k,m+1,n}^{\psi_x\varphi_y}-E_{z,k,m,n}^{\varphi_x\varphi_y}+3E_{z,k,m,n}^{\psi_x\varphi_y}\right), \tag{8.3.44}
$$

$$H^{\varphi_x\psi_y}_{y,k,m,n} = H^{\varphi_x\psi_y}_{y,k-1,m,n} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}(E^{\varphi_x\psi_y}_{z,k,m+1,n} + E^{\psi_x\psi_y}_{z,k,m+1,n} - E^{\varphi_x\psi_y}_{z,k,m,n} - E^{\psi_x\psi_y}_{z,k,m,n}),$$

(8.3.45),

$$H^{\psi_x\psi_y}_{y,k,m,n} = H^{\psi_x\psi_y}_{y,k-1,m,n} - \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}(E^{\varphi_x\psi_y}_{z,k,m+1,n} + E^{\psi_x\psi_y}_{z,y,k,m+1,n} - E^{\varphi_x\psi_y}_{z,k,m,n} + 3E^{\psi_x\psi_y}_{z,k,m,n}).$$

(8.3.46)

类似地,可得到 H_x 满足的方程.

在三维问题中,可选用以下几种基函数的组合

$$h_k(t)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z),\quad h_k(t)\varphi_m(x)\varphi_n(y)\psi_l(z),$$
$$h_k(t)\varphi_m(x)\psi_n(y)\varphi_l(z),\quad h_k(t)\psi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_l(z),$$
$$h_k(t)\varphi_m(x)\psi_n(y)\psi_l(z),\quad h_k(t)\psi_m(x)\varphi_n(y)\psi_l(z),$$
$$h_k(t)\psi_m(x)\psi_n(y)\varphi_l(z),\quad h_k(t)\psi_m(x)\psi_n(y)\psi_l(z).$$

文献[56]中给出了其中一种具体的展开形式.

§8.4　基于 Battle-Lemarie 小波基的时域多分辨分析法[55]

事实上,时域多分辨分析法最早被提出时用的是 Battle-Lemarie 小波基,更确切地说,是三次样条 Battle-Lemarie 小波基,其尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波母函数 $\psi(x)$ 及其傅里叶变换已在前面给出. 与 Haar 小波相比,Battle-Lemarie 小波的最大优点是其连续性. 正如上一节所显示的,在时域多分辨分析法中,将空间域的电磁场用尺度函数和小波函数作二重展开. 如果仅用尺度函数进行展开,则只适用于对缓慢变化的电磁场进行精确的模拟,称为 S-MRTD 法. 在场变化快或有奇异性的区域,需要在展开函数中加入小波函数以增加空间离散点. 这种需要尺度函数和小波函数同时参与的时域多分辨分析法称为 W-MRTD 法. 对时间变量,通常用脉冲函数作为展开函数和检验函数.

8.4.1　S-MRTD 格式

将无耗无源均匀媒质空间中的麦克斯韦旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\tag{8.4.1}$$

写成在直角坐标系中的 6 个分量式,可以利用与前一小节中类似的方法——用 Battle-Lemarie 小波基作为尺度函数分别对其展开. 时域展开函数仍用如式(8.3.2)所示的 $h_k(t)$,尺度函数改用 $\varphi_r(s)$($s=x,y,z$; $r=l,m,n$)表示,即

$$\varphi_r(s) = \varphi^0\left(\frac{s}{\Delta s} - r\right).\tag{8.4.2}$$

方程(8.4.1)中场分量的展开式分别为

$$E_x(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}h_k(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m(y)\varphi_n(z),\tag{8.4.3}$$

$$E_y(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}^{\infty}E^{\varphi_y}_{y,k,l,m+\frac{1}{2},n}h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_n(z),\tag{8.4.4}$$

$$E_z(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}E^{\varphi_z}_{z,k,l,m,n+\frac{1}{2}}h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_m(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.5}$$

$$H_x(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}H^{\varphi_x}_{x,k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_l(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.6}$$

$$H_y(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}H^{\varphi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.7}$$

$$H_z(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_n(z),\tag{8.4.8}$$

其中 $E^{\varphi_s}_{k,l,m,n}$ 和 $H^{\varphi_s}_{k,l,m,n}$ $(s=x,y,z)$ 为尺度函数的展开系数；k,l,m 和 n 分别为时间离散点的编号和沿 x 轴，y 轴和 z 轴的空间离散点的编号.

$$t=k\Delta t,x=l\Delta x,y=m\Delta y,z=n\Delta z,$$

其中 Δt 和 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 分别为时间步长和空间步长.

为了获得展开系数所满足的方程，仍然用伽辽金法. 积分中所用到的 $h_k(t)$ 的性质已由式(8.3.7)和(8.3.8)给出. 对尺度函数，仍然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\varphi_{m'}(x)\mathrm{d}x=(\Delta x)\delta_{m,m'}.\tag{8.4.9}$$

另外一个重要性质是

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\varphi}(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'(m'+\frac{1}{2})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}\omega'\right]\mathrm{d}x\\
&=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\omega+\omega')}\right]\left[\frac{-\mathrm{i}\omega'}{2\pi}\hat{\varphi}(\omega')\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega m+\mathrm{i}\omega'(m'+\frac{1}{2})}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega'\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}\omega)\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega m}\hat{\varphi}(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(m'+\frac{1}{2})}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\omega|\hat{\varphi}(\omega)|^2\sin\left[\omega\left(m'-m+\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}\tag{8.4.10}$$

上式又可以表示成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a(i)\delta_{m+i,m'},\tag{8.4.11}$$

其中

$$a(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{d}\omega,$$

$$a(1)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{3}{2}\omega\mathrm{d}\omega,$$

$$a(2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{5}{2}\omega\mathrm{d}\omega,$$

$$\vdots$$

系数 $a(i)$前九项的值列于下表：

表 8-2　系数 $a(i)$前九项的值

i	$a(i)$	i	$a(i)$
0	1.291 846 2	5	−0.008 189 2
1	−0.156 076 1	6	0.004 378 8
2	0.059 639 1	7	−0.002 343 3
3	−0.029 309 9	8	0.001 254 2
4	0.015 371 6		

当 $i<0$ 时，$a(i)$的值可根据对称关系 $a(-1-i)=-a(i)$得到. Battle-Lemarie 尺度函数虽然不具有紧支集，却是指数衰减的，故 $a(i)$在 $i>8$ 时虽然不为零，但可以忽略. 因此，式(8.4.11)中的 i 可近似地取为一个不很大的值(例如 $i=8$). 利用以上性质，有

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial E_x}{\partial t}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty}E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}[\delta_{k-1,k'}-\delta_{k,k'}]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$=\left(E^{\varphi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\right)\Delta x\Delta y\Delta z,\tag{8.4.12}$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial H_z}{\partial y}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{k,l,m,n=-\infty}^{\infty}H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\delta_{l,l'}\delta_{n,n'}\delta_{k,k'}\sum_{i=-9}^{8}a(i)\delta_{(m'+i),m}\Delta x\Delta z\Delta t$$

$$=\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}\Delta x\Delta z\Delta t.\tag{8.4.13}$$

对$\frac{\partial H_y}{\partial z}$也可作类似处理. 由此，可从方程(8.4.1)的一个分量式

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t},\tag{8.4.14}$$

得到 S-MRTD 方程

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(E^{\varphi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+i+\frac{1}{2}}. \quad (8.4.15)$$

上式中所包含的电磁场的空间配置可以用与时域有限差分法中 Yee 氏网格单元类似的网格结构表示. 一个 S-MRTD网格单元如图 8-8 所示. 但是,由于场的展开方法不同,在两种方法中的场分量是不同的. Yee 氏网格表示的是全部的场,而 S-MRTD 网格表示的只是全部场的一部分. 类似地,还可导出与方程(8.4.1)中其他分量对应的 S-MRTD 方程,与方程(8.4.15)构成一套完整的 S-MRTD 格式. 特定空间离散点处的总场可由尺度函数展开而求得. 例如,总场区中的 $E_x(\boldsymbol{r}_0,t_0)=E_x(x_0,y_0,z_0,t_0)$ 可由下式给出

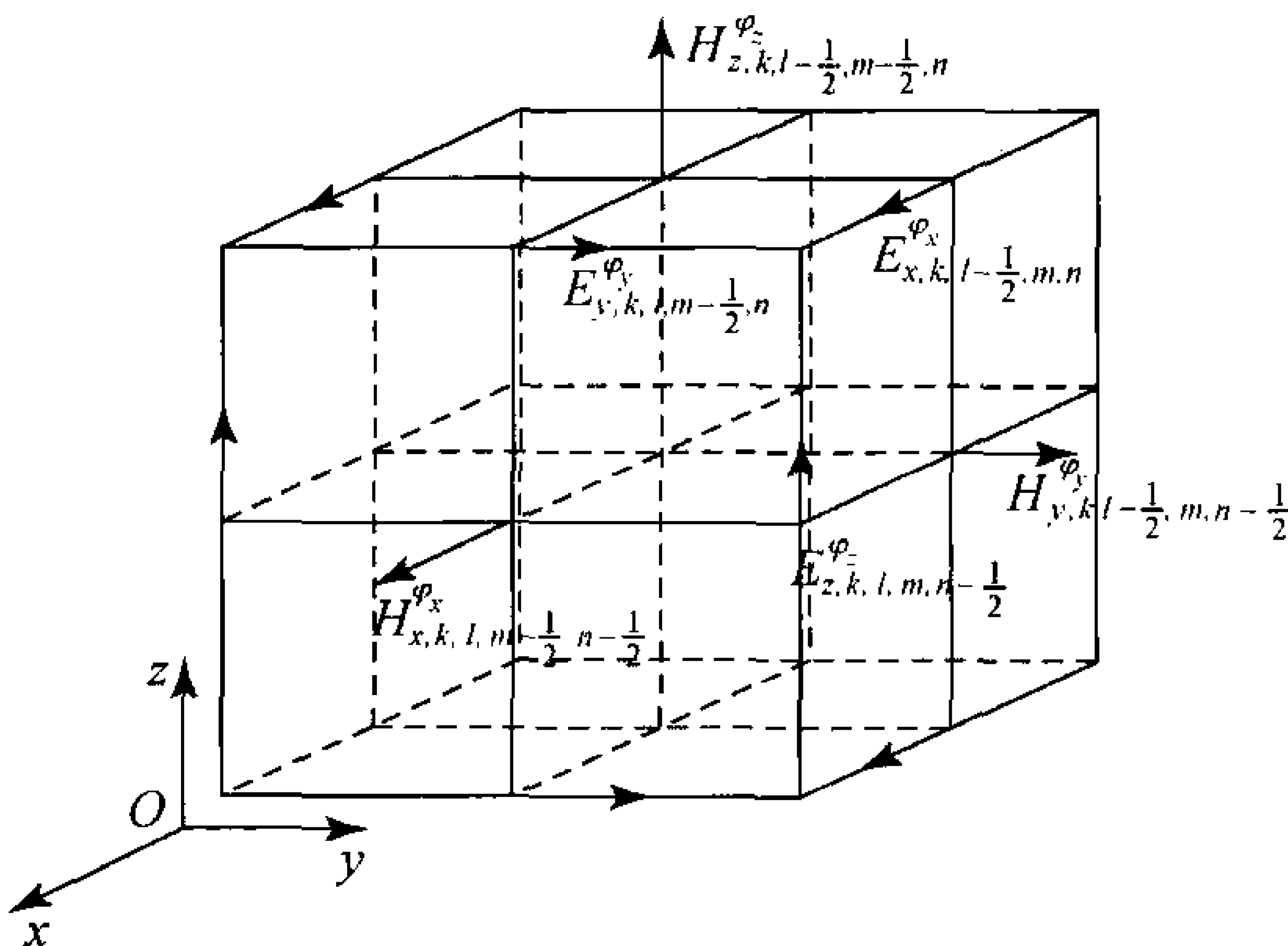


图 8-8 一个 S-MRTD 网格单元

$$E_x(\boldsymbol{r}_0,t_0)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}E_x(\boldsymbol{r},t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\cdot\delta(t-t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty}E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x_0)\varphi_m(y_0)\varphi_n(z_0). \quad (8.4.16)$$

由于 Battle-Lemarie 小波基的尺度函数的支集具有指数衰减特性,只需对上式中的求和式取有限的几项即可满足一定的计算精度.

8.4.2 W-MRTD 格式

如前所述,在 S-MRTD 法中加入小波函数就构成 W-MRTD 法,后者对场的描述更细致. 既然增加维度和提高小波函数分辨率只会增加表达式的复杂度,而不存在任何原则上的困难,为表述方便,只考虑在一个维度上加入一阶分辨率的小波函数. 假设小波函数只加在 y 轴上(称为 W_y-MRTD 格式),可用以下的展开式代替式(8.4.3)~(8.4.8),即

$$E_x(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\varphi_m(y)+E^{\psi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_n(z), \quad (8.4.17)$$

$$E_y(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_y}_{y,k,l,m+\frac{1}{2},n}\varphi_m(y)+E^{\psi_y}_{y,k,l,m,m}\psi_m(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_n(z),\tag{8.4.18}$$

$$E_z(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_z}_{z,k,l,m,n+\frac{1}{2}}\varphi_m(y)+E^{\psi_z}_{z,k,l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.19}$$

$$H_x(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_x}_{x,k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)+H^{\psi_x}_{x,k+\frac{1}{2},l,m,n+\frac{1}{2}}\psi_m(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_l(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.20}$$

$$H_y(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}\varphi_m(y)+H^{\psi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),\tag{8.4.21}$$

$$H_z(\boldsymbol{r},t)=\sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)+H^{\psi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n}\psi_m(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_n(z),\tag{8.4.22}$$

其中 $E^{\psi_s}_{s,k,l,m,n}$ 和 $H^{\psi_s}_{s,k,l,m,n}(s=x,y,z)$ 为小波函数的展开系数，$\psi(y)$ 为三次样条 Battle-Lemarie 小波基的母函数，且其新定义为

$$\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)=\psi^0\left(\frac{y}{\Delta y}-m\right).\tag{8.4.23}$$

小波基函数具有以下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi_{m'}(x)\mathrm{d}x=\delta_{mm'}\Delta x,\tag{8.4.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x=0,\tag{8.4.25}$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\frac{\partial\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2\omega\sin\left[\omega\left(m'+\frac{1}{2}-m\right)\right]\mathrm{d}\omega\approx\sum_{i=-9}^{8}b(i)\delta_{(m+i),m'},\tag{8.4.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\frac{\partial\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,|\hat{\psi}(\omega)|\,\omega\sin[\omega(m'+1-m)]\mathrm{d}\omega\approx\sum_{i=-9}^{8}c(i)\delta_{(m+i),(m'+1)},\tag{8.4.27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\frac{\partial\varphi_{m'}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,|\hat{\psi}(\omega)|\,\omega\sin[\omega(m'-m)]\mathrm{d}\omega\approx\sum_{i=-9}^{8}c(i)\delta_{(m+i),m'},\tag{8.4.28}$$

其中系数 $b(i)$ 和 $c(i)$ 前十项的值列于表 8-3 中. 当 $i<0$ 时，$b(i)$ 和 $c(i)$ 的值可根

据对称关系 $b(-1-i)=-b(i)$，$c(-i)=-c(i)$得到.

表 8-3 系数 $b(i)$和 $c(i)$前十项的值

i	$b(i)$	$c(i)$
0	2.472 538 8	0.000 000 0
1	0.956 228 2	−0.046 597 3
2	0.166 058 7	0.054 539 4
3	0.093 924 4	−0.036 999 6
4	0.003 141 3	0.020 574 5
5	0.013 493 6	−0.011 153 0
6	−0.002 858 9	0.005 976 9
7	0.002 778 8	−0.003 202 6
8	−0.001 129 5	0.001 714 1
9	—	−0.000 917 7

再考虑到如式(8.4.9)和(8.4.11)所示的尺度函数的性质，可以得到

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial t}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m{}'(y)\psi_n{}'(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\left(E^{\varphi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\right)\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{8.4.29}$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial t}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(y)\varphi_n{}'(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\left(E^{\psi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}-E^{\psi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\right)\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{8.4.30}$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial y}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m{}'(y)\varphi_n{}'(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\left[\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}+\sum_{i=-9}^{9}c(i)H^{\psi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i,n}\right]\Delta x\Delta z\Delta y, \tag{8.4.31}$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial y}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(y)\psi_n{}'(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=\left[\sum_{i=-9}^{9}c(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}+\sum_{i=-9}^{8}b(i)H^{\psi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+1,n}\right]\Delta x\Delta z\Delta y. \tag{8.4.32}$$

对$\dfrac{\partial H_y}{\partial z}$也可作类似处理. 由此，可从方程(8.4.14)得到与方程(8.4.15)相应的W_y-MRTD方程，即

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(E^{\varphi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n}\right)=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{9}c(i)H^{\psi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i,n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+i+\frac{1}{2}},\quad(8.4.33)$$

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(E^{\psi_x}_{x,k+1,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}-E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\right)=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{9}c(i)H^{\varphi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}b(i)H^{\psi_z}_{z,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+1,n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\psi_y}_{y,k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+i+\frac{1}{2}}.$$
$$(8.4.34)$$

以上两式中所包含的电磁场的空间配置可以用与时域有限差分法中 Yee 氏网格单元类似的网格结构表示. 一个W_y-MRTD网格单元如图8-9所示.

类似地还可导出与方程(8.4.1)中其他各分量对应的W_y-MRTD方程，与方程(8.4.33)和(8.4.34)构成一套完整的W_y-FDTD格式.

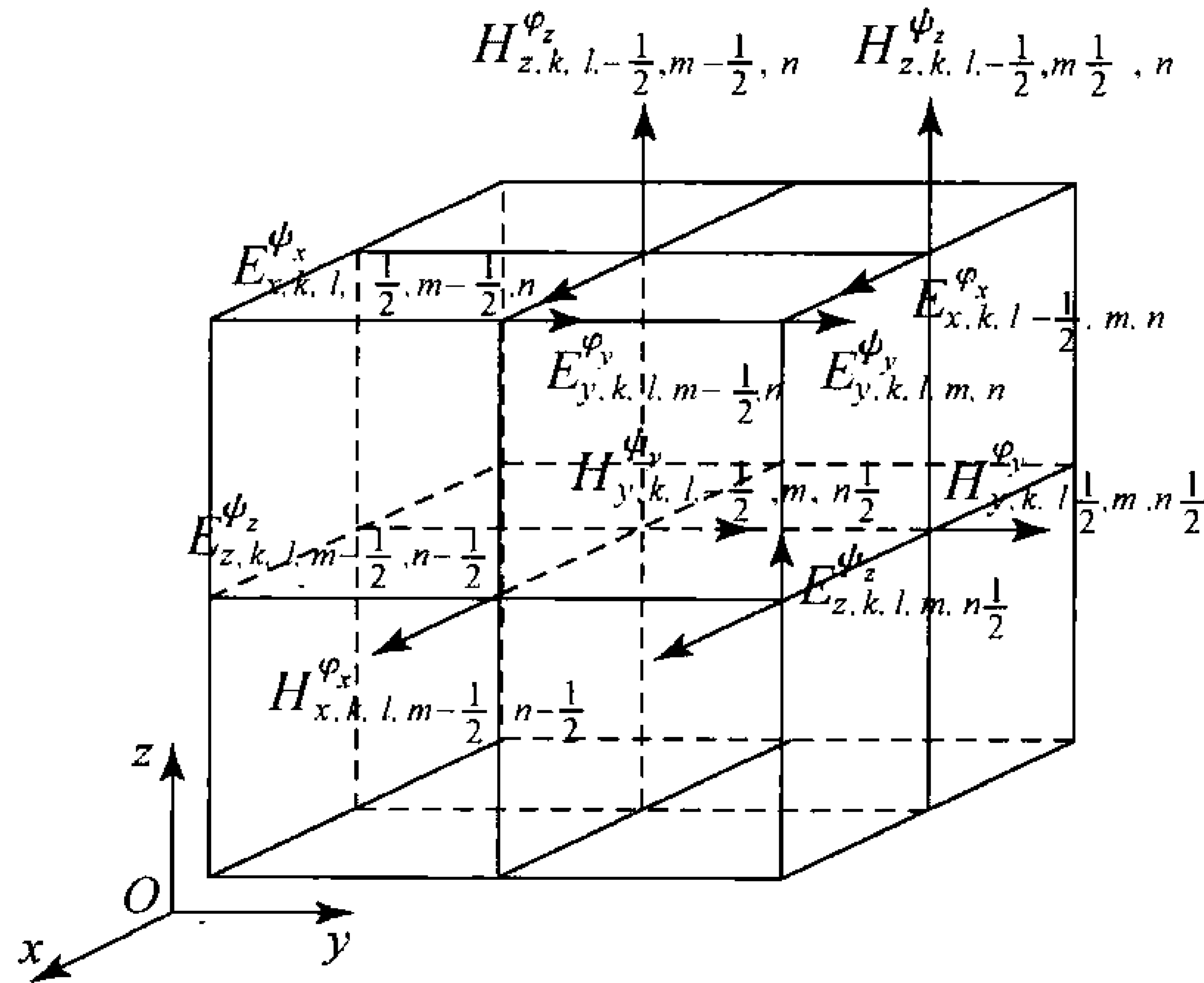


图 8-9　一个 W_y-MRTD 网格单元

与S-MRTD格式类似，特定空间离散点处总场的计算可由尺度函数和小波函数展开而求得. 例如，总场区中的$E_x(\boldsymbol{r}_0,t_0)=E_x(x_0,y_0,z_0,t_0)$可由下式求出

$$E_x(\boldsymbol{r}_0,t_0)=\iiiint_{-\infty}^{\infty}E_x(\boldsymbol{r},t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\cdot\delta(t-t_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} \left[E^{\varphi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m,n} \varphi_m(y_0) + E^{\psi_x}_{x,k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n} \psi_{m+\frac{1}{2}}(y_0) \right] \cdot \varphi_{l+\frac{1}{2}}(x_0) \varphi_n(z_0). \tag{8.4.35}$$

事实上,只需对上式中的求和式取有限的几项即可满足计算精度.

§8.5 数值稳定性和数值色散分析[57]

上面所介绍的 MRTD 法是一种显式格式,它的稳定性是有条件的. 和 FDTD 法一样,离散取样的结果,也会导致非物理的色散现象,造成计算的误差. 这种误差的大小,是评价一个数值方法优劣的重要指标.

8.5.1 数值稳定性分析

下面将以 Battle-Lemarie 小波基 MRTD 为例进行分析,导出的结果对其他基的 MRTD 也有参考价值. 为了书写简便,我们将以二维 TM_z 波为例加以说明,而且只考虑尺度函数展开. TM_z 的方程已由式(7.2.1)~(7.2.3)给出. 把场量表示成如式(8.3.2)和(8.3.3)所示的基函数展开形式,只是 $\varphi(x)$ 为三次 B-样条 Battle-Lemarie 的尺度函数,并用伽辽金法得到展开系数所满足的方程. 由于处理的是二维问题,表示取样位置的参数需要两个,为了书写方便,把表示时间的参数放到系数的左下角,而把表示分量方向的字母移到右上方. 所得到的方程为

$$\frac{{}_{k+\frac{1}{2}}H^{x\varphi}_{i,j-\frac{1}{2}} - {}_{k-\frac{1}{2}}H^{x\varphi}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu \Delta y} \sum_{j'=-n}^{n-1} a(j')\, {}_k E^{z\varphi}_{i,j+j'}, \tag{8.5.1}$$

$$\frac{{}_{k+\frac{1}{2}}H^{y\varphi}_{i-\frac{1}{2},j} - {}_{k-\frac{1}{2}}H^{y\varphi}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t} = \frac{1}{\mu \Delta x} \sum_{i'=-n}^{n-1} a(i')\, {}_k E^{z\varphi}_{i+i',j}, \tag{8.5.2}$$

$$\frac{{}_{k+1}E^{z\varphi}_{i,j} - {}_k E^{z\varphi}_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\Delta x} \sum_{i'=-n}^{n-1} a(i')\, {}_{k+\frac{1}{2}} H^{y\varphi}_{i+i'-\frac{1}{2},j} - \frac{1}{\Delta y} \sum_{j'=-n}^{n} a(j')\, {}_{k+\frac{1}{2}} H^{x\varphi}_{i,j+j'-\frac{1}{2}} \right]. \tag{8.5.3}$$

其中 n 为式(8.4.11)中所取近似项的个数,Δy 为 y 方向的取样间隔,即 $\varphi_j = \varphi^0\left(\frac{y}{\Delta y} - j\right)$,该差分式的特征值问题由如下方程表示

$$\frac{{}_{k+\frac{1}{2}}H^{x\varphi}_{i,j-\frac{1}{2}} - {}_{k-\frac{1}{2}}H^{x\varphi}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \lambda_k H^{x\varphi}_{i,j-\frac{1}{2}}, \tag{8.5.4}$$

$$\frac{{}_{k+\frac{1}{2}}H^{y\varphi}_{i-\frac{1}{2},j} - {}_{k-\frac{1}{2}}H^{y\varphi}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta t} = \lambda_k H^{y\varphi}_{i-\frac{1}{2},j}, \tag{8.5.5}$$

$$\frac{{}_{k+1}E^{z\varphi}_{i,j} - {}_k E^{z\varphi}_{i,j}}{\Delta t} = \lambda_{k+\frac{1}{2}} E^{z\varphi}_{i,j}. \tag{8.5.6}$$

显然，这些方程与式(7.2.7)～(7.2.9)完全类似，故用同样的方法可以得到使计算稳定 λ 必须满足的条件

$$\mathrm{Re}\lambda = 0, \quad -\frac{2}{\Delta t} \leqslant \mathrm{Im}\lambda \leqslant \frac{2}{\Delta t}. \tag{8.5.7}$$

此外，平面波是方程(8.5.4)～(8.5.6)的特征模，且可以表示为

$$\begin{aligned} E_{i,j}^{z\varphi} &= E_o^z \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x i\Delta x + k_y j\Delta y)}, \\ H_{i,j-\frac{1}{2}}^{x\varphi} &= H_o^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k_x i\Delta x + k_y\left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta y\right]}, \\ H_{i-\frac{1}{2},j}^{y\varphi} &= H_0^y \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[k_x\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta x + k_y j\Delta y\right]}. \end{aligned} \tag{8.5.8}$$

把它们代入方程(8.5.4)～(8.5.6)，又可得到

$$\begin{aligned} \lambda^2 =& -\frac{4}{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\sum_{i'=0}^{n-1} a(i')\sin(kx(i'+\frac{1}{2})\Delta x)\right)^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\sum_{j'=0}^{n-1} a(j')\sin(ky(j'+\frac{1}{2})\Delta y)\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{8.5.9}$$

显然，这里的 λ 为纯虚数，且对任意的 k_x 和 h_y 都应该有

$$|\mathrm{Im}\lambda| \leqslant 2v\left(\sum_{i'=0}^{n-1} |a(i')|\right)\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}. \tag{8.5.10}$$

这样，λ 应该同时满足式(8.5.7)和(8.5.10)两个条件，由此得到

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{v\left(\sum_{i'=0}^{n-1} |a(i')|\right)\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}}. \tag{8.5.11}$$

与 FDTD 的稳定条件相比，其差异主要决定于因子

$$\delta = \sum_{i'=0}^{n-1} |a(i')|$$

的大小. 由表 8-2 可以看出，二者差别不是很多. 这一结果可以推广到三维和包含小波基的 W-MRTD 的情况.

8.5.2　数值色散分析

S-MRTD 的数值色散关系也可以用分析 FDTD 类似的方法得到，即把单色平面波的一般表示代入 MRTD 方程，以导出频率与时间步长和空间步长之间的关系.

单色平面波的频率用 ω 表示，所需的表达式只需在式(8.5.8)的指数部分增加一项($-\omega k\Delta t$)即可. 把这些表达式代入(8.5.4)～(8.5.6)，即得到

$$\left[\frac{1}{v\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i'=0}^{n-1} a(i')\sin\left(k_x\left(i'+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right]^2$$

$$+\left[\frac{1}{\Delta y}\sum_{j'=0}^{n-1}a(j')\sin\left(k_y\left(j'+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)\right]^2. \tag{8.5.12}$$

如果 $\Delta x=\Delta y=\Delta s$，且波的传播方向与 x 轴的夹角为 ϕ，则式(8.5.12)可表示为

$$\left[\frac{\Delta}{v\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2=\left[\sum_{i'=0}^{n-1}a(i')\sin\left(k\cos\phi\left(i'+\frac{1}{2}\right)\Delta s\right)\right]^2$$

$$+\left[\sum_{j'=0}^{n-1}a(j')\sin\left(k\sin\phi\left(j'+\frac{1}{2}\right)\Delta s\right)\right]^2. \tag{8.5.13}$$

该式给出了波的传播速度与空间和时间步长、频率或波长以及波的传播方向之间的关系. 把这一结果与理想的色散关系相比较，就可以得到相位误差.

为了进行比较，图 8-10 和图 8-11 给出了一些数值计算结果. 图 8-10 给出的是在空间取样间隔均为 20 点/波长的情况下相位误差与 $1/s$ 的关系，其中 $s=(v\Delta t)/\Delta s$，称为柯朗(Courant)数. 其中包括 n[$a(i)$取的个数，图中记做 MR-Ste]取不同值时的结果，并与 FDTD 的结果作了比较.

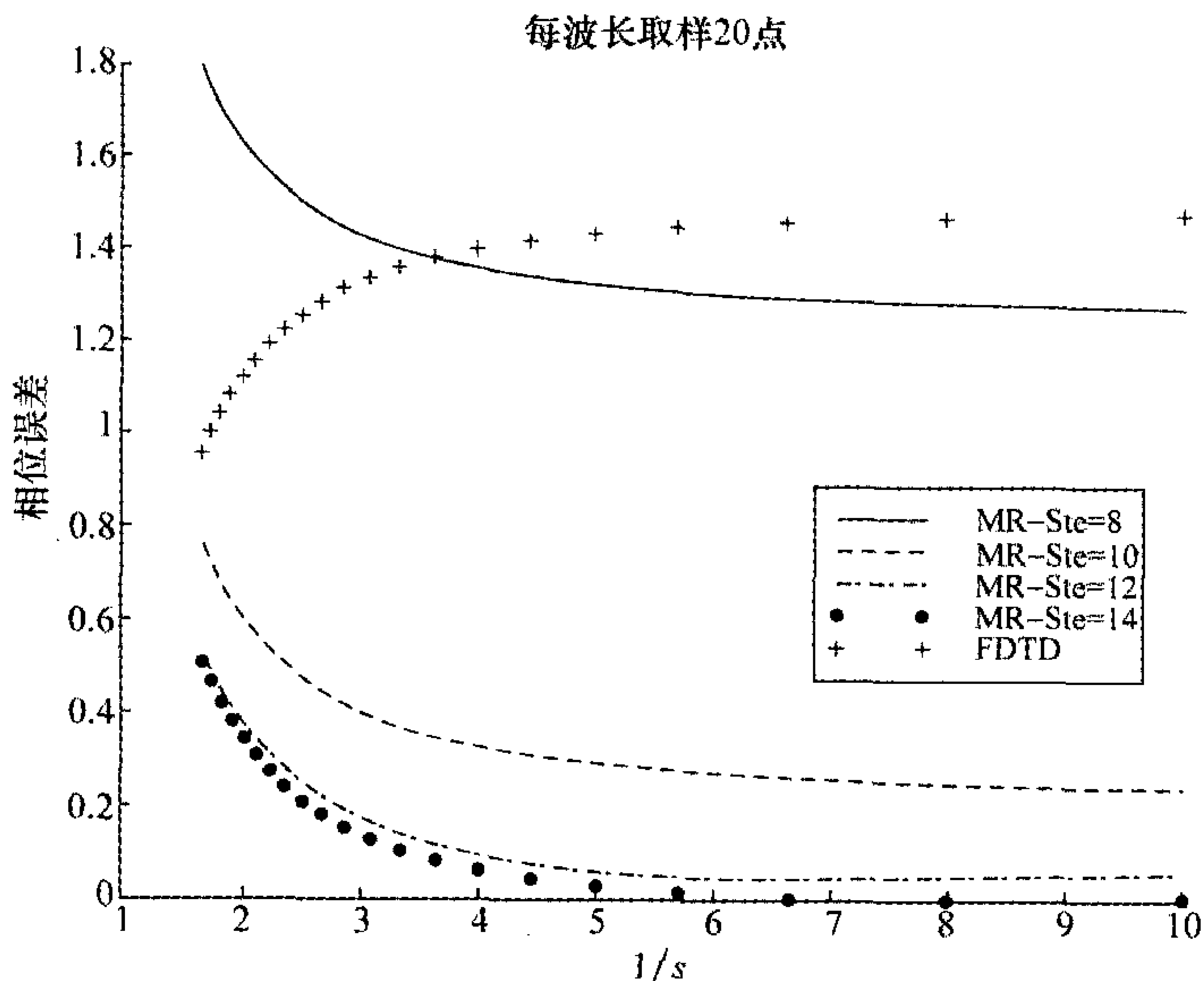


图 8-10　不同 n 值时 S-MRTD 的色散特性

($\lambda/\Delta s=20$)

图 8-11 给出了不同空间取样间隔时 S-MRTD 与 FDTD 色散特性的比较. 图中 MR10，MR20 和 MR40 分别表示在 MRTD 中每个波长的取样点数分别为 10，20 和 40；FD10，FD20 和 FD40 则表示在 FDTD 中的每个 λ 的取样点数分别为 10，20 和 40.

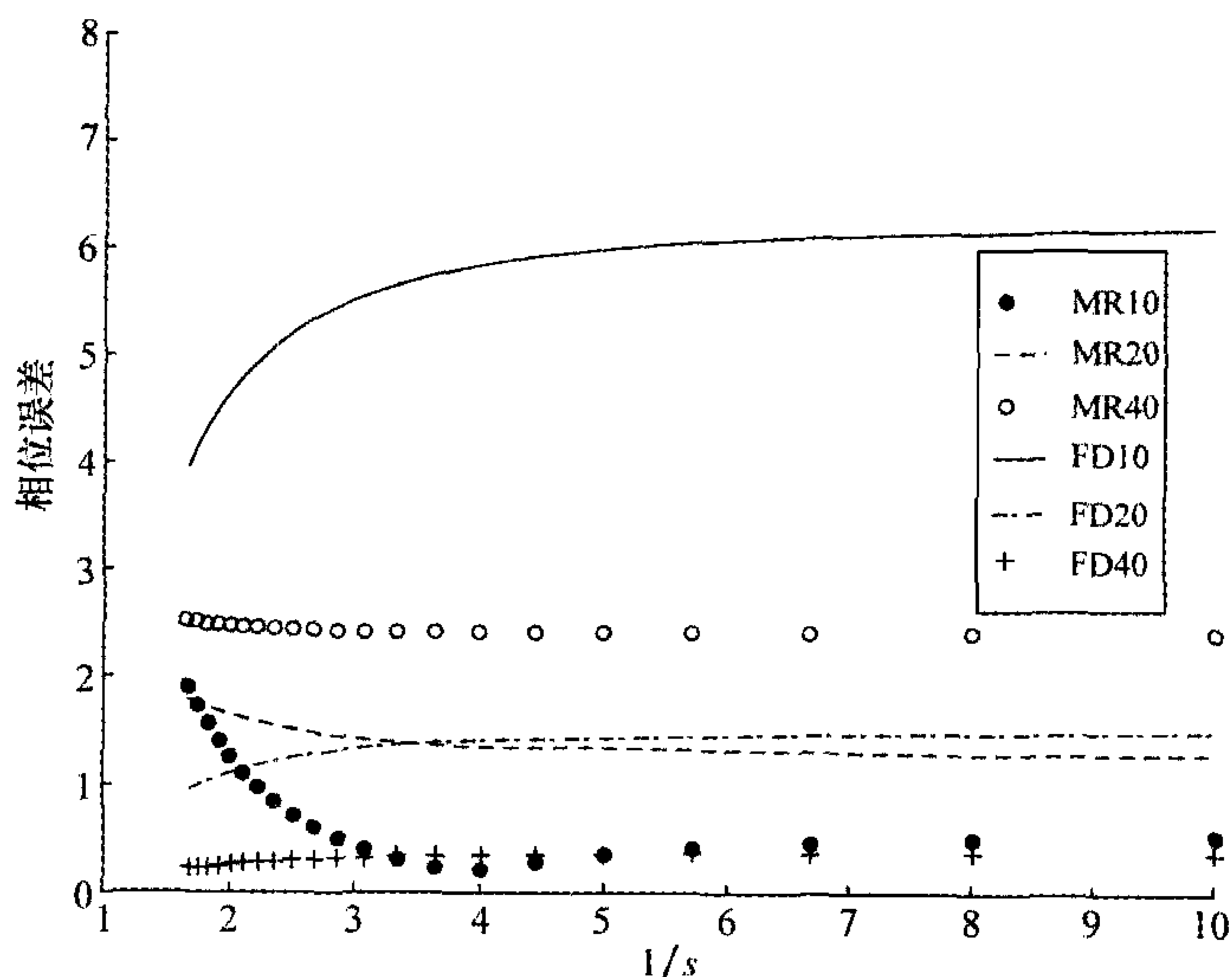


图 8-11　S-MRTD($n=8$)、FDTD 的色散特性与 Δs 值的关系

图 8-10 所示结果说明，在相同网格密度时 MRTD 比 FDTD 有较小的相位误差，且系数 $a(i)$ 项数取的越多，效果越好. 图 8-11 的结果说明，在 $a(i)$ 的项数一定的情况下，只在取样密度较低时 MRTD 比 FDTD 才表现出明显的优势.

§8.6　时域多分辨分析法的应用

时域多分辨分析法虽然已提出近 10 年，但其研究仍处于起步阶段，这主要是因为它的应用存在一定的复杂性. 在谐振腔和平面电路的分析以及散射问题的计算等方面，该方法显示了一定的优越性.

时域多分辨分析法最突出的优点是其数值色散误差比时域有限差方法的小，尤其在空间离散点较少时更加明显. 在时域有限差分法中，随着空间离散点的减少，数值色散迅速增加，甚至出现截止的状态. 因此，为保证一定的计算精度，一般要求每个波长的空间离散点不少于 10 个. 对时域多分辨分析法数值色散的分析表明，当求和式中的项数足够多时，离散采样率可以接近奈奎斯特(Nyquist)极限. 与时域有限差分法相比，用时域多分辨分析法可计算电大问题，且在用于相同问题时有更高的计算效率.

文献[55]给出了用 Battle-Lemarie 小波 S-MRTD 格式计算谐振腔谐振频率的例子. 首先，要处理理想导体边界. 由于采用非局域化的基函数，所以不能应用局域化的边界条件. 在 S-MRTD 网格中，理想导体边界条件是用镜像原理模拟的. 具体做法是将理想导体用一个具有对称的电磁场的开放结构代替. 为了保

证在理想导体原始位置上的切向电场分量为零,切向电场分量必须是非偶对称的,而切向磁场分量却必须是偶对称的.用类似的方法,也可以处理理想磁导体边界.

文献[55]还分别用两种方法计算了尺寸为 1 m×2 m×1.5 m 的谐振腔的谐振频率,腔内充满空气.时域有限差分法的均匀空间步长为 $\Delta s=0.1$ m,网格数为 3000 个;S-MRTD 网格的均匀空间步长为 $\Delta s=0.5$ m,网格数仅为 24 个.两种方法选用同一时间步长 $\Delta t=10^{-10}$ s.由表 8-4 给出的计算结果可以看出,两种方法几乎有相同的精度,但 S-MRTD 格式中所用网格数和运行时间都比 FDTD 法大为减少.

表 8-4 用 S-MRTD 格式和 FDTD 格式计算谐振腔的谐振频率

理论值/MHz	S-MRTD 网格 (网格数为 2×4×3)		FDTD 网格 (网格数为 10×20×15)	
	绝对值/MHz	相对误差/(%)	绝对值/MHz	相对误差/(%)
125.00	125.10	0.080	124.85	−0.120
180.27	180.50	0.128	179.75	0.288
213.60	214.60	0.468	212.40	−0.562
246.22	248.70	1.007	244.50	−0.699
250.00	251.00	0.400	248.70	−0.520

文献[56]分别用基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法和传统的时域有限差分法计算了谐振腔的谐振频率以及平面电路结构低通滤波器的网络参数.在分析微带低通滤波器时,前者所采用的空间步长比后者所采用的长一倍.由表 8-5 给出的其他性能参数,也可以看出时域多分辨分析法在计算效率方面的优越性.

表 8-5 用 MRTD 格式和 FDTD 格式分析微带低通滤波器

	基于 Haar 小波基的 MRTD 格式	FDTD 格式
网格数	49×39×8(非均匀)	100×80×16(均匀)
时间步长/ps	0.676 94	0.433 25
时间步数	2560	4000
计算时间	32.5 s(11 m)	45.5 s(20 m)

文献[60]将基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法用于电磁散射问题的计算,为此首先考虑了平面波的引入.文中采用的方法与时域有限差分法类似,用连接边界将计算空间分成总场区和散射场区,并将入射波作为连接边界条件引入,以保证切向场分量的连续性.与时域有限差分法相比,计算结果显示出该方

法在节省计算机资源方面的优越性.

在文献[58]中 Battle-Lemarie 小波 W-MRTD 法被用于分析开放微带线的传输特性及场分布,其截断边界采用了 PML 吸收边界. 所得场分布如图 8-12 所示,图中同时给出了 FDTD 的计算结果. FDTD 所用的网格数为 42×28,而 MRTD 只用了 12×4 个网格.

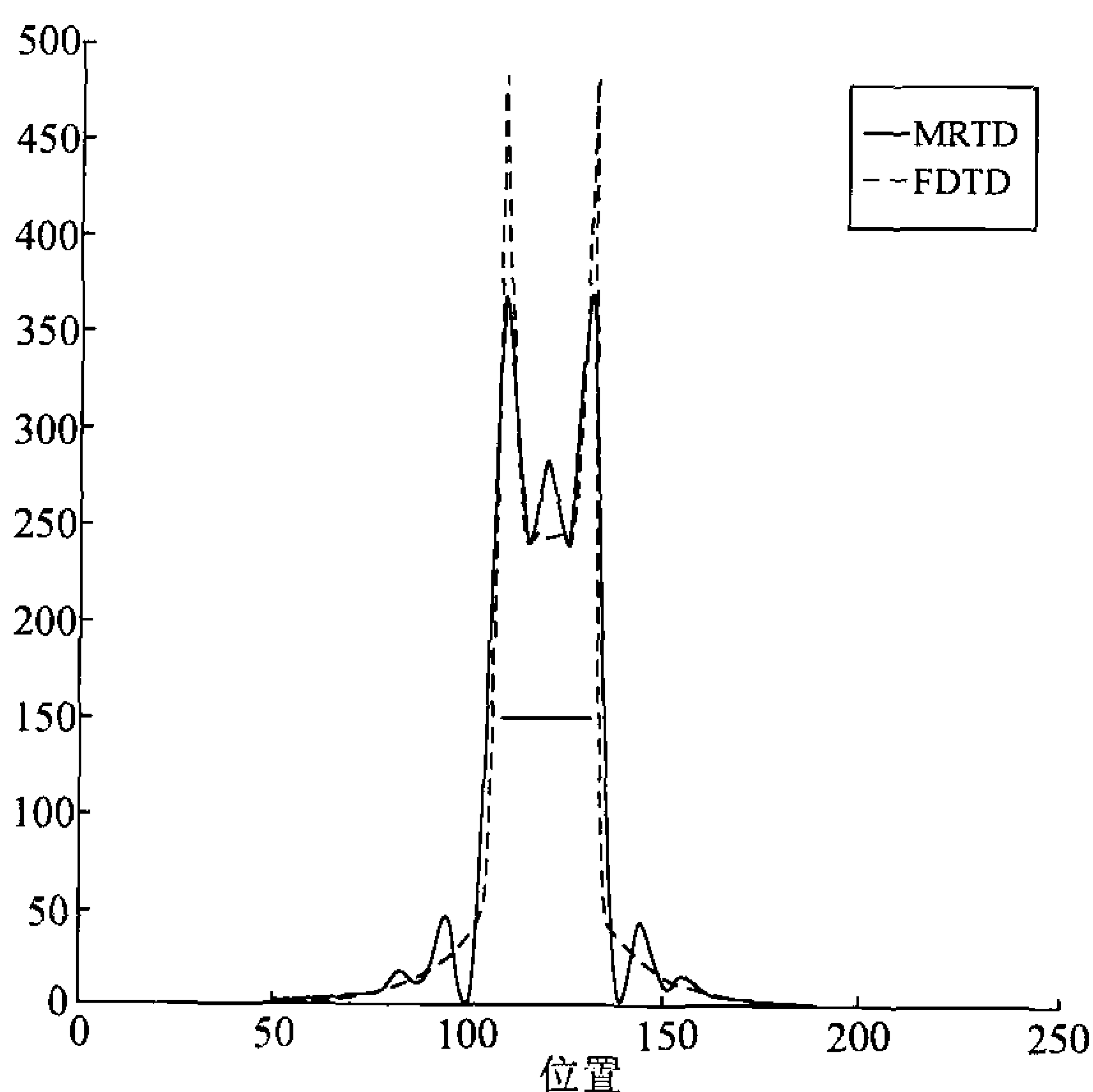


图 8-12　开放微带线 TEM 模电场分布

§8.7　基于双正交基的 MRTD[61]

从上面已做的分析可以看出,尽管 MRTD 的初始网格数(或取样点)可以取得比较少,但与 FDTD 相比方程的项数增加很多. 在 MRTD 中一个节点的场值与所有邻近节点的场值有关,这主要由展开函数的支撑集长度决定. 对 Battle Lemarie B 样条小波基而言,其支撑集为整个实轴,使得基于这种小波基的 MRTD 方程更为复杂. 为了降低计算复杂度,显然要求小波函数需具有尽量小的支撑集和尽量高阶的消失矩(即尽量好的正则性). 但是,小波理论已证明,这两项要求是相互矛盾的. 克服这一矛盾的途径之一是采用双正交基,它可以在支撑集和正则性之间取得平衡.

8.7.1　双正交小波基和取样双正交基

设有 $\psi(x)$、$\widetilde{\psi}(x)\in L^2(R)$,且

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k),\widetilde{\psi}_{j,k}(x)=2^{j/2}\widetilde{\psi}(2^jx-k),j,k\in Z.$$

如果$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$和$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{j,k\in Z}$均为$L^2(R)$的里斯(Riesz)基，且有

$$\langle\psi_{j,k},\widetilde{\psi}_{j',k'}\rangle=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'},\quad j,k,j',k'\in Z, \tag{8.7.1}$$

则称ψ是一个双正交小波函数，$\widetilde{\psi}$是ψ的对偶小波函数，而$\{\psi_{j,k}\}$和$\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$为$L^2(R)$的一对双正交对偶小波基.

如果$f(x)\in L^2(R)$，则根据以上特性可以得到

$$f(x)=\sum_{j,h\in z}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\widetilde{\psi}_{j,k}=\sum_{j,h\in z}\langle f,\widetilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k}. \tag{8.7.2}$$

因为标准正交基一定是 Riesz 基，所以当$\psi(x)=\widetilde{\psi}(x)$时，$\psi(x)$就是标准正交小波基的母函数. 由此可知，双正交小波基是标准正交小波基的推广. 双正交小波基可以从两个对偶的 MRA 出发来构造，比构造标准正交小波基的自由度增加，因此可以在紧支撑性、对称性和正则性之间找到平衡.

根据 MRTD 的需要，我们希望展开基函数具有取样特性，从而可大大简化所得方程. 为此，可利用双正交小波基的思路构造一组虽不具标准正交性但有取样性的基函数作为展开函数，再选一组与其标准正交的基函数作为检验函数. 由这样一组双正交基构成的 MRTD 一定具有预期的优越性.

由于 Daubechies 小波具有良好的紧支撑性和正则性，可以用$N=2$时的 Daubechies 尺度函数来构造所期望的展开基函数. 若$\varphi(x)$为$N=2$时的 Daubechies 尺度函数，则可证明如下定义的函数$S(x)$的平移序列$S_m(x)$具有取样特性，其中

$$S(x)=\frac{1}{\varphi(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^k\varphi(x-k+1)\right], \tag{8.7.3}$$

$$S_m(x)=\frac{1}{\varphi(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^k\varphi(x-m-k+1)\right]. \tag{8.7.4}$$

$S_m(x)$的取样特性为

$$S_m(n)=\delta_{m,n}. \tag{8.7.5}$$

由 Daubechies 尺度函数的支撑集特性可知，当$N=2$时，$\varphi(x)$的支撑集为$[0,3]$，于是式(8.7.4)等号的右侧Σ号之后，当$x=n$时，只有两项不为零，即

$$n-m-k+1=\begin{cases}1,\\2,\end{cases}$$

也就是

$$k=\begin{cases}n-m,\\n-m-1,\end{cases}$$

于是有

$$S_m(n)=\frac{1}{\varphi(1)}\left[\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{n-m}\varphi(1)+\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{n-m-1}\varphi(2)\right]. \quad (8.7.6)$$

当 $n=m$ 时，k 取值 0，−1. 由于式(8.7.4)中的 k 是从 $k=0$ 开始，$k=-1$ 不在取和范围，故式(8.7.6)中的第二项应该舍去，于是有

$$S_m(m)=\frac{1}{\varphi(1)}\left[\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{0}\varphi(1)\right]=1, \quad (8.7.7)$$

当 $n\neq m$ 时，由于 $\varphi(2)$ 是负值，故有

$$S_m(n)=\frac{1}{\varphi(1)}\left[-\frac{|\varphi(2)|^{n-m}}{\varphi(1)^{n-m-1}}+\frac{|\varphi(2)|^{n-m}}{\varphi(1)^{n-m-1}}\right]=0. \quad (8.7.8)$$

综合式(8.7.7)和(8.7.8)就得到式(8.7.5). 遗憾的是，$S(x)$ 的平移系并不构成标准正交基，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_m(x)S_n(x)\neq\delta_{m,n}.$$

不过，函数序列

$$Q_n(x)=\sum_{p\in z}\varphi(n-p)\varphi(x-p),\quad n\in Z, \quad (8.7.9)$$

却是与 $S_m(x)$ 标准正交的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_m(x)Q_n(x)\mathrm{d}x=\delta_{m,n}, \quad (8.7.10)$$

也就是说，序列 $\{S_m(x)\}$ 和 $\{Q_n(x)\}$ 是一组双正交基. 下面对式(8.7.10)给予证明.

由于 $\varphi(x)$ 的紧支撑性，$Q_n(x)$ 可以表示为

$$Q_n(x)=\varphi(1)\varphi(x-n+1)+\varphi(2)\varphi(x-n+2). \quad (8.7.11)$$

由此可知 $Q_n(x)$ 的支撑集为 $[n-2,n+2]$. 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_m(x)Q_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\varphi(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-m-k+1)[\varphi(1)\varphi(x-n+1)+\varphi(2)\varphi(x-n+2)]\mathrm{d}x$$

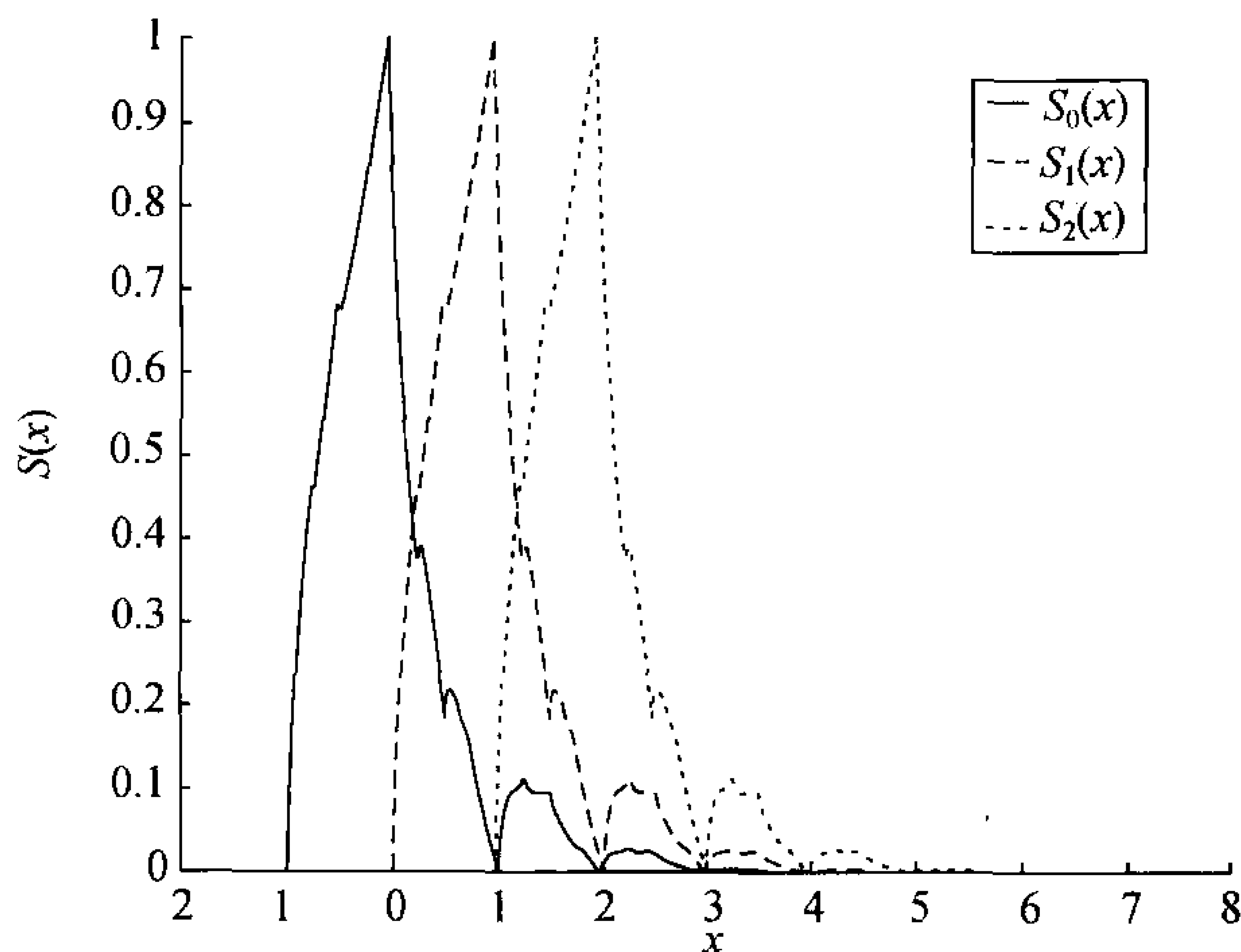
$$=\frac{1}{\varphi(1)}\left[\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{n-m}\varphi(1)+\left(\frac{|\varphi(2)|}{\varphi(1)}\right)^{n-m-1}\varphi(2)\right]. \quad (8.7.12)$$

在最后一步中用到了 Daubechies 尺度函数的标准正交特性，即

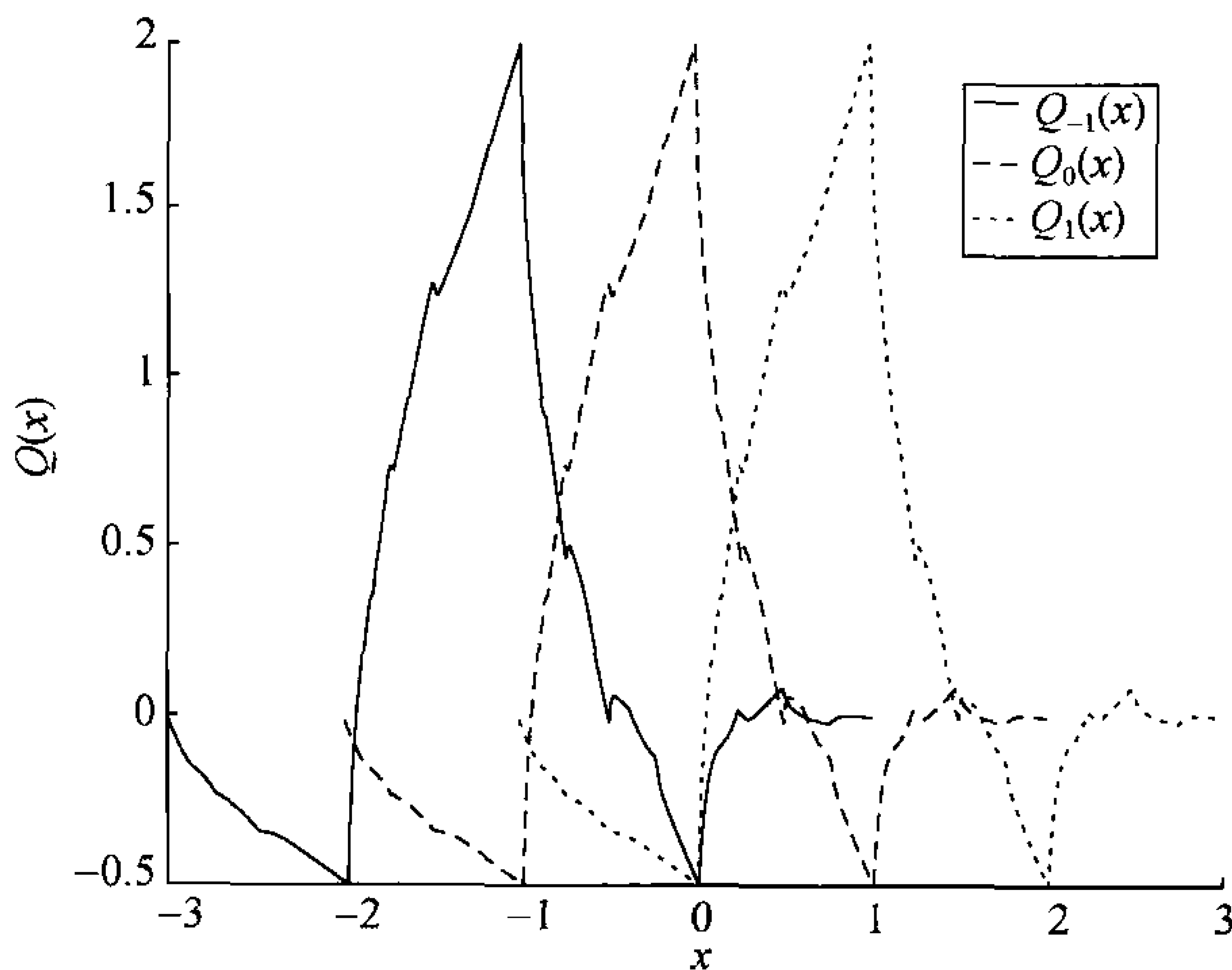
$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-k)\varphi(x-l)\mathrm{d}x=\delta_{k,l}.$$

由于式(8.7.12)与式(8.7.6)相同，故式(8.7.10)得到了证明.

$S(x)$ 和 $Q(x)$ 的波形由图 8-13 给出.



(a) $S(x)$的波形



(b) $Q(x)$的波形

图 8-13　$S(x)$和 $Q(x)$的波形

在基于 Battle-Lemarie 小波基的 MRTD 中曾用到尺度函数的性质(8.4.11). 对双正交函数 $S(x)$和 $Q(x)$,也有类似的结果.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_l(x)\,\frac{\partial}{\partial x}S_{l'+\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=-3}^{2} c(i)\,\delta_{l+i,l'}, \tag{8.7.13}$$

其中

$$\begin{aligned} c(i) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q_{-i}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{-i}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega \mid \hat{\varphi}(\omega) \mid^2 \sin\left[\omega\left(i+\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{8.7.14}$$

而且

$$c(-1-i)=-c(i),\quad i=0,1,2.$$

$c(i)$的值由表 8-6 给出.

表 8-6　系数 $c(i)$

i	$c(i)$
0	1.22916661202745
1	−0.09374997764764
2	0.01041666418309

8.7.2　基于取样双正交基的 MRTD

按照类似的步骤,可用上面构建的双正交基构造电磁场计算的一种 MRTD.由于这一方法用到了具有取样特性的展开函数,在文献[61]中也称之为取样双正交基时域方法(Sampling Biorthogenal Time Demain Method,简称 SBTD).

在 SBTD 中,展开基函数取成

$$s_m(u)=S\left(\frac{u}{\Delta u}-m\right),\quad u=x,y,z,\tag{8.7.15}$$

检验函数则取为

$$q_n(u)=Q\left(\frac{u}{\Delta u}-n\right),\quad u=x,y,z.\tag{8.7.16}$$

而时间离散函数仍用脉冲函数 $h(t)$,但取

$$h_k(t)=h\left(\frac{t}{\Delta t}-k+\frac{1}{2}\right).\tag{8.7.17}$$

假设应用对象是三维麦克斯韦旋度方程,但只对其中一个分量方程

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right).\tag{8.7.18}$$

进行推导.3 个场分量用 $h_k(t)$和 $s_m(u)$展开为

$$\begin{aligned}
E_x(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{k,l,m,n}{}_kE^x_{l+\frac{1}{2},m,n}h_k(t)s_{l+\frac{1}{2}}(x)s_m(y)s_n(z),\\
H_y(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{k,l,m,n}{}_{k+\frac{1}{2}}H^y_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}h_{k+\frac{1}{2}}(t)s_{l+\frac{1}{2}}(x)s_m(y)s_{n+\frac{1}{2}}(z),\\
H_z(\boldsymbol{r},t)&=\sum_{k,l,m,n}{}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}h_{k+\frac{1}{2}}(t)s_{l+\frac{1}{2}}(x)s_{m+\frac{1}{2}}(y)s_n(z).
\end{aligned}\tag{8.7.19}$$

把这些表示式代入方程(8.7.18),然后用 $q_{l'+\frac{1}{2}}(x)$,$q_{m'}(y)$,$q_{n'}(z)$和 $h_{k'+\frac{1}{2}}(t)$作为检验函数施以伽辽金法,则方程的左侧为

$$\sum_{k,l,m,n} {}_kE^x_{l+\frac{1}{2},m,n}\left[\int h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial}{\partial t}h_k(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\cdot\left[\int q_{l'+\frac{1}{2}}(x)s_{l+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int q_{m'}(y)s_m(y)\mathrm{d}y\right]\left[\int q_{n'}(z)s_n(z)\mathrm{d}z\right]$$

$$=({}_{k+1}E^x_{l+\frac{1}{2},m,n}-{}_kE^x_{l+\frac{1}{2},m,n})\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{8.7.20}$$

其中用到了

$$\int h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\frac{\partial}{\partial t}h_k(t)\mathrm{d}t=\delta_{k,k'+1}-\delta_{k,k'}$$

$$\int q_{m'}(u)s_m(u)\mathrm{d}u=\delta_{m,m'}\Delta u,\quad u=x,y,z$$

由方程(8.7.18)右侧第一项得到

$$\sum_{k,l,m,n} {}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\left[\int h_{k+\frac{1}{2}}(t)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\cdot\left[\int q_{l'+\frac{1}{2}}(x)s_{l+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int q_m{}'(y)\frac{\partial}{\partial y}s_{m+\frac{1}{2}}(y)\mathrm{d}y\right]\left[\int q_{n'}(z)s_n(z)\mathrm{d}z\right]$$

$$=\sum_{k,l,m,n} {}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\delta_{k,k'}\delta_{l,l'}\delta_{n,n'}\Delta t\Delta x\Delta z\int q_{m'}(y)\frac{\partial}{\partial y}s_{m+\frac{1}{2}}(y)\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}\Delta t\Delta x\Delta z. \tag{8.7.21}$$

类似的方法可以处理方程(8.7.18)的第二部分，并结合上面的结果，最后得到

$${}_{k+1}E^x_{l+\frac{1}{2},m,n}={}_kE^x_{l+\frac{1}{2},m,n}+\frac{\Delta t}{\varepsilon_{l+\frac{1}{2},m,n}}\left[\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^y_{l+\frac{1}{2},m,n+i+\frac{1}{2}}\right]. \tag{8.7.22}$$

同样地，可以从麦克斯韦旋度方程的其他 5 个分量方程得到

$${}_{k+1}E^y_{l,m+\frac{1}{2},n}={}_kE^y_{l,m+\frac{1}{2},n}+\frac{\Delta t}{\varepsilon_{l,m+\frac{1}{2},n}}\left[\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^x_{l+i,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}+i}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^z_{l+i+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\right]. \tag{8.7.23}$$

$${}_{k+1}E^z_{l,m,n+\frac{1}{2}}={}_kE^z_{l,m,n+\frac{1}{2}}+\frac{\Delta t}{\varepsilon_{l,m,n+\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^y_{l+i+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_{k+\frac{1}{2}}H^x_{l,m+i+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\right]. \tag{8.7.24}$$

$${}_{k+\frac{1}{2}}H^x_{l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}={}_{k-\frac{1}{2}}H^x_{l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\Delta t}{\mu_{l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-3}^{2}c(i)\,{}_kE^y_{l,m+\frac{1}{2},n+i+1}\right.$$

$$-\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{z}_{l,m+i+1,n+\frac{1}{2}}\Big]. \tag{8.7.25}$$

$$\begin{aligned}{}_{k+\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}} &= {}_{k-\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{\Delta t}{\mu_{l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}}\Big[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{z}_{l+i+1,m+\frac{1}{2},n} \\ &-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{x}_{l+\frac{1}{2},m,n+i+1}\Big].\end{aligned} \tag{8.7.26}$$

$$\begin{aligned}{}_{k+\frac{1}{2}}H^{z}_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n} &= {}_{k-\frac{1}{2}}H^{z}_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n} \\ &+\frac{\Delta t}{\mu_{l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}}\Big[\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{x}_{l+\frac{1}{2},m+i+1,n} \\ &-\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{y}_{l+i+1,m+\frac{1}{2},n}\Big].\end{aligned} \tag{8.7.27}$$

对于二维问题，方程具有更简单的形式. 例如根据方程(7.1.2)～(7.1.3)描述的 TM_z 问题中的场量，可利用展开式

$$E_z(\boldsymbol{\rho},t)=\sum_{k,l,m}{}_{k}E^{z}_{l,m}h_k(t)s_l(x)s_m(y),$$

$$H_x(\boldsymbol{\rho},t)=\sum_{k,l,m}{}_{k+\frac{1}{2}}H^{x}_{l,m+\frac{1}{2}}h_{k+\frac{1}{2}}(t)s_l(x)s_{m+\frac{1}{2}}(y),$$

$$H_y(\boldsymbol{\rho},t)=\sum_{k,l,m}{}_{k+\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2},m}h_{k+\frac{1}{2}}(t)s_{l+\frac{1}{2}}(x)s_m(y).$$

通过与上面类似的伽辽金法，便可得到

$${}_{k+1}E^{z}_{l,m}={}_{k}E^{z}_{l,m}+\frac{\Delta t}{\varepsilon_{l,m}}\Big[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k+\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2}+i,m}-\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k+\frac{1}{2}}H^{x}_{l,m+\frac{1}{2}+i}\Big], \tag{8.7.28}$$

$${}_{k+\frac{1}{2}}H^{x}_{l,m+\frac{1}{2}}={}_{k-\frac{1}{2}}H^{x}_{l,m+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta t}{\mu_{l,m+\frac{1}{2}}}\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{z}_{l,m+i}, \tag{8.7.29}$$

$${}_{k+\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2},m}={}_{k-\frac{1}{2}}H^{y}_{l+\frac{1}{2},m}+\frac{\Delta t}{\mu_{l+\frac{1}{2},m}}\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-3}^{2}c(i)_{k}E^{z}_{l+i,m}. \tag{8.7.30}$$

由以上获得的方程可以看出，由于所用展开基函数具有取样特性，使获得的方程具有简单的形式，更接近于时域有限分法中相应的差分格式.

可用§8.5中的类似方法对 SBTD 的稳定性和色散特性进行分析，当 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta s$ 时，其稳定性条件可表示为

$$\Delta t\leqslant 0.530330099\cdot\frac{\Delta s}{v}, \tag{8.7.31}$$

而数值色散的主要特点可由图 8-14 中看出，图中给出了一维时多种方法下相位误差与取样数之间的关系. 图 8-15 则给出了二维时多种方法下相位误差与传输角度之间的关系. 以上结果都显示，SBTD 比 FDTD 有较大的改进.

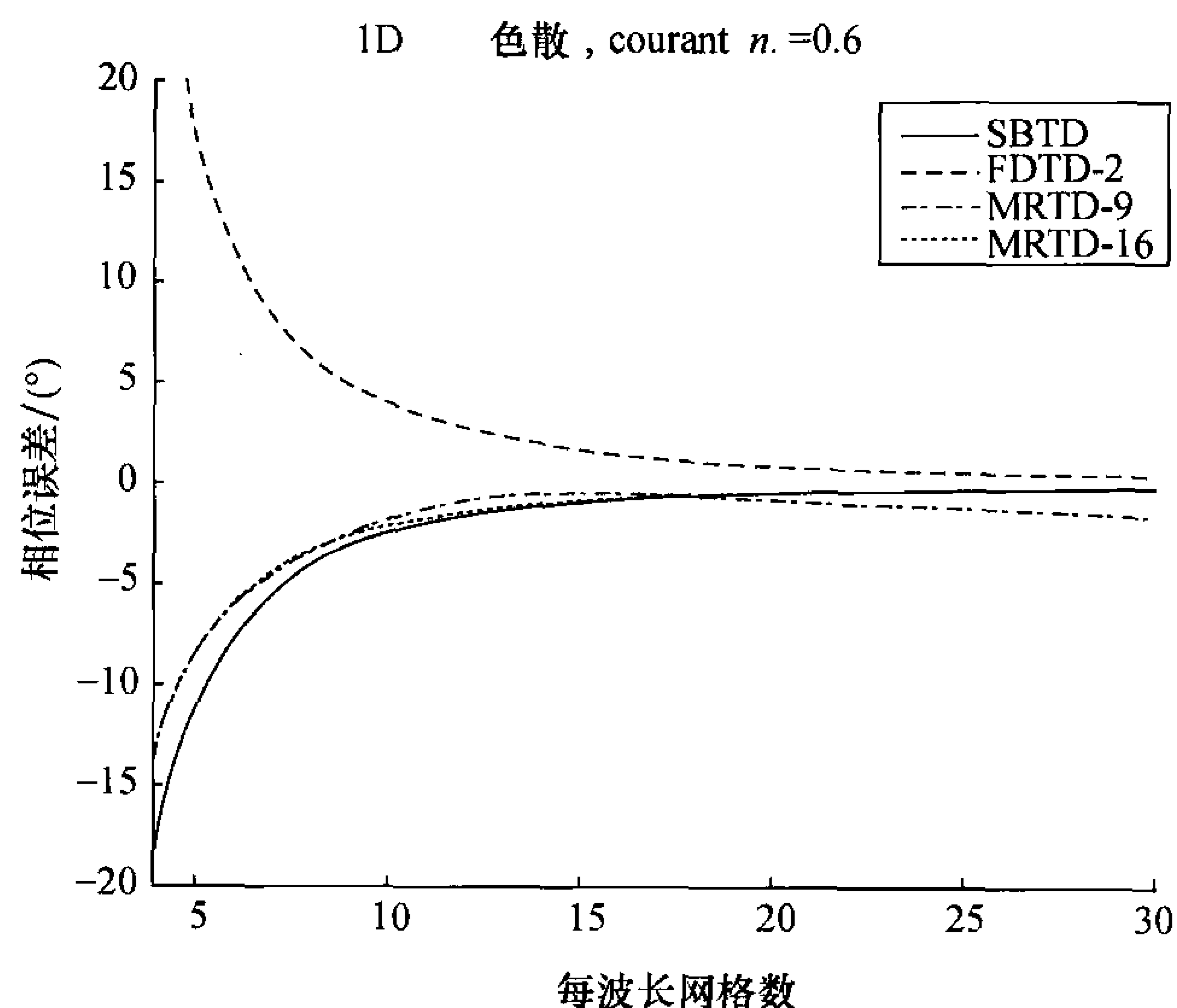


图 8-14 相位误差与取样数的关系

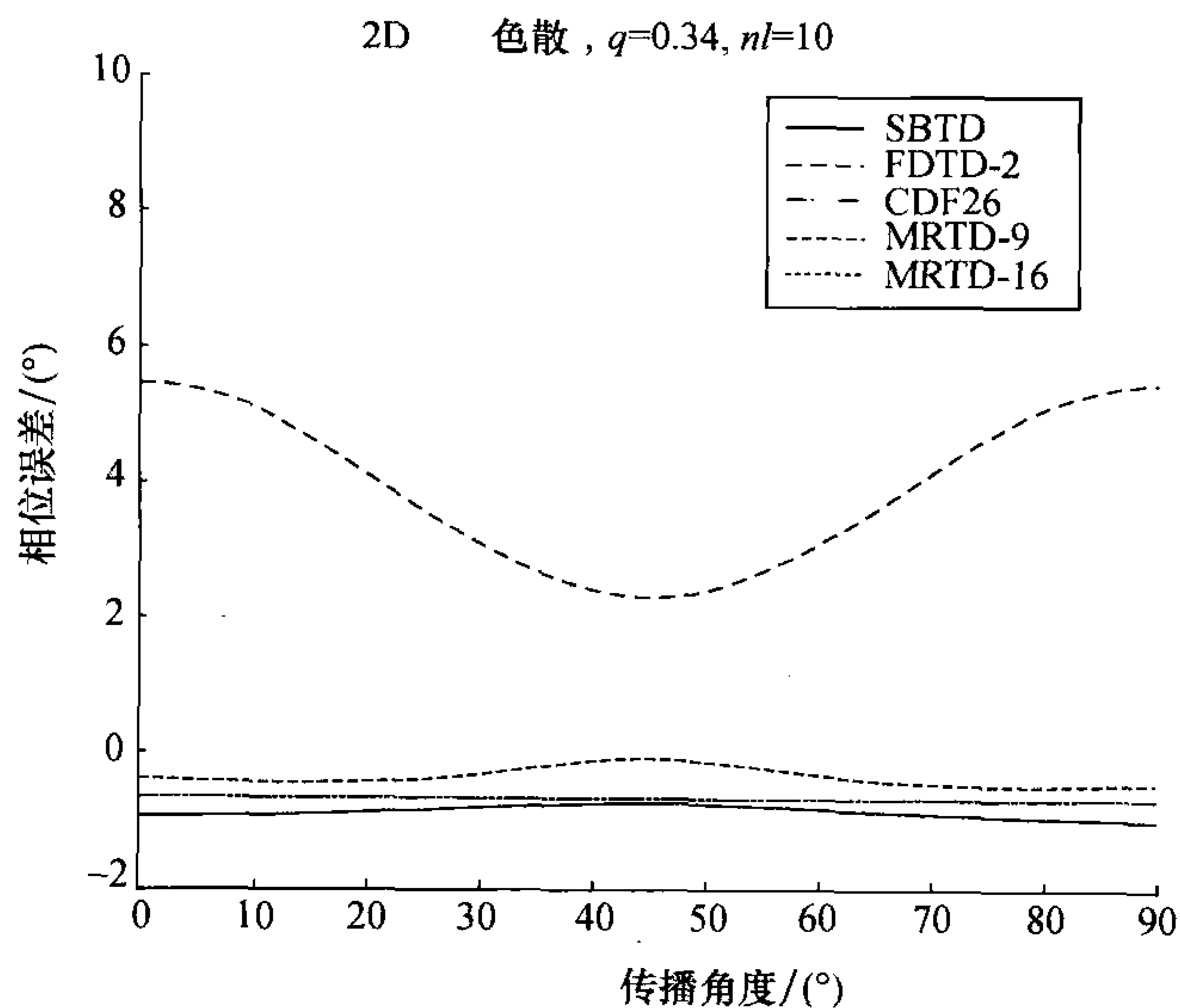


图 8-15 相位误差与传播角度之间的关系

$(q=v\Delta t/\Delta s, n_l=\lambda/\Delta s)$

8.7.3 应用实例

在文献[61]中给出了数个应用 SBTD 的计算实例，其中包括二维和三维金属谐振空腔，也分析了三维谐振腔部分介质填充的问题和贴片天线问题. 下面仅介绍三维谐振空腔的应用情况.

理想导体构成的三维矩形空腔的尺度为 1.2 m×0.6 m×0.8 m，时间步长 $\Delta t = 8\times10^{-10}$ s. 文献中用 FDTD 和 SBTD 两种方法进行了计算，计算网格数都取为6×3×4=72. 经 FFT 处理，把计算结果转换到频域，所得的电场幅度与频率的关系由图 8-16(a)给出. 计算中 FDTD 法用了 23.8 s，而 SBTD 法则用了 125.7 s. 但是，这时的 FDTD 计算结果存在相当大的误差. 为提高 FDTD 的计算精度，把网格数增加为 24×12×16=4608，这时的结果由图 8-16(b)给出，其精度已比较接近 SBTD 法用 72 网格的计算结果，而这时 FDTD 的计算时间已经增加到 1608.3 s. 由此可以看出，SBTD 比 FDTD 在计算效率上已有很大提高.

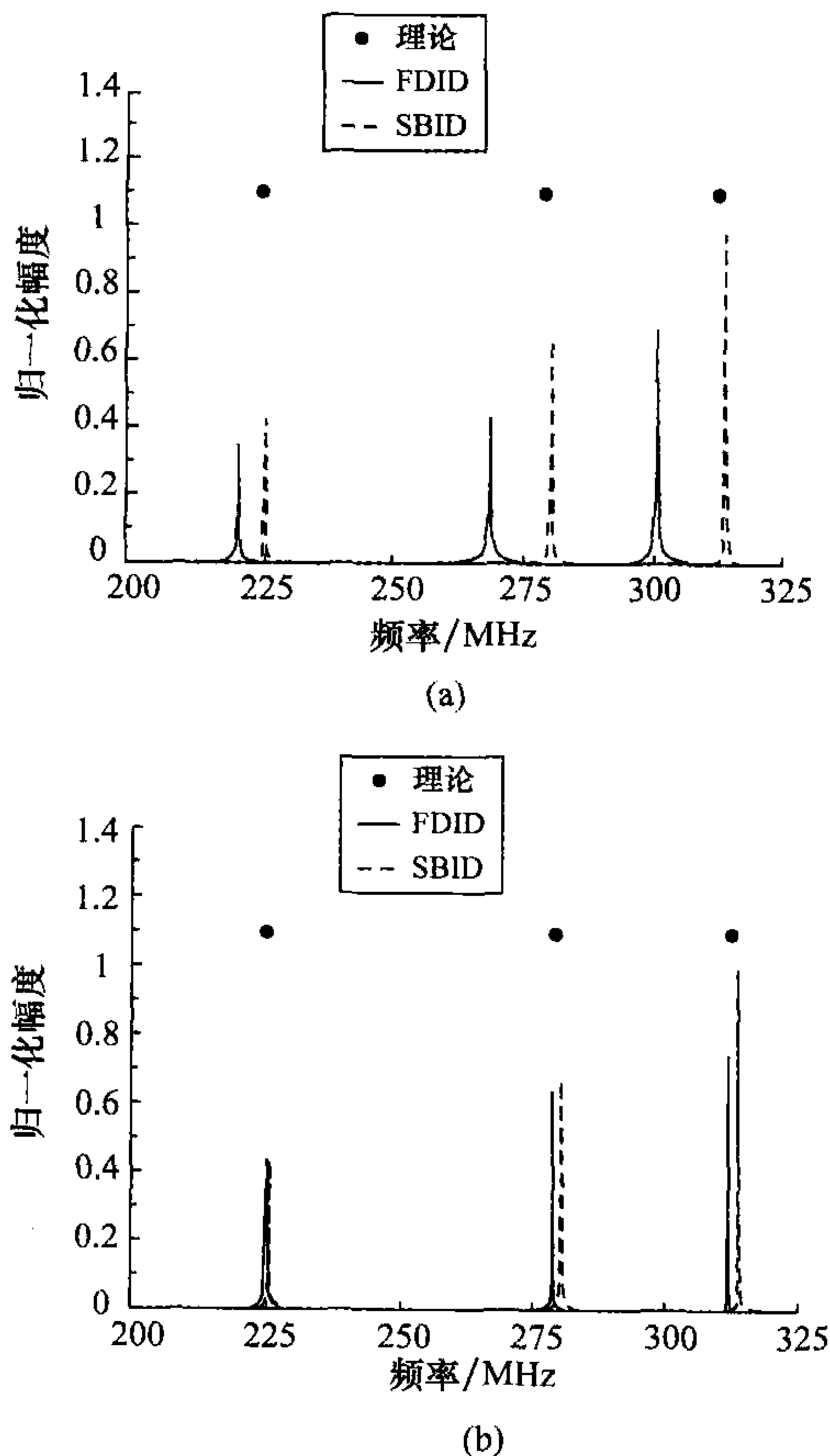


图 8-16　SBTD 与 FDTD 对三维空腔电场幅度计算结果的比较

第九章　时域有限元法

尽管前面介绍的几种电磁场的时域方法各具特色，并在不同方面得到了应用. 尤其是时域有限差分法，由于其编程简便和适应性强，应用已相当广泛. 但它们仍然存在各自的问题，如在精确模拟复杂弯曲表面方面，时域有限差分法及时域多分辨分析法存在严重缺点. 在频域有限元方法的讨论中，已知有限元法最突出的优点正是对复杂几何结构的精确模拟. 基于此种情况，尽管计算复杂度较高，人们还是致力于有限元法的时域应用研究，从而形成了电磁场计算的时域有限元法(Finite-Element Method Time Domain，简称 FEMTD). 应该说，时域有限元法的发展还处于初级阶段，尚末得到广泛的应用，但作为一种发展方向还是应该给予关注. 本章将对时域有限元法已取得的研究成果作简要介绍.

§9.1　时域有限元法的基本原理[23,63]

时域有限元法的发展是以频域有限元法为基础的，尤其是在计算域的离散划分和基函数的构造等方面两者较为一致，它们的主要差别是增加了时间变量的离散及相应计算格式的建立. 在已发展的时域有限元法中多用加权余量法建立有限元方程，尤其是伽辽金法. 出发点则分为两类，一类是直接从依赖时间的麦克斯韦旋度方程出发，另一类则是从导出的矢量波动方程出发.

9.1.1　基于麦克斯韦旋度方程的时域有限元法

考虑一个区域 V，边界为 S，其内部媒质的特性用 ε 和 μ 表示(二者均可能是空间位置的函数). 设 V 的内部存在电流分布 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$，于是，$V$ 内的电磁场满足麦克斯韦旋度方程

$$\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J},\quad \mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E}. \tag{9.1.1}$$

作为初边值问题，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量或其间的阻抗关系在 S 上对时间 $t\geqslant 0$ 必须是确定的. 为了保证解的唯一性，设在 $t=0$ 时 V 内的初始场是已知的. 这时，方程(9.1.1)的解是存在且唯一的，可以通过加权余量法或伽辽金法建立时域有限元的两种基本方程.

若选 V 内平方可积的矢量函数 $\boldsymbol{v}$ $[\boldsymbol{v}\in L^2(V)^3]$ 作为检验函数并作用于方程(9.1.1)，则有

$$\int_V \boldsymbol{v}\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}\right)\mathrm{d}V=0, \tag{9.1.2}$$

$$\int_V \boldsymbol{v}\cdot\left(\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V=0. \tag{9.1.3}$$

若以上两式对所有的$\boldsymbol{v}$成立，则称其为方程(9.1.1)的一种弱形式. 若 S 上的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},\quad 在\ S_e\ 上,$$
$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0},\quad 在\ S_h\ 上,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 上的法向单位矢量，S_e 和 S_h 分别为理想导电体和理想导磁体表面，且 $S_e+S_h=S$.

通过方程(9.1.2)和(9.1.3)，可寻求试探空间 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$，且 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\in H_e(\mathrm{curl},\ V)\times(0,T)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\in H_h(\mathrm{curl},\ V)\times(0,T)$，且

$$H_e(\mathrm{curl},\ V)=\{\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{u},\nabla\times\boldsymbol{u}\in L^2(V)^3,\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\ 在\ S_e\ 上\}, \tag{9.1.4}$$

$$H_h(\mathrm{curl},\ V)=\{\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{u},\nabla\times\boldsymbol{u}\in L^2(V)^3,\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\ 在\ S_h\ 上\}, \tag{9.1.5}$$

其中$(0,T)$为时间取值范围.

第二种弱形式是通过将检验函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}\in L^2(V)^3)$和$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\psi}\in H(\mathrm{curl},V))$分别作用于方程(9.1.1)中的两式获得的，即有

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}\right)\mathrm{d}V=0, \tag{9.1.6}$$

$$\int_V \left(\boldsymbol{\psi}\cdot\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{\psi}\cdot\boldsymbol{E}\right)\mathrm{d}V=0. \tag{9.1.7}$$

这时允许的试探空间为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\in L^2(V)^3\times(0,T)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\in H(\mathrm{curl},V)\times(0,T)$，其中

$$H(\mathrm{curl},V)=\{\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{u},\nabla\times\boldsymbol{u}\in L^2(V)^3,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\ 在\ S\ 上\}, \tag{9.1.8}$$

且存在自然边界条件

$$\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0},\quad 在\ S_h\ 上.$$

下文将以节点有限元和点配法的简单情况为例构造时域有限元方程. 与时域有限差分法不同的是，在应用点配法的时域有限元法中，电场的 3 个分量设置在同一个节点上，磁场的 3 个分量设置在另一个节点上. 于是，为了对 V 中的场进行数值近似，应使用两套互补的网格，每个电场节点和每个磁场节点交叉放置. 电磁场可分别近似地表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{i=1}^{N_e}\alpha_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_i(t),\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{j=1}^{N_h}\beta_j(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}_j(t), \tag{9.1.9}$$

其中 N_e 和 N_h 分别为电场和磁场网格中的节点数，$\alpha_i(\boldsymbol{r})$和 $\beta_j(\boldsymbol{r})$分别为用于对网格中的电磁场进行有限元近似的标量函数，即

$$\alpha_i(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i,\\ 0, & 其他节点,\end{cases}$$

$$\beta_i(\boldsymbol{r})=\begin{cases}1, & \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_j,\\ 0, & 其他节点.\end{cases}$$

为了完成加权余量法的处理过程，需定义检验函数. 选择不同的检验函数，可导致不同的显式或隐式算法，点配法是导出显式算法的最直接的方法. 在该方法中，选取 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)(i=1,2,\cdots,N_e)$ 和 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)(j=1,2,\cdots,N_h)$ 分别作为检验函数作用于方程(9.1.2)和(9.1.3)，并将式(9.1.9)代入，由此得到

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}_i)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{N_h}\nabla\beta_j(\boldsymbol{r})\big|_{r=r_i}\times\boldsymbol{H}_j(t)-\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}_i),\quad i=1,2,\cdots,N_e,\tag{9.1.10}$$

$$\mu(\boldsymbol{r}_j)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_j(t)}{\mathrm{d}t}=-\sum_{i=1}^{N_e}\nabla\alpha_j(\boldsymbol{r})\Big|_{r=r_j}\times\boldsymbol{E}_i(t),\quad j=1,2,\cdots,N_h,\tag{9.1.11}$$

以上两式可写成更紧凑的矩阵形式，为此引入

$$\overline{\boldsymbol{E}}=[\overline{\boldsymbol{E}}_1(t),\overline{\boldsymbol{E}}_2(t),\cdots,\overline{\boldsymbol{E}}_{N_e}(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{\boldsymbol{H}}=[\overline{\boldsymbol{H}}_1(t),\overline{\boldsymbol{H}}_2(t),\cdots,\overline{\boldsymbol{H}}_{N_h}(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{\boldsymbol{J}}(t)=[\overline{\boldsymbol{J}}_1(t),\overline{\boldsymbol{J}}_2(t),\cdots,\overline{\boldsymbol{J}}_{N_e}(t)]^{\mathrm{T}},$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{E}}_i(t)=[E_{ix}(t),E_{iy}(t),E_{iz}(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{\boldsymbol{H}}_i(t)=[H_{jx}(t),H_{jy}(t),H_{jz}(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\overline{\boldsymbol{J}}(t)=[J_x(\boldsymbol{r}_i,t),J_y(\boldsymbol{r}_i,t),J_z(\boldsymbol{r}_i,t)]^{\mathrm{T}},$$
$$i=1,2,\cdots,N_e,\quad j=1,2,\cdots,N_h.$$

显然，$\overline{\boldsymbol{E}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 均为 $3N_e$ 维矢量，$\overline{\boldsymbol{H}}$ 为 $3N_h$ 维矢量. 从而，方程(9.1.10)和(9.1.11)等号右侧的第一项可分别表示为如下形式，即

$$\nabla\beta_j(\boldsymbol{r})\big|_{r=r_i}\times\boldsymbol{H}_j(t)=\begin{bmatrix}0&-\dfrac{\partial\beta_j}{\partial z}&\dfrac{\partial\beta_j}{\partial y}\\\dfrac{\partial\beta_j}{\partial z}&0&-\dfrac{\partial\beta_j}{\partial x}\\-\dfrac{\partial\beta_j}{\partial y}&\dfrac{\partial\beta_j}{\partial x}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{jx}\\H_{jy}\\H_{jz}\end{bmatrix}=D_{hj}^{i}\overline{\boldsymbol{H}}_j,\tag{9.1.12}$$

$$\nabla\alpha_j(\boldsymbol{r})\big|_{r=r_j}\times\boldsymbol{E}_i(t)=\begin{bmatrix}0&-\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z}&\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y}\\\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z}&0&-\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x}\\-\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y}&\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{ix}\\E_{iy}\\E_{iz}\end{bmatrix}=D_{ei}^{j}\overline{\boldsymbol{E}}_i,\tag{9.1.13}$$

其中

$$
\boldsymbol{D}_{h_j}^{i}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial z} & \dfrac{\partial\beta_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\beta_j}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial y} & \dfrac{\partial\beta_j}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{r=r_i}
$$

$$
\boldsymbol{D}_{e_i}^{j}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial i}{\partial z} & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial i}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y} & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{r=r_j}
$$

式中上角标 i 和 j 分别表示相应的矩阵元素是在 $\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,N_e)$ 和 $\boldsymbol{r}_j(j=1,2,\cdots,N_h)$ 的作用下求出的. 在此基础上，构造两个扩展矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，其元素分别为 $p_{ij}=D_{hj}^{i}$ 和 $q_{ji}=D_{ei}^{j}$. 再引入描述电磁场各节点媒质电磁特性的对角矩阵，即介电常数矩阵 $\boldsymbol{S}$，其元素为 $s_{ii}=\varepsilon(\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{I}_3$ 和磁导率矩阵 $\boldsymbol{T}$，其元素为 $t_{jj}=\mu(\boldsymbol{r}_j)\boldsymbol{I}_3$，其中 $\boldsymbol{I}_3$ 为 3×3 阶单位矩阵. 利用以上矢量和矩阵，方程(9.1.10)和(9.1.11)可分别表示为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{P}\cdot\overline{\boldsymbol{H}}-\boldsymbol{S}^{-1}\overline{\boldsymbol{J}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\boldsymbol{H}}=-\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}. \tag{9.1.14}
$$

对时间变量可以采用差分近似，例如可对时间导数采用中心差分近似. 当采用时间步长 Δt 时，计算磁场的时刻相对于计算电场的时刻移动了一个半时间步，从而形成一种“蛙跳式”的计算格式. 这种显式格式是有条件稳定的，其数值稳定条件可表示为[63]

$$
\Delta t\leqslant\frac{2}{|\lambda_{\max}(\boldsymbol{R})|}, \tag{9.1.15}
$$

其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{PQT}^{-1}$，$|\lambda_{max}(\boldsymbol{S})|$ 为矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的最大特征值.

这种节点有限元法的最大缺点是将电场分量和磁场分量分别放置在同一个节点上. 由于媒质的电磁性质在边界上急剧变化，给设置边界条件造成困难，使得边界上的节点需要特殊处理. 为此，提出了几种改进方法，其中包括使用矢量有限元法.

9.1.2　基于矢量波动方程的时域有限元法

在前一小节中所描述的初边值问题可由方程(9.1.1)所导出的矢量波动方程及相应的初始边界条件等价地描述为

$$\begin{cases}\nabla\times\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}, & \boldsymbol{r}\in V,\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } S_e \text{ 上},\\ \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}, & \text{在 } S_h \text{ 上}.\end{cases}\tag{9.1.16}$$

以此为基础,可以用加权余量法导出时域有限元方程.

1. 空间离散

用$\boldsymbol{v}$点乘式(9.1.16)中的矢量波动方程,并在V中积分,就得到该方程的弱形式

$$\int_V\left(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=0.\tag{9.1.17}$$

还可将上式改为使试探函数和检验函数更加对称的形式,即

$$\int_V\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=0.\tag{9.1.18}$$

为导出时域矢量有限元方程,利用矢量基函数$\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r})$($i=1,2,\cdots,N$,其中$N$为未知量的个数),电场可展开为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{N}_j(\boldsymbol{r})E_j(t).\tag{9.1.19}$$

对方程(9.1.18)运用伽辽金法,用$\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r})$代替$\boldsymbol{v}$并将上式代入,可得

$$\int_V\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\sum_{j=1}^{N}\nabla\times\boldsymbol{N}_jE_j+\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{N}_j\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_j+\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=0,$$
$$i=1,2,\cdots,N.\tag{9.1.20}$$

该方程也可写成矩阵形式,为此令

$$\overline{\boldsymbol{E}}=[E_1,E_2,\cdots,E_N]^{\mathrm{T}},$$

构造矩阵$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{S}$,并定义矢量$\boldsymbol{f}$,其元素分别为

$$t_{ij}=\int_V\varepsilon\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{N}_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V,\tag{9.1.21}$$

$$s_{ij}=\int_V\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r})\cdot\nabla\times\boldsymbol{N}_j(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V,\tag{9.1.22}$$

$$f_i=\int_V\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\mathrm{d}V,\tag{9.1.23}$$

$$i,j=1,2,\cdots,N.$$

利用以上矢量和矩阵,方程(9.2.20)可表示为

$$\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}^2\overline{\boldsymbol{E}}}{\mathrm{d}t^2}+\boldsymbol{S}\cdot\overline{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{f}=0.\tag{9.1.24}$$

这是一个二阶常微分矢量方程,可以用有限差分法进行求解.

2. 时间离散

为了对方程(9.1.24)应用有限差分法,需将待求解的时间段$(0,T)$均匀地

划分为 P 段,其中每一段均用时间步长 Δt 表示,n 为迭代时间步数($n=1,2,\cdots,P$).采用以下不同的差分形式,即可得到性质不同的算法.为简便起见,仍然采用前一小节中的表示方法.

(1) 向前差分法

$\boldsymbol{E}$ 的一阶导数的向前差分为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n+1}-\boldsymbol{E}^{n}}{\Delta t},\tag{9.1.25}$$

由此可得到其二阶导数的差分表示

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t^2}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n+2}-2\boldsymbol{E}^{n+1}+\boldsymbol{E}^{n}}{(\Delta t)^2}.\tag{9.1.26}$$

将上式代入方程(9.1.24),可得

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n+1}=\frac{2}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n}-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}-\boldsymbol{f}^{n-1}.\tag{9.1.27}$$

显然,给定 $\boldsymbol{f}^n$ 和初值 $\boldsymbol{E}^0$ 和 $\boldsymbol{E}^1$,就可解出 $\boldsymbol{E}^2$,从而解出 $\boldsymbol{E}^3,\boldsymbol{E}^4,\cdots$,最终计算出所感兴趣时间范围内的 $\boldsymbol{E}$.考虑到这种算法在数值上是不稳定的,故很少应用.

(2) 向后差分法

$\boldsymbol{E}$ 的一阶导数的向后差分为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n}-\boldsymbol{E}^{n-1}}{\Delta t},\tag{9.1.28}$$

由此可导出其二阶导数的向后差分表示

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t^2}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n}-2\boldsymbol{E}^{n-1}+\boldsymbol{E}^{n-2}}{(\Delta t)^2}.\tag{9.1.29}$$

将上式代入方程(9.2.24),可得

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n+1}=\frac{2}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n}-\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}-\boldsymbol{f}^{n+1}.\tag{9.1.30}$$

显然,给定 $\boldsymbol{f}^n$ 和初值 $\boldsymbol{E}^0$ 及 $\boldsymbol{E}^1$,就可解出 $\boldsymbol{E}^2$,从而解出 $\boldsymbol{E}^3,\boldsymbol{E}^4,\cdots$,但在每一时间步的计算中都要求解包含 $\boldsymbol{S}$ 在内的矩阵方程.这种形式称为隐式算法,其数值稳定性不依赖于 Δt 的选择,即是无条件稳定的.

(3) 中心差分法

如前所述,中心差分比向前差分和向后差分具有更高一阶的精度.$\boldsymbol{E}$ 的一阶导数的中心差分为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n+1}-\boldsymbol{E}^{n-1}}{2\Delta t},\tag{9.1.31}$$

由此可导出其二阶导数的中心差分表示

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t^2}\approx\frac{\boldsymbol{E}^{n+1}-2\boldsymbol{E}^{n}+\boldsymbol{E}^{n-1}}{(\Delta t)^2}.\tag{9.1.32}$$

将上式代入方程(9.1.24),可得到

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n+1}=\left[\frac{2}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^n-\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}-\boldsymbol{f}^n. \quad (9.1.33)$$

显然,给定 $\boldsymbol{f}^n$ 和初值 $\boldsymbol{E}^0$ 及 $\boldsymbol{E}^1$,就可按步进法求得其他时间步的 $\boldsymbol{E}^n(n=2,3,\cdots)$. 但与方程(9.1.30)不同的是,每一时间步要求解的矩阵方程不包括 $\boldsymbol{S}$. 这种形式称为显式算法. 与方程(9.1.27)不同的是,只要 Δt 足够小,方程(9.1.33)就是数值稳定的,即是有条件稳定的. 可以证明,其数值稳定性条件为

$$\Delta t \ll \frac{2}{\sqrt{\rho(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S})}}, \quad (9.1.34)$$

其中 $\rho(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的谱半径,也就是矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的最大特征值.

(4) Newmark 法

除以上三种传统的差分形式,Newmark 给出了另一种差分近似. 在这种方法中,$\boldsymbol{E}$ 及其一阶导数在 $t+\Delta t$ 时刻的近似表示分别为

$$\boldsymbol{E}^{n+1}=\boldsymbol{E}^n+\Delta t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}^n}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(\Delta t)^2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}^n}{\mathrm{d}t^2}+\beta(\Delta t)^2\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t^2}, \quad (9.1.35)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}^n}{\mathrm{d}t}+(1-\gamma)\Delta t\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}^n}{\mathrm{d}t^2}+\gamma\Delta t\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t^2}, \quad (9.1.36)$$

其中 β 和 γ 是两个可选择的参数,其作用是控制时间步进过程的精度和稳定性. 这时,方程(9.1.24)变成

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n+1}=&\left[\frac{2}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\left(\frac{1}{2}+\gamma-2\beta\right)\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^n\\&-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}-\left[\beta\boldsymbol{f}^{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\gamma-2\beta\right)\boldsymbol{f}^n\right.\\&\left.+\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)\boldsymbol{f}^{n-1}\right]. \quad (9.1.37)\end{aligned}$$

应用较多的是令 $\gamma=\frac{1}{2}$,称为 Newmark-β 法. 在这种情况下,上式成为

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n+1}=&\left[\frac{2}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+(1-2\beta)\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^n-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\boldsymbol{T}+\beta\boldsymbol{S}\right]\cdot\boldsymbol{E}^{n-1}\\&-[\beta\boldsymbol{f}^{n+1}+(1-2\beta)\boldsymbol{f}^n+\beta\boldsymbol{f}^{n-1}]. \quad (9.1.38)\end{aligned}$$

显然,当 $\beta=0$ 时,上式与方程(9.1.33)完全一致,即 Newmark-β 法退化为中心差分法. 这也说明,Newmark-β 法比中心差分法具有更广泛的含义. 可以证明,当 $\beta\geqslant0.25$ 时,方程(9.1.38)表示的时间步进过程是无条件稳定的,因此是隐式算法.

在以上四种时间离散算法中,具有二阶精度的中心差分法和 Newmark 法最为有用. 隐式算法的优越性更突出地体现在一些特殊问题中. 对这种问题,若采用显式算法,Δt 要选得足够小,才能保证步进过程是稳定的. 在中心差分法

中，需求解的矩阵方程不包括 $\boldsymbol{S}$，因而有更优良的性态，且用迭代法求解收敛得更快.

9.1.3 正交矢量基函数

与时域有限差分法相比，时域有限元法的最大缺点是在每一时间步都要求解矩阵方程，大大延长了计算时间，这正是时域有限元法还不能普及的主要原因. 虽然所要求解的矩阵一般是不随时间变化的，只需一次分解或预处理，但对含有很多个未知量的电大问题，所占用的计算机资源仍然是非常可观的. 如果能构造出正交矢量基函数，就能使矩阵对角化，从而避免复杂的矩阵求逆. 在文献[70]中已提出了这种方法.

对于二维问题，常采用三角形单元. 在矢量有限元法中，常用矢量基函数 $\boldsymbol{N}_i^e(\rho)$ 将任一三角形单元 $e(e=1,2,\cdots,M$，其中 M 为三角形单元的总数)的电场展开为

$$\boldsymbol{E}^e(\rho,t) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N}_i^e(\rho) E_i^e(t). \tag{9.1.39}$$

其中 E_i^e 为展开系数. 为了将如式(9.1.21)定义的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 对角化，$\boldsymbol{N}_i^e$ 必须是正交的，即

$$\langle \boldsymbol{N}_i^e, \boldsymbol{N}_j^e \rangle = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}_i^e \cdot \boldsymbol{N}_j^e \mathrm{d}\Omega = C\delta_{ij}, \tag{9.1.40}$$

其中 Ω_e 表示单元 e 的区域，C 为常数. 严格地讲，令 $\boldsymbol{N}_i^e$ 精确地满足上式几乎是不可能的. 然而在实际问题中，上式中的积分总是通过数值计算完成的，故可以表示为

$$\langle \boldsymbol{N}_i^e, \boldsymbol{N}_j^e \rangle = \sum_{l=1}^{3} \alpha_l \boldsymbol{N}_i^e(m_l) \cdot \boldsymbol{N}_j^e(m_l) = C'\delta_{ij}, \tag{9.1.41}$$

其中系数 α_l 的选取使得数值积分至少有二阶精度，m_l 为单元 e 中棱边 l 的中点，C' 为常数. 与式(9.1.40)相比，满足上式的 $\boldsymbol{N}_i^e$ 更容易构造.

Whitney 棱边基函数在电磁场问题的矢量有限元法中被广泛应用，可表示为

$$\boldsymbol{W}_i^e = l_i^e(\lambda_j \nabla\lambda_k - \lambda_k \nabla\lambda_j), \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{9.1.42}$$

这里，$\boldsymbol{W}_i^e$ 保证通过边界面时切向场分量的连续性，同时又允许法向场分量不连续，棱边 i 连接节点 j 和 k，l_i^e 为棱边 i 的长度，λ_j 和 λ_k 分别为关于节点 j 和 k 的标准线性节点标量基函数. 但是，这种棱边基函数不满足式(9.1.40)所定义的正交性. 为此，构造如下定义的矢量基函数 $\boldsymbol{Z}_i^e$

$$\boldsymbol{Z}_i^e = \begin{cases} (\boldsymbol{t}_i \cdot \boldsymbol{W}_i^e)\boldsymbol{t}_i, & \text{在棱边 } i \text{ 的中点}, \\ 0, & \text{在其他棱边的中点}, \end{cases} \quad i = 1,2,3, \tag{9.1.43}$$

其中 t_i 表示棱边 i 上的切向单位矢量. 显然,$\boldsymbol{Z}_i^e$ 满足式(9.1.41),但不能表示在棱边 i 的中点处有法向场分量. 也就是说,这是一个非完备函数集. 为解决这一问题,构造另外一个矢量基函数 $\boldsymbol{B}_i^e$:

$$\boldsymbol{B}_i^e = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{n}_i}{\varepsilon_r^e}, & \text{在棱边 } i \text{ 的中点}, \\ 0, & \text{在其他棱边的中点}, \end{cases} \quad i = 1,2,3, \tag{9.1.44}$$

其中 $\boldsymbol{n}_i$ 表示棱边 i 上的法向单位矢量. 显然,$\boldsymbol{B}_i^e$ 不仅满足式(9.2.41),并且对所有的 $\boldsymbol{Z}_i^e$ 也是正交的. 在上式中引入的 ε_r^e 允许强加于电场的法向非连续性条件.

然而,式(9.1.43)和(9.1.44)并不是 $\boldsymbol{Z}_i^e$ 和 $\boldsymbol{B}_i^e$ 的唯一的定义式,如下定义的函数集也相应地满足以上要求,即

$$\boldsymbol{Z}_i^e = \boldsymbol{W}_i^e - \sum_{m=1}^{3} \frac{\langle \boldsymbol{W}_i^e, \boldsymbol{B}_m^e \rangle}{\langle \boldsymbol{B}_m^e, \boldsymbol{B}_m^e \rangle} \boldsymbol{B}_m^e, \quad \boldsymbol{B}_i^e = 4\frac{\lambda_j \lambda_k}{\varepsilon_r^e} \boldsymbol{n}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{9.1.45}$$

其基本特性如图 9-1 所示.

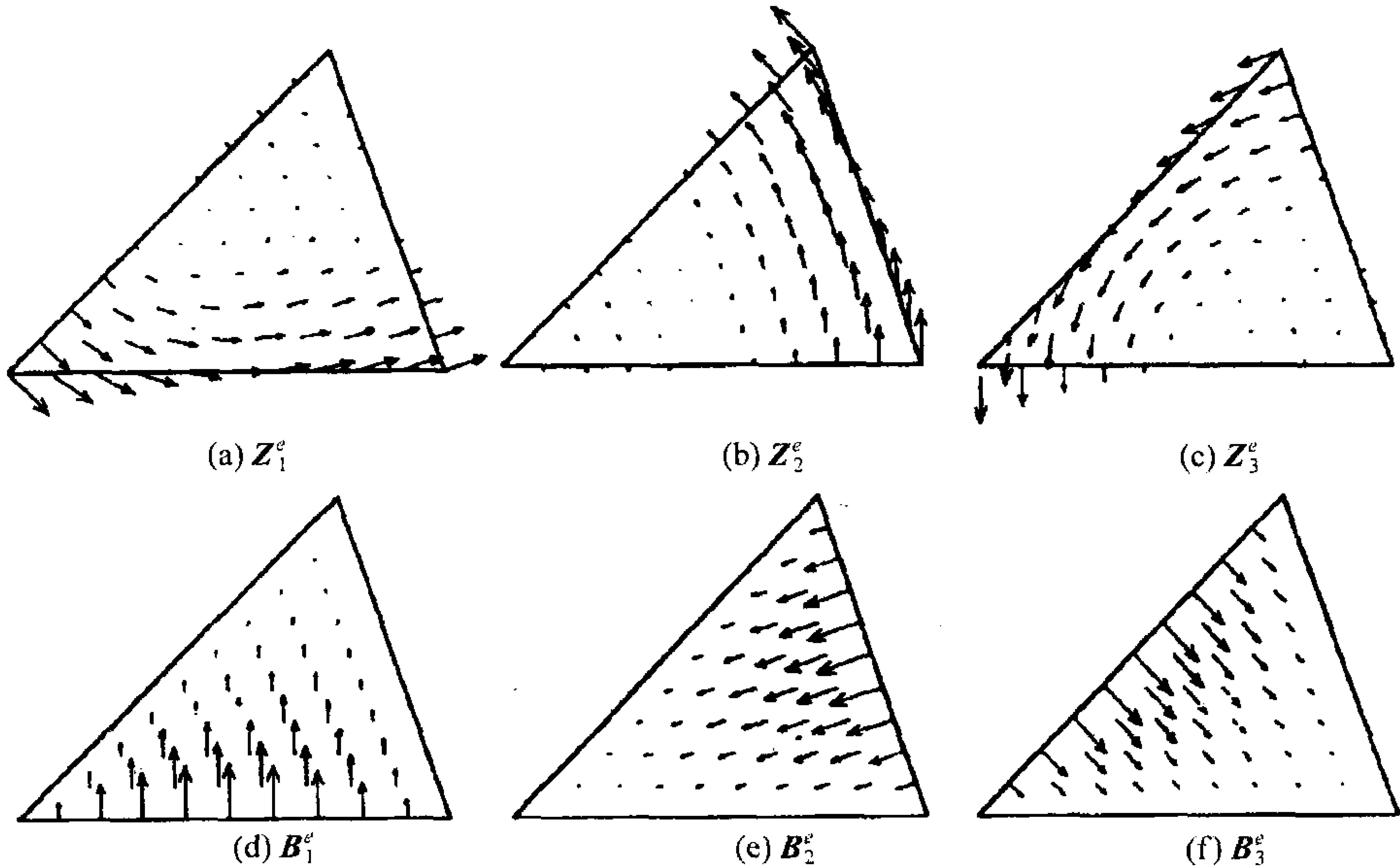


图 9-1 二维问题中正交矢量基函数的示意图

为了用正交矢量基函数对电场进行形如式(9.1.39)的展开,可以简单地令

$$\boldsymbol{N}_i^e = \boldsymbol{Z}_i^e, \quad \boldsymbol{N}_{i+3}^e = \boldsymbol{B}_i^e, \quad i = 1,2,3.$$

对于三维问题,也可进行类似的处理,详细过程可参看文献[70].

9.1.4　算例分析——在有界问题中的应用

为了验证以上所述算法的有效性，文献中已给出了一些算例，最简单的情况是计算金属谐振腔的谐振频率. 文献[72]用四面体单元和 Whitney 基函数计算了 2 m×3 m×4 m 的矩形谐振腔，单元尺度为 0.25 m. 激励信号为一高斯脉冲电场，形状为 $\exp-[(t-5\sigma)/\sigma]^2$，其中 $\sigma=1/(\pi f)$，$f=500\,\text{MHz}$. 在 HP735 工作站上计算 10 000 步，利用 FFT 把所得时域信号变换到频域，前 3 个模的谐振频率由表 9-1 给出，可以看出其结果有相当好的精确度.

表 9-1　矩形腔谐振频率

精确值/MHz	计算值/MHz
62.5	62.07
83.853	82.593
90.139	88.741

文献[73]给出了用正交化矢量基函数对二维谐振腔的计算结果. 第一个算例是二维矩形金属腔中的 TE 模，尺度为 1 m×1/3 m. 在脉冲信号激励下，对存储的时域电场信号做了傅里叶变换，从而获得其谐振频率. 第二个算例是二维圆形谐振腔，两种谐振腔都采用三角单元，其尺度略有随机改变. 从计算效率角度比较，采用正交化矢量基函数比采用一般矢量基函数虽增加了自由度，但减少了 CPU 时间. 表 9-2 给出了谐振腔计算结果的比较，圆形谐振腔的计算结果也基本类似.

表 9-2　矩形谐振腔计算的 CPU 时间

	一般矢量基函数		正交化矢量基函数	
单元数	自由度	CPU 时间	自由度	CPU 时间
600	245	84.9	695	34.4
2400	940	863.5	2740	272.2
5400	2085	2989.8	6135	972.9
9600	3680	7173.4	10880	2166.9

§9.2　完全匹配层在时域有限元法中的应用

和频域有限元法的情况一样，当把时域有限元法应用到无界问题时，也必须利用合适的条件把计算区域限定在一个合理的有限区域. 一般的情况是在截断边界应用吸收边界条件，以便尽量降低人为造成的非物理的边界反射. 在现有已知的

各类吸收边界条件中,完全匹配层具有最优良的特性.作为吸收边界条件的原理,完全匹配层已在前面介绍过,此处将直接讨论其在时域有限元法中的应用问题.

9.2.1 完全匹配层中场的波动方程

假设所考虑的问题如图 9-2 所示,在 V_i 内存在源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 和物体,在此情况下,$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 所产生的电场为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$. 为限定 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 的计算空间,在 V_i 的外围设置完全匹配层(PML). V_i 加上 PML 所占的空间合称 V_o, V_i 和 V_o 的表面分别用 S_i 和 S_o 表示.

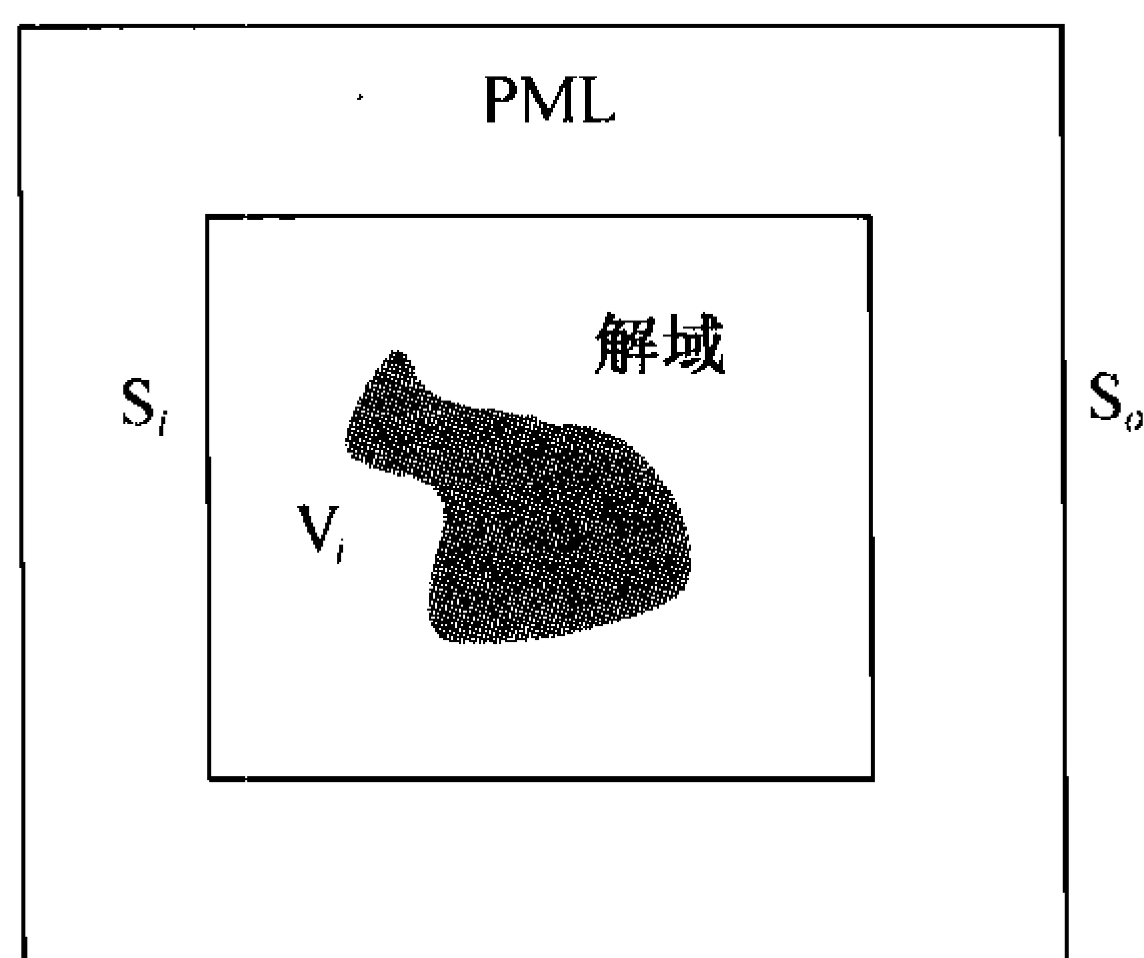


图 9-2 由 PML 截断的计算空间

对 PML,将用各向异性媒质的描述方法,正如在 § 7.7 中所做的那样.为了构造 PML 中的时域有限元方程,首先需要求得 PML 中电磁场满足的时域麦克斯韦尔方程和时域矢量波动方程.

Berenger 最早提出的完全匹配层是用场分量的分裂形式给出的,直接把它应用于有限元法有一定困难. W. C. Chew 等人的研究表明,完全匹配层可在一种伸展坐标系中表示成非分裂的形式.相对于坐标 x, y 和 z,分别引入如下伸展坐标

$$\bar{x}=\int_0^x S_x(x')\mathrm{d}x', \quad \bar{y}=\int_0^y S_y(y')\mathrm{d}y', \quad \bar{z}=\int_0^z S_z(z')\mathrm{d}z', \tag{9.2.1}$$

其中 S_x, S_y 和 S_z 为完全匹配层的参数,设它们为相应坐标的连续函数.伸展坐标系中的偏导数可定义为

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}}=\frac{1}{S_x}\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\bar{y}}=\frac{1}{S_y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{S_z}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{9.2.2}$$

若定义算符

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}&=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial\bar{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial\bar{y}}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\\&=\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{S_x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\boldsymbol{y}}\frac{1}{S_y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{S_z}\frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

且

$$S_\xi = 1 - \frac{\sigma_\xi}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}, \quad \xi = x, y, z, \tag{9.2.4}$$

则方程

$$\bar{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{H}} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\hat{\boldsymbol{E}}, \quad \bar{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{E}} = \mathrm{i}\omega\mu\hat{\boldsymbol{H}}, \tag{9.2.5}$$

与方程(7.6.56)～(7.6.67)等价，因此可称之为 PML 中电磁场的频域麦克斯韦方程. 事实上，只要把方程(7.6.56)～(7.6.61)改写成

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_y \hat{E}_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\hat{H}_{zx} + \hat{H}_{zy}),$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_z \hat{E}_{xz} = -\frac{\partial}{\partial z}(\hat{H}_{yx} + \hat{H}_{yz}),$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_z \hat{E}_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}(\hat{H}_{xy} + \hat{H}_{xz}),$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_x \hat{E}_{yx} = -\frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}_{zx} + \hat{H}_{zy}),$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_x \hat{E}_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}_{yx} + \hat{H}_{yz}),$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon S_y \hat{E}_{zy} = -\frac{\partial}{\partial y}(\hat{H}_{xy} + \hat{H}_{xz}).$$

按顺序把以上各式两两相加，并注意到

$$\hat{E}_{xy} + \hat{E}_{xz} = \hat{E}_x, \quad \hat{E}_{yx} + \hat{E}_{yz} = \hat{E}_y, \quad \hat{E}_{zx} + \hat{E}_{zy} = \hat{E}_z,$$

$$\hat{H}_{xy} + \hat{H}_{xz} = \hat{H}_x, \quad \hat{H}_{yx} + \hat{H}_{yz} = \hat{H}_y, \quad \hat{H}_{zx} + \hat{H}_{zy} = \hat{H}_z,$$

则方程(7.6.56)～(7.6.61)的频域形式等效于

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon\hat{E}_x = \frac{1}{S_y}\frac{\partial}{\partial y}\hat{H}_z - \frac{1}{S_z}\frac{\partial}{\partial z}\hat{H}_y,$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon\hat{E}_y = \frac{1}{S_z}\frac{\partial}{\partial z}\hat{H}_x - \frac{1}{S_x}\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}z,$$

$$-\mathrm{i}\omega\varepsilon\hat{E}_z = \frac{1}{S_x}\frac{\partial}{\partial x}\hat{H}_y - \frac{1}{S_y}\frac{\partial}{\partial y}\hat{H}_x,$$

这些方程正是(9.2.5)第一式的分量形式. 用同样的办法，可以证明方程(9.2.5)的第二式与方程(7.6.62)～(7.6.67)的频域形式相对应.

另一方面，如果令

$$\bar{\bar{\boldsymbol{S}}} = \hat{x}\hat{x}\left(\frac{S_y S_z}{S_x}\right) + \hat{y}\hat{y}\left(\frac{S_x S_z}{S_y}\right) + \hat{z}\hat{z}\left(\frac{S_x S_y}{S_z}\right), \tag{9.2.6}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \hat{x}S_x\hat{E}_x + \hat{y}S_y\hat{E}_y + \hat{z}S_z\hat{E}_z, \tag{9.2.7}$$

$$\hat{\boldsymbol{H}} = \hat{x}S_x\hat{H}_x + \hat{y}S_y\hat{H}_y + \hat{z}S_z\hat{H}_z, \tag{9.2.8}$$

则方程

$$\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}\cdot\hat{\boldsymbol{E}},\quad \nabla\times\hat{\boldsymbol{E}}=\mathrm{i}\omega\mu\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}\cdot\hat{\boldsymbol{H}},\tag{9.2.9}$$

与方程(9.2.5)等价.该方程把完全匹配层描绘为各向异性的媒质,具有与一般麦克斯韦方程相同的形式.根据这一特点,既可以用它表示 PML 中的电磁场,也可以用它表示 PML 以外的空间中的电磁场,只要令 $\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}$ 等于单位并矢.因此,由方程(9.2.9)出发建立带有 PML 边界的电磁场计算问题的离散方程是比较方便的.为了构建时域有限元方程,我们需要导出时域矢量波动方程.为此,先由式(9.2.9)消去 $\hat{\boldsymbol{H}}$,得到关于 $\hat{\boldsymbol{E}}$ 的方程

$$\nabla\times\mu^{-1}\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}^{-1}\cdot(\nabla\times\hat{\boldsymbol{E}})=-\varepsilon\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}\cdot(\mathrm{i}\omega)^2\hat{\boldsymbol{E}},$$

两边取傅里叶逆变换,便可得到所需的时域方程

$$\nabla\times\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]+\varepsilon\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0.\tag{9.2.10}$$

其中 $\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t)$ 为对应 $\hat{\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}}$ 的时域量,而 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 则可根据式(9.2.7)和(9.2.4)表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=&\hat{\boldsymbol{x}}\left[1+\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\right]E_x(\boldsymbol{r},t)+\hat{\boldsymbol{y}}\left[1+\frac{\sigma_y}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\right]E_y(\boldsymbol{r},t)\\&+\hat{\boldsymbol{z}}\left[1+\frac{\sigma_z}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\right]E_z(\boldsymbol{r},t).\end{aligned}\tag{9.2.11}$$

其中 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}$ 表示对 t 的积分.

9.2.2 基于总场的时域有限元方程

为计算由 V_i 内源 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 所产生的场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$,可考虑 V_0 内 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 所满足的波动方程.方程(9.2.10)适用于完全匹配层中的场,但如设定在 V_i 内 $S_\xi=1$,$\xi=x,y,z$,则它也适用于 V_i 内的电场,但要考虑到 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 的存在.于是,我们取 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 在 V_o 内满足如下形式的波动方程

$$\nabla\times\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t).\tag{9.2.12}$$

为了使方程的解唯一,必须设定 S_o 上场的边界条件.为了抑止伪模的出现,可采用如下的边界条件[69]

$$\boldsymbol{n}\times[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]+\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]=0.\tag{9.2.13}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S_o 的外法向单位矢量;Y_o 为自由空间波导纳;γ 为一系数,用以确定所

加边界条件的阻抗. 若采用矢量函数 $\boldsymbol{N}_i$ 作为检验函数,则方程的弱形式为

$$\int_{V_o}\left\{\left[\varepsilon\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t) * \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{N}_i+[\nabla\times\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{N}_i\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{N}_i\right\}\mathrm{d}V=0, \qquad (9.2.14)$$

考虑到

$$\boldsymbol{N}_i\cdot[\nabla\times\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]=\nabla\cdot\{[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\times\boldsymbol{N}_i\}$$
$$+[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\nabla\times\boldsymbol{N}_i$$

和

$$\{[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\times\boldsymbol{N}_i\}=\boldsymbol{N}_i\cdot\{\boldsymbol{n}\times[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\},$$

再利用边界条件(9.2.13),又有

$$\boldsymbol{N}_i\cdot\{\boldsymbol{n}\times[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\}$$
$$=-\boldsymbol{N}_i\cdot\left\{\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\right\}$$
$$=-\left\{\gamma Y_o\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\right\}\cdot[\boldsymbol{N}_i\times\boldsymbol{n}].$$

把以上结果代入方程(9.2.14),便得到

$$\int_{V_o}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t) * \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V+\int_{S_o}\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}S=0. \qquad (9.2.15)$$

把待求电场展开为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{j=1}^{N}u_j(t)\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{r}), \qquad (9.2.16)$$

其中 N 表示展开函数的总数. 在假定每一单元内完全匹配层的参数 σ_x,σ_y 和 σ_z 均为常数的情况下,把式(9.2.16)代入(9.2.15),经过必要的运算[69],就可得到关于 $u_j(t)$ 的常微分方程

$$\sum_{e=1}^{M}\left(T^e\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2}+T_p^e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{Q}^e\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+T_q^e\boldsymbol{u}+S^e\boldsymbol{u}\right.$$
$$\left.+\sum_{\xi=x,y,z}S_\xi^e\boldsymbol{\psi}_\xi+\sum_{\xi=x,y,z}T_\xi^e\boldsymbol{\psi}_\xi+\boldsymbol{f}^e\right)=0, \qquad (9.2.17)$$

这里的 M 表示单元的总数;$\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_N]^t$ 为未知矢量;$\boldsymbol{f}^e$ 为激励矢量,其元素为

$$f_i^e=\left\langle\boldsymbol{N}_i,\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{J}\right\rangle_{V_e}, \qquad (9.2.18)$$

其中 V_e 为单元 e 的体积. 式(9.2.17)中各方阵的元数分别为

$$T_{ij}^e=\varepsilon\langle\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{N}_j\rangle_{V_e}, \qquad (9.2.19)$$

$$T^e_{\xi,ij} = \varepsilon\langle \boldsymbol{N}_i, \bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_\xi \cdot \boldsymbol{N}_j \rangle_{V_e}, \quad \xi = p,q,x,y,z \tag{9.2.20}$$

$$Q^e_{ij} = \gamma V_o \langle \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}_j \rangle_{S_o}, \tag{9.2.21}$$

$$S^e_{ij} = \mu^{-1} \langle \nabla \times \boldsymbol{N}_i, \nabla \times \boldsymbol{N}_j \rangle_{V_e}, \tag{9.2.22}$$

$$S^e_{\xi,ij} = \mu^{-1} \langle \nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_{s,\xi}, \nabla \times \boldsymbol{N}_j \rangle_{V_e}, \xi = x,y,z, \tag{9.2.23}$$

而 $\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_\xi$ 和 $\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_{s,\xi}$ 为对角张量，且

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_p &= \varepsilon^{-1}[\hat{x}\hat{x}(\sigma_y + \sigma_z - \sigma_x) + \hat{y}\hat{y}(\sigma_x + \sigma_z - \sigma_y) \\
&\quad + \hat{z}\hat{z}(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_z)], \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_q &= \varepsilon^{-2}\{\hat{x}\hat{x}[\sigma_x^2 - \sigma_x(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y\sigma_z] \\
&\quad + \hat{y}\hat{y}[\sigma_y^2 - \sigma_y(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_x\sigma_z] \\
&\quad + \hat{z}\hat{z}[\sigma_z^2 - \sigma_z(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y]\}, \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_x &= -\hat{x}\hat{x}\varepsilon^{-2}[\sigma_x^2 - \sigma_x(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y\sigma_z], \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_y &= -\hat{y}\hat{y}\varepsilon^{-2}[\sigma_y^2 - \sigma_y(\sigma_x + \sigma_z) + \sigma_x\sigma_z], \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_z &= -\hat{z}\hat{z}\varepsilon^{-2}[\sigma_z^2 - \sigma_z(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y], \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_{s,x} &= \hat{y}\hat{y}\frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sigma_z - \sigma_x} + \hat{z}\hat{z}\frac{\sigma_z - \sigma_x}{\sigma_y - \sigma_x}, \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_{s,y} &= \hat{x}\hat{x}\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_z - \sigma_y} + \hat{z}\hat{z}\frac{\sigma_z - \sigma_y}{\sigma_x - \sigma_y}, \\
\bar{\bar{\boldsymbol{L}}}_{s,z} &= \hat{x}\hat{x}\frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sigma_y - \sigma_z} + \hat{y}\hat{y}\frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_x - \sigma_z}.
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\psi}_\xi(t) = \frac{\sigma_\xi}{\varepsilon} e^{-\sigma_\xi t/\varepsilon} \bar{u}(t) * \boldsymbol{u}(t), \xi = x,y,z,$$

其中 $\bar{u}(t)$表示单位阶跃函数. 对方程(9.2.17)进行时间离散，就可按步进方法求得所给问题的时域解.

9.2.3 基于散射场的时域有限元方程

对于散射问题，设场源在无限远，在计算区域内它被设定为自由空间中的平面波. 计算空间内任何一点的场可表示为入射场 $\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t)$和散射场 $\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t)$的和，记做 $\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t)$，称为总场. 若仍考虑图 9-2 所示的计算空间，则在 V_o 中有 $\boldsymbol{E}^s = \boldsymbol{E}^t - \boldsymbol{E}^i$，于是有与式(9.2.10)对应的方程

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \mu^{-1} \bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t) * \nabla \times \boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon \bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t) * \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^s(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad = -\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t),
\end{aligned} \tag{9.2.24}$$

由于该方程也适用于 V_i，只要设定 $\bar{\bar{S}}(\boldsymbol{r},t)=1$，故用 $\boldsymbol{N}_i$ 作为检验函数由伽辽金法可得 V_i 内场的弱形式方程

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_i}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)+\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V\\
&\qquad-\int_{S_i}\mu^{-1}[\boldsymbol{N}_i\times\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
&\quad=-\int_{V_i}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V.
\end{aligned}\tag{9.2.25}
$$

对 PML 所在的区域 V_o-V_i，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_o-V_i}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}(\boldsymbol{r},t)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V\\
&-\int_{S_i}[\boldsymbol{N}_i\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_{S_o}[\boldsymbol{N}_i\times\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
&\qquad\qquad-\int_{S_o}[\boldsymbol{N}_i\times\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)]\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\
&\quad=-\int_{V_o-V_i}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V.
\end{aligned}\tag{9.2.26}
$$

把以上两式合并，并考虑在 S_o 上的阻抗边界条件

$$
\boldsymbol{n}\times\left[\mu^{-1}\bar{\bar{\boldsymbol{S}}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\right]=\boldsymbol{U}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t),\tag{9.2.27}
$$

其中

$$
\boldsymbol{U}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{n}\times[\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)]+\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)],\tag{9.2.28}
$$

这里的 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{i}}$ 是 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)$对每一基函数的投影且是已知的，则可得到散射场在整个计算空间 V_o 内所满足的弱形式方程

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_o}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\bar{\bar{S}}(\boldsymbol{r},t)*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\mu^{-1}\bar{\bar{S}}^{-1}(\boldsymbol{r},t)*\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V\\
&\qquad+\int_{S_o}\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{N}_i\cdot\left[\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}S\\
&\quad=-\int_{V_o}\left[\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\boldsymbol{N}_i\cdot\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)\right]\mathrm{d}V\\
&\qquad-\int_{S_o}\left\{[\gamma Y_o\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{N}_i]\cdot\left[\boldsymbol{n}\times\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)\right]+\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{U}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\mathrm{d}S.
\end{aligned}\tag{9.2.29}
$$

如果 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}}(\boldsymbol{r},t)$ 和未知的 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)$ 用相同的展开式,则可得到常微分方程

$$T\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+T_p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Q\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+T_qu+Su+\sum_{\xi=x,y,z}h_\xi$$
$$+\sum_{\xi=x,y,z}g_\xi+f=-T\frac{\mathrm{d}^2u^i}{\mathrm{d}t^2}-Su^i-Q\frac{\mathrm{d}u^{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}t}-f^{\mathrm{i}},\quad(9.2.30)$$

其中

$$f^{\mathrm{i}}=\langle\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{U}^{\mathrm{i}}\rangle_{S_o}.$$

方程中各参数的具体表达这里不再一一列出,其计算方法很多地方与式(9.2.17)类似.

9.2.4 算例分析

文献[69]中给出了几种算例,证明了上面所给算法的可行性及其计算精度和效率.下面仅介绍其中两个简单算例.在两个算例中,PML 均为方形框,其电导率的选择使其正面入射的反射系数小于 0.0001.用 Newmark 法求解方程的时间离散.

第一个算例是电偶极子在自由空间的辐射,其激励电流为

$$J_z(\boldsymbol{r},t)=\frac{2}{15}(t-t_0)\exp[-(t-t_0)^2/\tau^2]\delta(\boldsymbol{r}),$$

其中 $t_0=25.9\,\mathrm{ns}$,$\tau=5.25\,\mathrm{ns}$.源置于计算区域中心,其尺度为 $0.7\,\mathrm{m}^3$,并划分为 7390 个四面体单元,共 9656 个未知量.PML 的厚度为 0.25 m,外围是电壁.这里没有用阻抗边界,是因为 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}$ 的谐振模频率在激发源频谱之外.图 9-3 给出了 $\boldsymbol{r}=-0.05\hat{\boldsymbol{x}}+0.027\hat{\boldsymbol{z}}$ (单位:m)处的电场 $\boldsymbol{E}_z$,该结果与精确值非常接近.

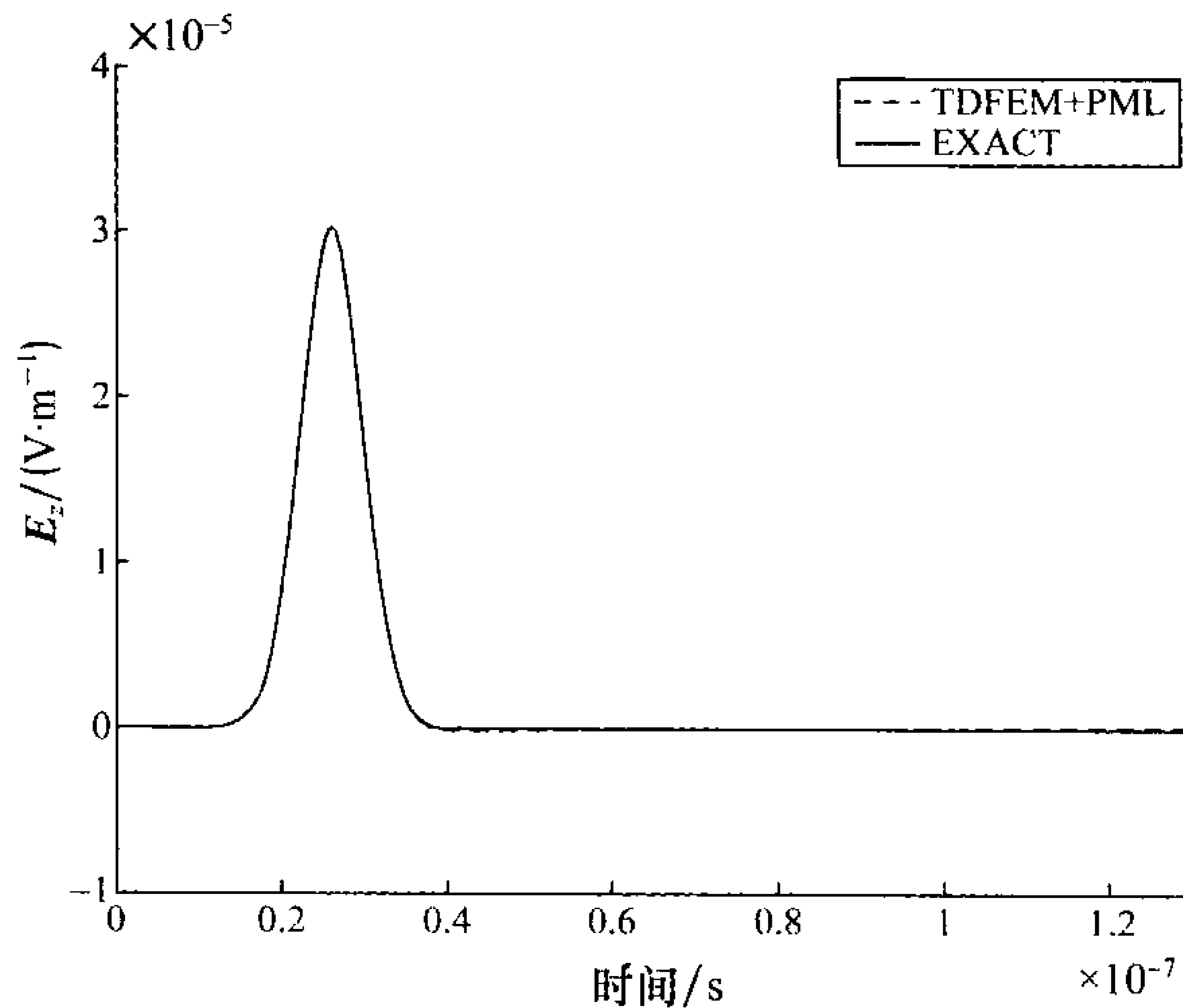


图 9-3 电偶极子的辐射电场

第二个算例是关于半径为 0.5 m 的导体球的散射问题，入射波为

$$\boldsymbol{E}^{i}(r,t) = 2\hat{\boldsymbol{x}}[t - t_0 - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)/c]\exp\{-[t - t_0 - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)/c]^2/\tau\},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{z}}, t_0=12.99$ ns, $\boldsymbol{r}_0=-\hat{\boldsymbol{z}}, \tau=2.6$ ns. PML 的厚度为 0.25 m，距离球面 0.25 m，并外设如式(9.2.13)所示的阻抗边界，其中 $\gamma=1$. 整个计算区域划分为 47 524 个单元，未知量达 59 482 个. 所计算的导体表面电流示于图 9-4，它与精确解符合得相当好.

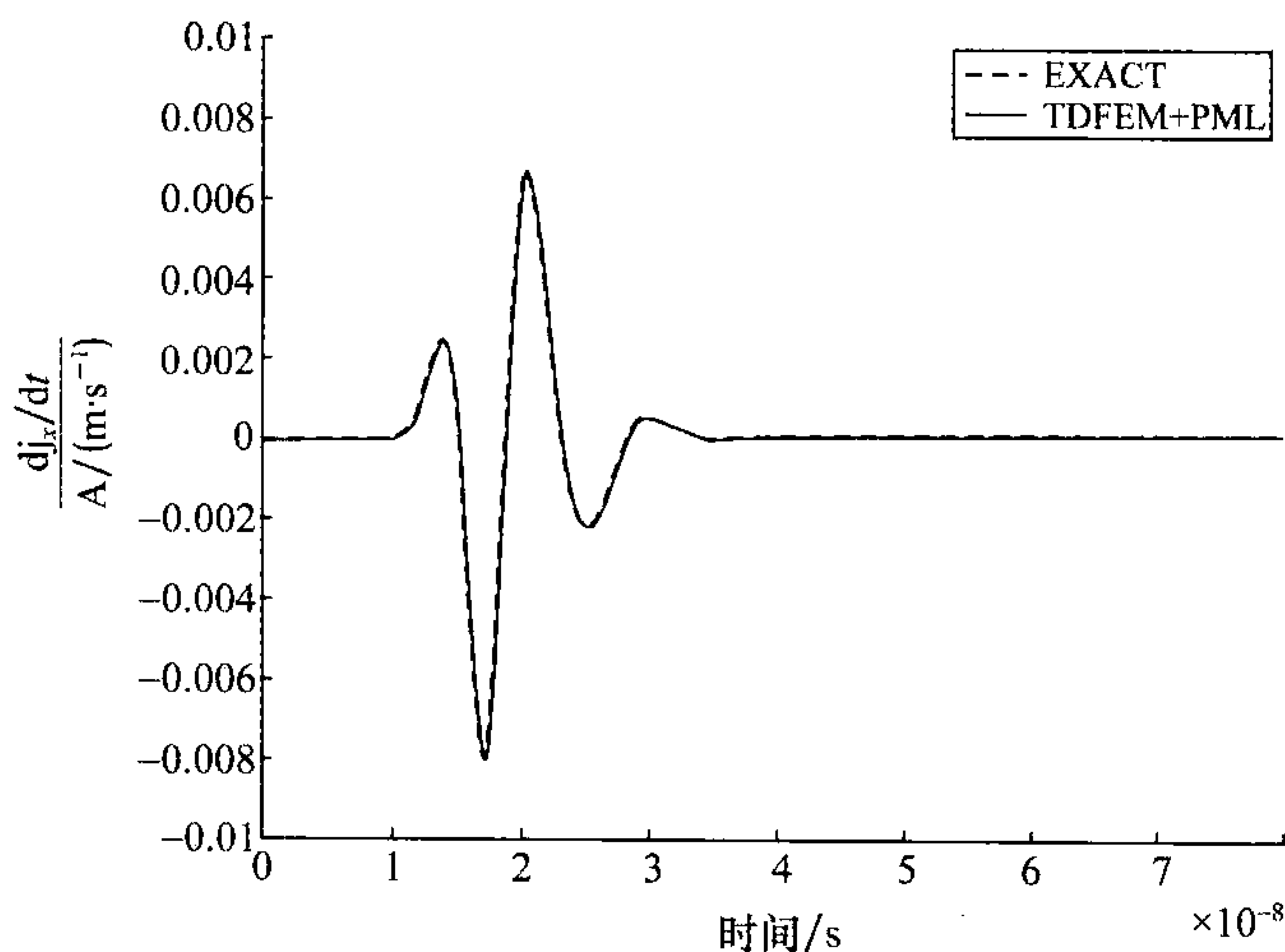


图 9-4　导体表面电流

图 9-5 则给出了由表面电流计算的后向散射截面，图上也与精确解进行了对比，说明所进行的计算有很好的精确度.

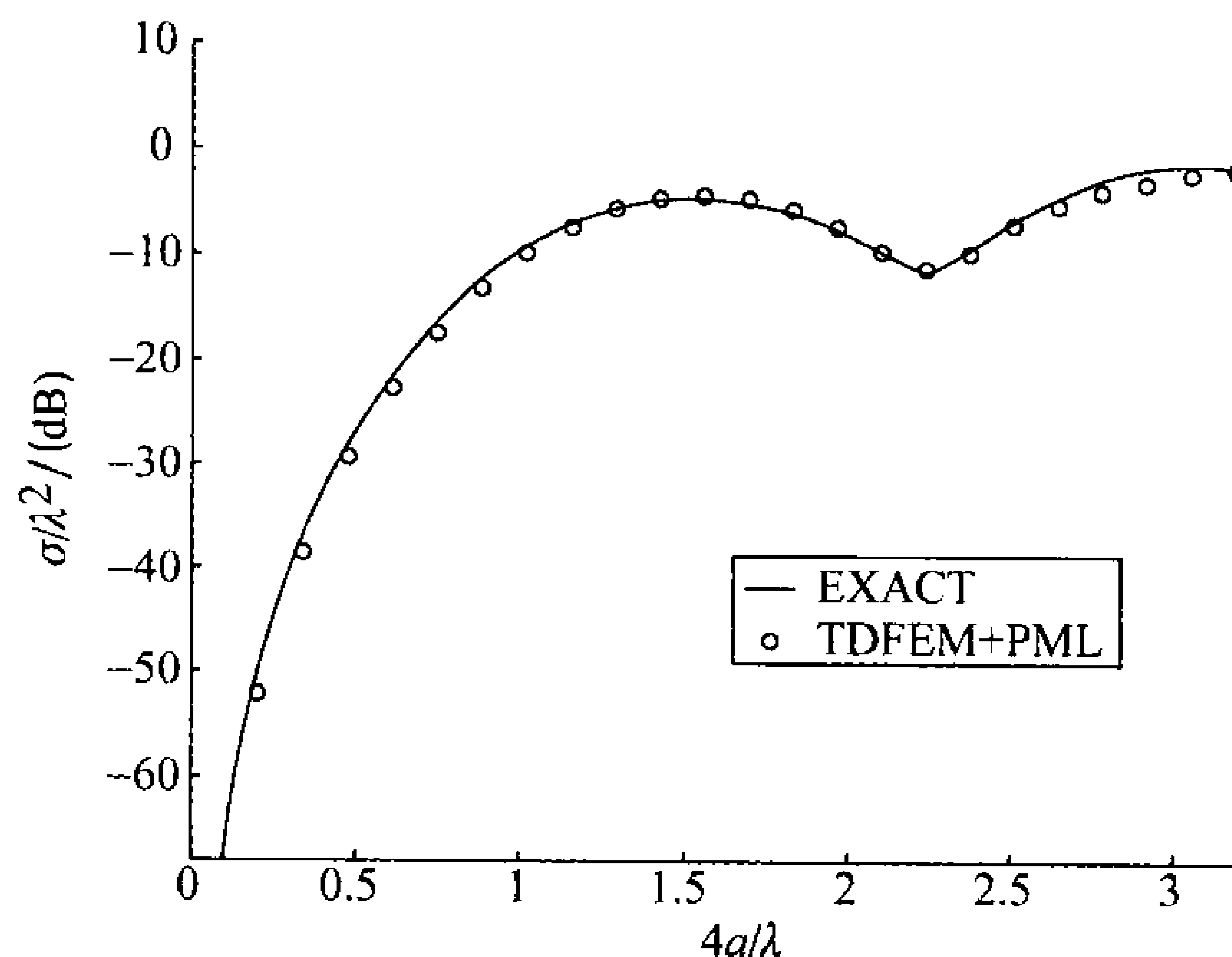


图 9-5　后向散射雷达截面

§9.3 时域有限元——边界积分法[66,67]

计算开域问题，除了利用吸收边界条件截断计算空间的方法，在频域有限元法中还发展了其他的方法，其中有些也可以在时域应用. 将边界积分与时域有限元相结合，已被证明是一种很有效的时域方法，尤其在边界积分中引入时域平面波法，可大大提高计算效率.

9.3.1 时域有限元——边界积分法的基本方程

考虑电磁散射问题，设置一虚拟边界 S_o 把散射体完全包在其中，再在散射体表面与虚拟边界之间取一封闭面 S_s，按等效原理，在其上设置等效源 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{M}$，如图 9-6 所示.

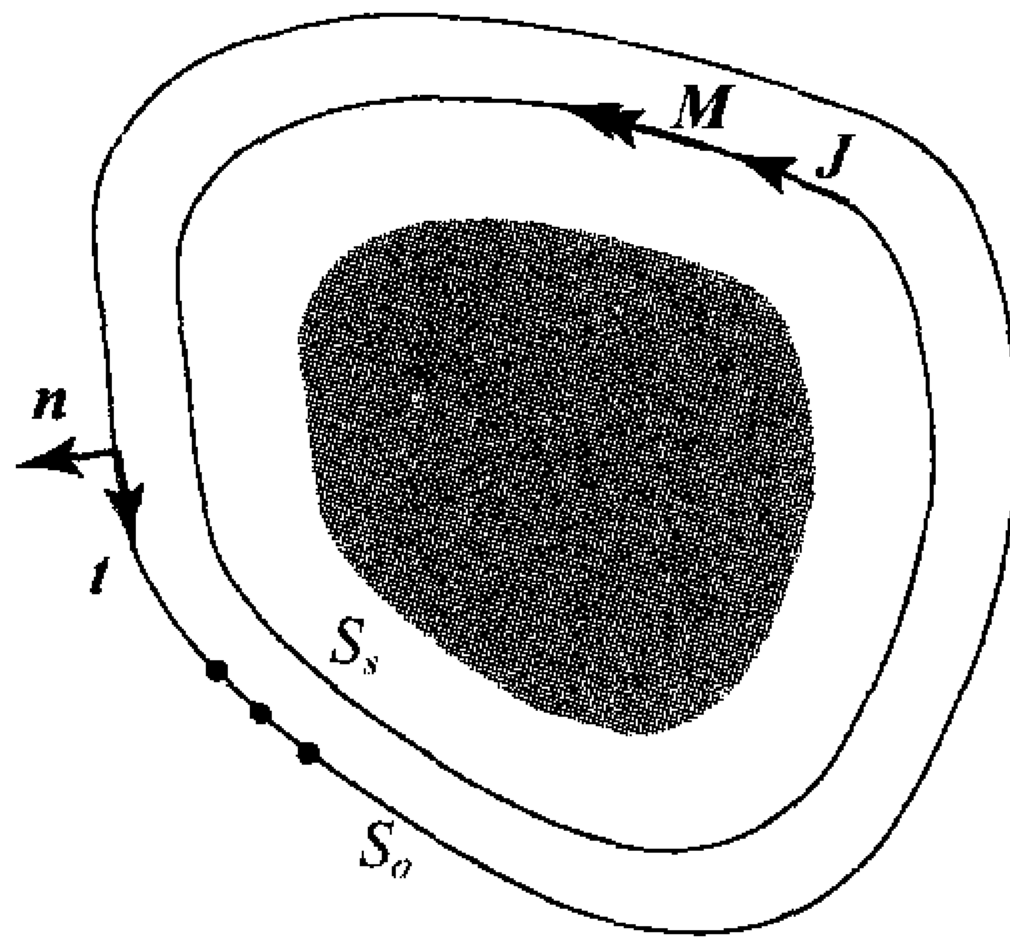


图 9-6 虚拟边界和等效源的设置

外源在 V_o 内所产生的电磁场所满足的矢量波动方程一般地可以写做

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \sigma \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0,\ \boldsymbol{r} \in V_o. \tag{9.3.1}$$

为了使解是唯一的，在 S_o 还需满足边界条件

$$\boldsymbol{n} \times [\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] + \gamma Y_o \boldsymbol{n} \times \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] = 0,\ \boldsymbol{r} \in S_o, \tag{9.3.2}$$

这里的 γ 为一未知系数，它是 S_o 上的位置及时间的函数. 为了决定 γ，引入一个虚拟面 S_s，由其上的等效源产生的场来决定 γ.

和以前一样，可以由矢量函数 $\boldsymbol{N}_i$ 导出由方程(9.3.1)和(9.3.2)所确定的边值问题的弱形式

$$\int_{V_o} [\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{N}_i \cdot \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon \boldsymbol{N}_i \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \sigma \boldsymbol{N}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\mathrm{d}V + \int_{S_o} \gamma Y_o [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}_i] \cdot \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\mathrm{d}S = 0. \tag{9.3.3}$$

但是，如果由此出发导出时域有限元的空间离散后的常微分方程，则某一矩阵中必含有系数 γ，而 γ 是时间的函数，这就要求每一时间步都要计算有关矩阵. 为了克服这一缺点，同时又避免谐振模的出现，可采用以下阻抗边界条件

$$\boldsymbol{n}\times[\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]+Y_c\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{r}\in S_o,\quad(9.3.4)$$

其中 $Y_c=\sqrt{\varepsilon/\mu}$，而 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t)$ 可由 S_s 上的等效源在 S_o 上所产生的场按式(9.3.4)计算得到. 由式(9.3.1)和(9.3.4)所确定的边值问题的弱形式则为

$$\int_{V_o}\{\mu^{-1}[\nabla\times\boldsymbol{N}_i]\cdot[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]+\varepsilon\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\sigma\boldsymbol{N}_i\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}\mathrm{d}V$$
$$+\int_{S_o}\{Y_c[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{N}_i]\cdot\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{N}_i\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t)]\}\mathrm{d}S=0.\quad(9.3.5)$$

按以前的做法，在这一方程中代入电场由 $\boldsymbol{N}_i$ 作为基函数的展开式，就可求得对应的离散方程. 除此之外，还可以采用频域有限元中常用的基于变分原理的方法. 根据广义变分原理，与方程(9.3.1)和(9.3.4)问题等价的变分问题的泛函可表示为

$$L[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]=\frac{1}{2}\int_{V_o}\{\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
$$+\sigma\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t\}\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_{S_o}\{Y_c\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]$$
$$+2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t)\}\mathrm{d}S\quad(9.3.6)$$

由此出发，同样可以得到离散方程.

9.3.2 离散方程和边界积分计算

为了对方程进行离散处理，仍采用展开式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{j=1}^{N}u_j(t)\boldsymbol{N}_j(\boldsymbol{r}),\quad(9.3.7)$$

获得离散方程可以由式(9.3.5)出发，也可以由式(9.3.6)出发. 下面采用后一种方法.

把式(9.3.7)代入(9.3.6)，然后对 u_j 求偏微商，让所得结果等于零，即可得所需要的方程

$$T\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t^2}+(R+Q)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+S\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=0,\quad(9.3.8)$$

其中 T,R,Q 和 S 为方阵，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 为列矢量，它们的元素分别为

$$T_{ij}=\varepsilon\langle\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{N}_j\rangle_{V_o},$$
$$S_{ij}=\mu^{-1}\langle\nabla\times\boldsymbol{N}_i,\nabla\times\boldsymbol{N}_j\rangle_{V_o},$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \sigma\langle \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j \rangle_{V_o}, \\
Q_{ij} &= Y_c \langle \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}_j \rangle_{S_o}, \\
W_i &= \langle \boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{U} \rangle_{S_o}.
\end{aligned}
$$

根据§9.1所述原理,对方程(9.3.8)可以有多种时间变量的离散方法.当采用中心差分近似时,可以得到如下的差分格式

$$
P \cdot u^{n+1} = \left[\frac{2}{(\Delta t)^2} T - S\right] \cdot u^n + \left[\frac{1}{2\Delta t}(R+Q) - \frac{1}{(\Delta t)^2} T\right] \cdot u^{n-1} - w^n, \tag{9.3.9}
$$

其中

$$
P = \frac{1}{(\Delta t)^2} T + \frac{1}{2\Delta t}(R+Q), \tag{9.3.10}
$$

这里 Δt 表示时间步长.显然,在每一步计算中都需要 w^n,它由式(9.3.4)的 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t)$ 决定,而 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},t)$ 又由 S_o 上的场决定.正如前面所指出的,S_o 上的场可由 S_s 上的等效源推算,为此先导出由它们决定的矢量磁势 $\boldsymbol{A}$ 和矢量电势 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$.由§1.4中的式(1.4.15)和(1.4.16)可知,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{A}_m(\boldsymbol{r},t)$ 可表示为

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mu \int_{S_s} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) * g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t)\mathrm{d}S', \tag{9.3.11}
$$

$$
\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon \int_{S_s} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) * g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t)\mathrm{d}S', \tag{9.3.12}
$$

而根据等效原理,其中的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)$ 应为

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{n} \times \frac{1}{\mu}\int_0^t \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{d}\tau, \boldsymbol{r} \in S_s, \tag{9.3.13}
$$

$$
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{r} \in S_s. \tag{9.3.14}
$$

三维空间的时域格林函数 $g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t)$ 已在式(2.3.33)中给出,即可表示为

$$
g(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, t) = \frac{\delta(t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/v)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{9.3.15}
$$

于是,就可根据§1.3中所给关系,由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}$ 求得 S_o 上的场.因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_m$ 所给出的是散射场,要加上入射场之后才是总场,于是有

$$
\frac{2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \nabla\nabla\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t), \tag{9.3.16}
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \nabla \times \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \nabla\nabla\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t). \tag{9.3.17}
$$

到这里,所需的计算都可以进行了,问题是如何提高计算效率.提高效率的一种现有方法,就是把§6.4中介绍的时域平面波法用于 S_o 上场的计算中.

9.3.3 算例分析

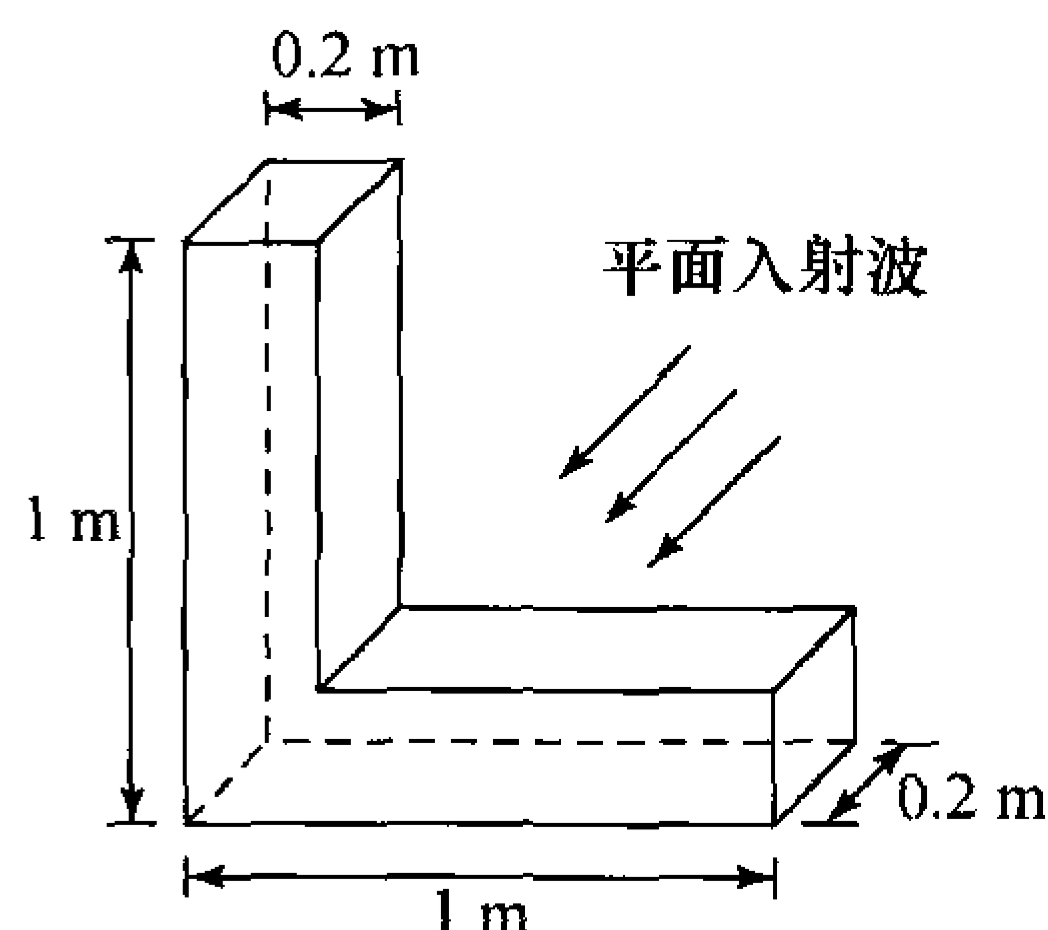


图 9-7 L 形导体及入射波

文献[23]中给出了多种算例，以验证上面介绍的方法，其中既有二维问题也有三维问题，既有辐射问题也有散射问题. 在基函数的选择方面，既有零阶的，也有高阶的，并它们的效果进行了比较，本文仅就一种散射问题的计算结果给予简要说明.

作为一种非典型的结构，文献考虑了如图 9-7 所示的 L 形的导体散射问题，其中的入射波形式如同 9.2.4 的球体散射，其中

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \cos(225^\circ)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(225^\circ)\hat{\boldsymbol{y}},$$

$$t_0 = 10.39\,ns,$$

$$\boldsymbol{r}_0 = 0.6\hat{\boldsymbol{x}} + 1.4\hat{\boldsymbol{y}}(\text{单位：m}),$$

$\tau=2.1\,ns$，而且极化方向改为

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \cos(135^\circ)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(135^\circ)\hat{\boldsymbol{y}},$$

这一脉冲包含的最高频率为 1.5 GHz，或最小波长为 0.2 m. 所采用的虚拟边界与散射体形状相同，但距其表面两个单元. 全计算区域划分为 5278 个二阶四面体单元，共有 106 266 个未知量. 文献同时还用 FDTD+PML 方法对该问题进行了计算，以便进行比较.

图 9-8 给出了 $\boldsymbol{r}=0.55\hat{\boldsymbol{x}}+0.89\hat{\boldsymbol{y}}+0.25\hat{\boldsymbol{z}}$（单位：m）处计算所得的电场，并与 FDTD 法的结果进行对照. 两者良好的符合说明所介绍方法在计算较复杂散射问题时所具有的较高精度. 这也说明在频域有限元中所发展的高阶有限元在时域也可有相应的作用.

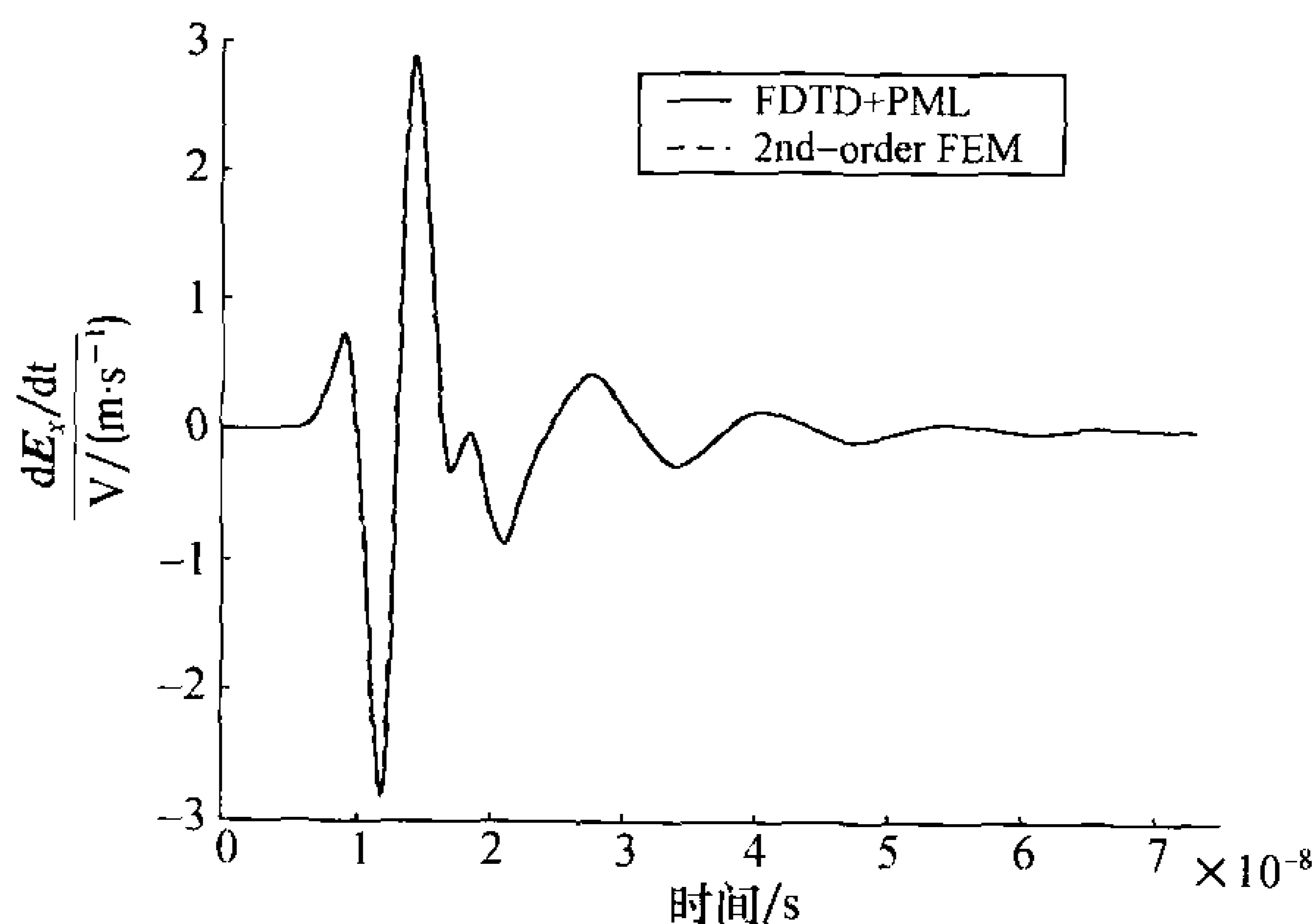


图 9-8 L 形散射体的散射电场

第十章　时域有限体积法[24,74,76]

用于电磁场计算的时域有限体积法(Time-Domain Finite Volume Method,简称 FVTD)是从 20 世纪 80 年代末至 90 年代初逐渐发展起来的：一方面是人们受到计算流体力学中的有限体积法的启发,把它用于麦克斯韦方程的求解;一方面则是人们对时域有限差分法的直接发展,并吸收了有限元法的一些优点. FVTD 的最大特点是网格结构的灵活性,从而具有了时域有限差分法和有限元法两者的突出优越性.

§10.1　基于守恒形式控制方程的时域有限体积法

时域有限体积法是 20 世纪 60～70 年代为计算流体和传热问题而发展起来的,80～90 年代开始用于电磁场问题. 为了继承在流体力学中应用的已有成果,最直接且简便的方法是利用流体力学和电动力学的某些共性,建立起具有类似形式的控制方程,然后就可用类比的方法加以推广应用. 和其他数值方法一样,有限体积法也是把解域分割成有限尺度的离散网格,但在每一个网格节点按一定的方式构成一个包围节点的控制容积,其关键步骤是将控制方程在控制容积内进行积分.

10.1.1　守恒形式控制方程

在流体流动和传热问题中所遇到的守恒形式的控制方程,可概括为下面的形式

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\varphi\boldsymbol{u})=\nabla\cdot(\boldsymbol{\Gamma}\cdot\nabla\varphi)+S_{\varphi},\qquad(10.1.1)$$

其中 φ 为通用变量,在不同的问题中可代表不同的物理量;ρ 为流体密度;$\boldsymbol{u}$ 为流速;$\boldsymbol{\Gamma}$ 为扩散系数;S_{φ} 为源项. 最早的有限体积法就是从这类方程出发而发展起来的. 为了在电磁场计算中应用有限体积法,并尽量继承其在流体力学中已经取得的成果,最好是把电磁场问题的控制方程也表示成这种守恒形式,以便用类比的方法把有限体积法用于电磁场问题的计算.

为使结果更具一般性,我们从以下广义的麦克斯韦旋度方程出发

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\boldsymbol{M},\qquad(10.1.2)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J},\qquad(10.1.3)$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为与电流源 $\boldsymbol{J}$ 相对应的磁流源，是为了表示某种问题人为引入的. 上两式是时变电磁场问题的控制方程，为了把它们化做具有式(10.1.1)形式的控制方程，特引入一些具有特定作用的算子. 定义算子 S 为

$$S:\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix},\tag{10.1.4}$$

再定义

$$\mathrm{Div}[S(\boldsymbol{a})]=\nabla\times\boldsymbol{a},\tag{10.1.5}$$

用分量表示，则是

$$\{\mathrm{Div}[S(\boldsymbol{a})]\}_q=\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_p}[S(\boldsymbol{a})]_{pq},\tag{10.1.6}$$

于是，式(10.1.2)和(10.1.3)可以相应地表示成如下的形式

$$\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{Div}[S(\boldsymbol{E})]=-\boldsymbol{M},\tag{10.1.7}$$

$$\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mathrm{Div}[S(\boldsymbol{H})]+\sigma\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}.\tag{10.1.8}$$

进一步又可把以上两个方程合并，表示为

$$\alpha\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U})+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{U}=\boldsymbol{G},\tag{10.1.9}$$

其中

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{pmatrix},\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{J}\\ -\boldsymbol{M}\end{pmatrix}.$$

而 α,A 和 B 为以下矩阵

$$\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -S\\ S & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

方程 (10.1.9)具有与方程(10.1.1)相类似的形式，可称为守恒形式的麦克斯韦方程.

10.1.2　守恒形式控制方程的有限体积离散

为了书写简便，但并不失一般性，在下面的讨论中只考虑麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0,\tag{10.1.10}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0,\tag{10.1.11}$$

的解. 在这种情况下，方程(10.1.9)成为

$$\alpha\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U})=0.\tag{10.1.12}$$

在笛卡尔直角坐标系中，若令

$$\boldsymbol{U}=(E_x,E_y,E_z,H_x,H_y,H_z)^{\mathrm{T}},$$

而且

$$\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon I & 0\\ 0 & \mu I\end{pmatrix},$$

其中 I 为单位二阶张量，则方程(10.1.12)仍然成立. 这时，可以写做

$$F(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{U}=(F_1(\boldsymbol{U}),F_2(\boldsymbol{U}),F_3(\boldsymbol{U})),$$

其中

$$F_1(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}0\\ H_z\\ -H_y\\ 0\\ -E_z\\ E_y\end{bmatrix},F_2(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}-H_z\\ 0\\ H_x\\ E_z\\ 0\\ -E_x\end{bmatrix},F_3(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}H_y\\ -H_x\\ 0\\ -E_y\\ E_x\\ 0\end{bmatrix},$$

则方程(10.1.12)又可写成

$$\alpha\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial F_1(\boldsymbol{U})}{\partial x}+\frac{\partial F_2(\boldsymbol{U})}{\partial y}+\frac{\partial F_3(\boldsymbol{U})}{\partial z}=0, \tag{10.1.13}$$

或依散度的定义，上式可简写为

$$\alpha\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\nabla\cdot[F(\boldsymbol{U})]=0, \tag{10.1.14}$$

这就成为完全的守恒形式了.

有限体积法的关键是对方程(10.1.14)在被剖分成网格的解域的有限体积内进行积分. 有限体积的构成主要有两种方法.

第一种为网格中心法，即有限体积围绕网格中心构成，其边界与网格边界重合. 图 10-1 给出了二维三角元网格中有限体积的构成.

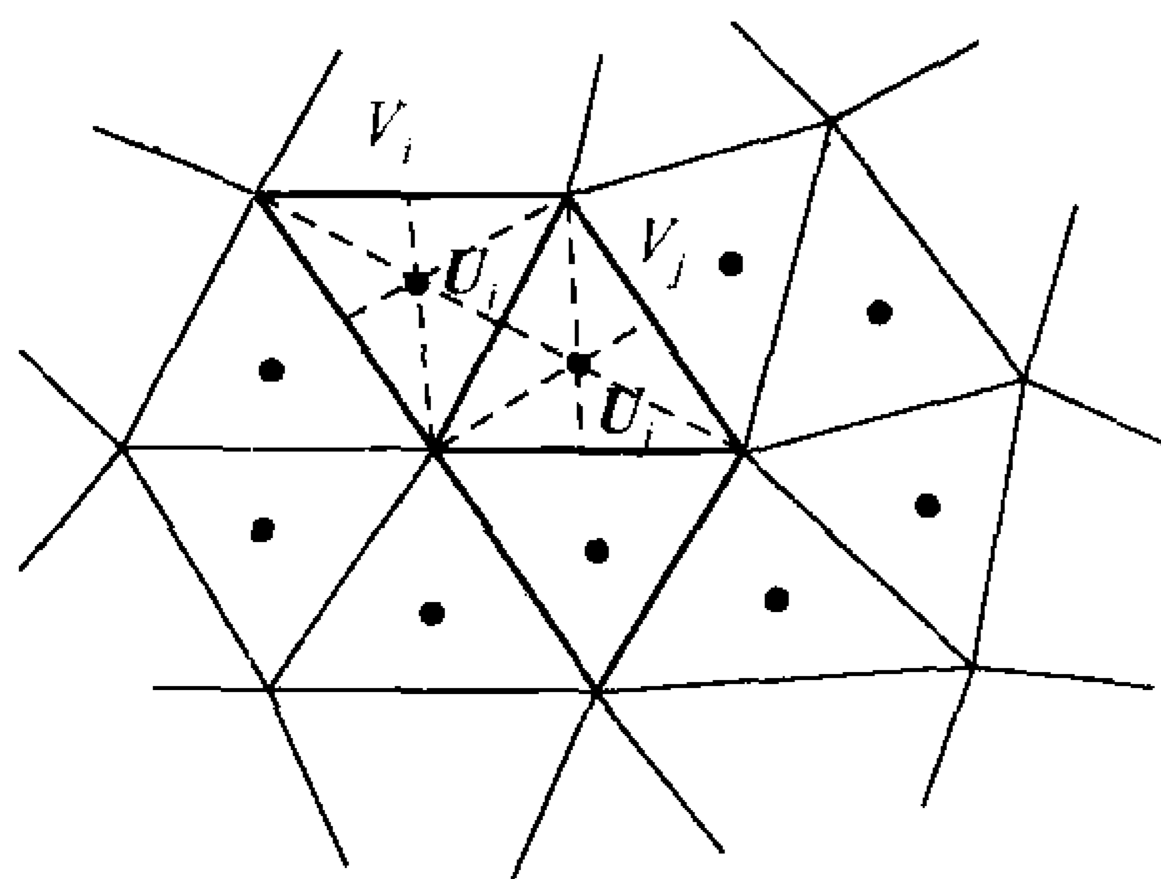


图 10-1 网格中心法构成有限体积

第二种是网格顶点法，即有限体积围绕网格顶点构成，它不再与原来网格相

重合. 在二维三角元网格的剖分中，有限体积的边界是由该顶点所属的单元重心的连线构成，如图 10-2 所示.

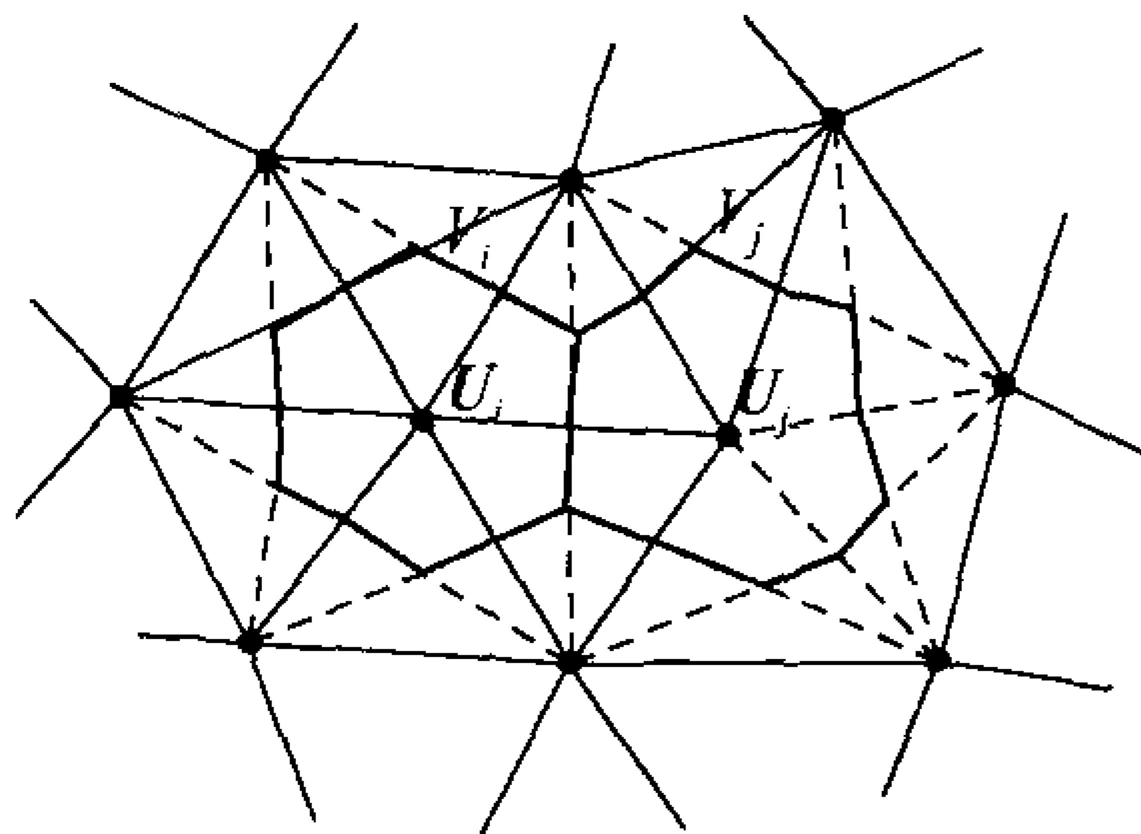


图 10-2　网格顶点法构成有限体积

这两种有限体积的结构各有其优缺点：网格顶点法构成的有限体积容易扩展到更高阶的空间离散，但在处理边界条件时有所不便；与此相反，用网格中心法构造的有限体积在考虑边界时却很自然.

设第 i 个有限体积由 V_i 表示，则整个计算域 Ω 可表示为 $\Omega=\bigcup\limits_i V_i$. 若 V_i 的表面用 S 表示，它由 m_i 个平面组成，则

$$S=\bigcup_{k=1}^{m_i} S_k.$$

设 V_i 的体积为 V，把方程(10.1.14)在 V 上积分，即得到

$$\alpha\int_V \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_V \nabla\cdot F(\boldsymbol{U})\mathrm{d}V=0.$$

利用高斯定理，又可得到

$$\alpha\frac{\partial}{\partial t}\int_V \boldsymbol{U}\mathrm{d}V+\int_S F(\boldsymbol{U}^*)\cdot \boldsymbol{a}_n\mathrm{d}S=0. \tag{10.1.15}$$

其中 $\boldsymbol{U}^*=(\boldsymbol{E}^*,\boldsymbol{H}^*)$，而 $\boldsymbol{E}^*$ 和 $\boldsymbol{H}^*$ 分别表示 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 在边界 S 上的值，$\boldsymbol{a}_n$ 表示 S 的外法向单位矢量. 与流体问题相对照，$F(\boldsymbol{U}^*)\cdot\boldsymbol{a}_n$ 可称为通量.

在式(10.1.15)中的体积分可以近似地表示为 $\boldsymbol{U}$ 在有限体积中心的值乘上它的体积 $|V_i|$，而面积分部分则可近似地表示为通量在各平面 S_k 中心的值乘上其面积 $|S_k|$ 的总和. 于是，式(10.1.15)可近似地表示成

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_i}{\partial t}=-\frac{1}{|V_i|}\sum_{k=1}^{m_i}|S_k|\alpha^{-1}F(\boldsymbol{U}_k^*)\cdot\boldsymbol{a}_{nk}. \tag{10.1.16}$$

其中 $\boldsymbol{U}_i$ 为 V_i 中心 $\boldsymbol{U}$ 的值，$F(\boldsymbol{U}_k^*)\cdot\boldsymbol{a}_{nk}$ 为通量在 S_k 中心的值，$\boldsymbol{a}_{nk}$ 为 S_k 由 V_i 内向外的单位法向矢量. 这里的困难是如何计算通量，因为在每一小面，流量都与相邻两面有限体积的 $\boldsymbol{U}$ 值相关. 要解决这类问题，可以参考在流体力学的应用中已经积累的比较成熟的经验[76].

10.1.3 时间变量的离散问题

经空间离散后，得到的未知量 U 仍是时间的函数，为了进行数值计算，还需要对时间变量进行离散. 在现有的问题中，需要求解的是时间的一阶微分方程，且可以一般地表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(u), \\ u\mid_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{10.1.17}$$

和以前一样，对时间变量 t 也加以均匀分割，其间隔为 Δt，于是离散后的时间 t_n 可表示为 $t_n = n\Delta t$，其中 $n=0,1,2\cdots$. 如果仍用以前的表示方法，$u^n = u(n\Delta t)$，则对 u 有以下的泰勒展开

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{1!}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\Delta t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + O(\Delta t^3), \tag{10.1.18}$$

从而有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n = \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + O(\Delta t^2), \tag{10.1.19}$$

如果对$\dfrac{\partial u}{\partial t}$的近似只取上式的右侧第一项，则其精度为 $O(\Delta t)$. 在这种近似下，问题(10.1.17)成为

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t F(u^n), \\ u^0 = u_0. \end{cases} \tag{10.1.20}$$

其中 $F(u^n) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^n$，为 $f(u)$的离散形式. 这种近似被称为欧拉(Euler)法.

为了提高精确度，可利用由式(10.1.17)得到以下关系

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial f(u)}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot f(u).$$

将其代入式(10.1.19)，就可得到

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n + O(\Delta t^2) \\ &= F(u^n) + \frac{\Delta t}{2}\left[\frac{\partial F(u)}{\partial u}\cdot F(u^n)\right] + O(\Delta t^2). \end{aligned} \tag{10.1.21}$$

这样，就可以得到具有二阶近似的迭代方法

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t F(u^n) + \dfrac{\Delta t^2}{2}\left[\dfrac{\partial F(u)}{\partial u}\cdot F(u^n)\right], \\ u^0 = u_0. \end{cases} \tag{10.1.22}$$

此式称为拉克斯-温德罗夫(Lax-Wendroff)法. 比起欧拉法，其精度提高到二

阶，达到 $O(\Delta t^2)$.

还有一种方法称做预测-校正法，其过程分成两步，第一步由 u^n 计算出 $u^{n+\frac{1}{2}}$，即

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{\Delta t}{2}F(u^n) + O\left(\frac{\Delta t}{2}\right). \tag{10.1.23}$$

再进一步计算出 u^{n+1}，即

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t F(u^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2). \tag{10.1.24}$$

这一方法也具有二阶精度.

除了以上几种，还有其他方法可供选择. 可以看出，这些都是显式的，它们的稳定性是有条件的，即在一定的空间离散条件下，Δt 的选择是受到限制的. 理论分析已表明[79]，Δt 必须满足以下关系

$$\Delta t \leqslant \frac{l}{v} \min_i \left\{ \frac{|V_i|}{\sum_{k=1}^{m_i} |S_k|} \right\}, \tag{10.1.25}$$

其中 $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$，$\varepsilon\mu$ 为 V_i 中媒质的介电常数和磁导率.

§10.2　基于积分形式麦克斯韦方程的时域有限体积法

除了上面介绍的电磁场计算的时域有限体积法，在文献中还流行着另外一种时域有限体积法，这种方法与时域有限差分法有更密切的关系，甚至可以把这种时域有限体积法看做是时域有限差分法的一种扩展形式. 这种方法不需要构造微分形式麦克斯韦方程的守恒形式，而是直接从积分形式的麦克斯韦方程出发. 当然，这两种时域有限体积法的构造方法在本质上还是相同的，但是后者在发展时域有限体积法与时域有限差分法的混合方法时更加直观方便.

10.2.1　由积分形式麦克斯韦方程导出时域有限体积离散方程

在§1.1中我们应用斯托克斯定理(1.1.9)把麦克斯韦方程中的两个旋度方程变换成了如下的积分形式

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}, \tag{10.2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}. \tag{10.2.2}$$

其中 C 为面 S 的边界. 在构造时域有限差分法时，有时也从这种积分形式的麦克斯韦方程出发[35]，甚至还带来某种方便. 为了构造时域有限体积法，还需要另外一种积分形式的麦克斯韦方程，它是运用旋度定理

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F} \mathrm{d}S \tag{10.2.3}$$

而得到的，其中 S 为体积 V 的表面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法向单位矢量. 这是第二种积分形式的麦克斯韦方程

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S, \tag{10.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} \mathrm{d}S. \tag{10.2.5}$$

相应地，我们称式(10.2.1)和(10.2.2)为第一种积分形式的麦克斯韦方程.

时域有限体积法的优点在于其网格结构的灵活性，可以更方便地构造共形网格. 为了离散以上积分形式的麦克斯韦方程，假设已经建立了某种形式的网格系统. 考虑到叙述方便，下面将以六面体网格作为讨论的具体形式，其结果适用于其他形式的网格. 在时域有限体积法中把网格分为相互关联的两个体系，一个称为原始网格，一个称为对偶网格. 图 10-3 给出了六面体网格体系的构成.

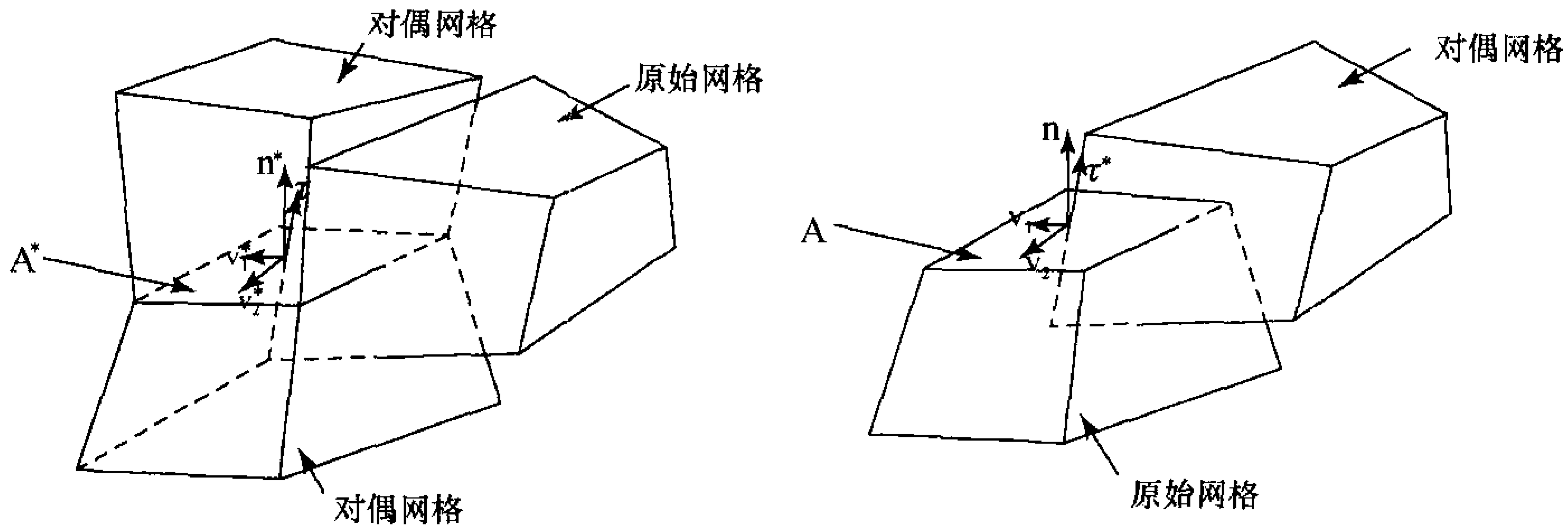


图 10-3　原始网格与对偶网格的关系

对偶网格构造的方法，是用原始六面体网格各顶点的坐标平均去定义网格重心，然后用直线把有交界面的相邻原始网格的重心连接而构成新的六面体，这些六面体就称为对偶网格. 为保证这一构造过程的成功，需要假定原始的六面体结构不是非常奇异的，以便重心的连接只穿过这两个六面体的唯一共有面.

把积分形式的麦克斯韦方程用于以上网格系统的各个网格单元，两种积分形式分别为

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_A \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial A} \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}, \tag{10.2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A^*} \boldsymbol{D} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\partial A^*} \boldsymbol{H} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{l}, \tag{10.2.7}$$

和

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{E} \mathrm{d}S, \tag{10.2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V^*}\boldsymbol{D}\mathrm{d}V=\oint_{\partial V^*}\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}S,\tag{10.2.9}$$

其中 A 和 V 分别为原始网格单元一个面的面积和网格的体积，∂A 和 ∂V 分别表示它们的边界. 而 A^* 和 V^* 则分别表示对偶网格的一个面的面积和网格的体积，∂A^* 和 ∂V^* 分别表示它们的边界.

在文献中场的离散取值有两种类型：第一种是把电场分量取值于原始网格的棱边，而磁场分量则取值于对偶网格的棱边；第二种是把电场分量取值于原始网格的节点，磁场分量取值于对偶网格的节点. 下面讨论第一种离散方法.

显然，按照棱边离散场值的方式，如果网格是正交的，则通过第一种积分形式的麦克斯韦方程(10.2.6)和(10.2.7)很容易得到标准的时域有限差分格式. 由于积分 $\oint_{\partial V}\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E}\mathrm{d}S$ 和 $\oint_{\partial V^*}\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}S$ 与前面定义的通量间的联系，式(10.2.8)和式(10.2.9)表示的是一种有限体积格式. 所以，式(10.2.6)～(10.2.9)打通了时域有限差分法与时域有限体积法之间的联系.

如果把某棱边上的场量定义为场矢量在棱边方向的投影，则对电场和磁场分别有 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\tau}^*$，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{\tau}^*$ 分别为原始网格和对偶网格沿棱边方向的单位矢量. 在对偶面 A^* 上的电场可以表示为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_n^*)\boldsymbol{a}_n^*+(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_1^*)\boldsymbol{v}_1^*+(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_2^*)\boldsymbol{v}_2^*,\tag{10.2.10}$$

其中 $\boldsymbol{a}_n^*$ 为 A^* 的法向单位矢量，$\boldsymbol{v}_1^*$ 和 $\boldsymbol{v}_2^*$ 为两个独立的 A^* 面的切向单位矢量. 若 $\boldsymbol{\tau}$ 为穿过面 A^* 的原始网格棱边的单位矢量，则电场对该棱边的投影可表示为

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{a}_n^*)(\boldsymbol{a}_n^*\cdot\boldsymbol{\tau})+(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_1^*)(\boldsymbol{v}_1^*\cdot\boldsymbol{\tau})+(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_2^*)(\boldsymbol{v}_2^*\cdot\boldsymbol{\tau}),$$

于是便有

$$\frac{\partial(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\tau})}{\partial t}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{a}_n^*\right)(\boldsymbol{a}_n^*\cdot\boldsymbol{\tau})+\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_1^*\right)(\boldsymbol{v}_1^*\cdot\boldsymbol{\tau})+\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_2^*\right)(\boldsymbol{v}_2^*\cdot\boldsymbol{\tau}).\tag{10.2.11}$$

该式右侧第一项可利用式(10.2.7)求得，因为

$$\varepsilon|A^*|\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{a}_n^*\right)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{A^*}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}^*=\oint_{\partial A^*}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}^*,\tag{10.2.12}$$

其中 $|A^*|$ 为 A^* 的面积. 按照前面的取值规定，在 A^* 的边界上磁场分量是已知的，且可以进一步表示为

$$\oint_{\partial A^*}\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_{i=1}^{4}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\tau}_i^*)l_i,\tag{10.2.13}$$

这里 $\boldsymbol{\tau}_i^*$ 是对偶面 A^* 的第 i 个边棱的单位矢量，l_i 是它的长度.

为了计算式(10.2.11)右侧另外两项可利用第二种积分形式的麦克斯韦方程中(10.2.9)所给出的关系，再利用在 $\boldsymbol{v}_1^*$ 和 $\boldsymbol{v}_2^*$ 上的投影，可以得到

$$\varepsilon|V^*|\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_1^*\right)=\int_{\partial V^*}(\boldsymbol{a}_n^*\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v}_1^*\mathrm{d}S,\tag{10.2.14}$$

$$\varepsilon\mid V^*\mid\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_2^*\right)=\int_{\partial V^*}(\boldsymbol{a}_n^*\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{v}_2^*\,\mathrm{d}S. \tag{10.2.15}$$

其中$|V^*|$为V^*的体积.为了计算以上积分,需要知道每个面上的$\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}$.对于每一个面都有4个棱边,每个棱边都有一单位矢量,如图10-4所示.

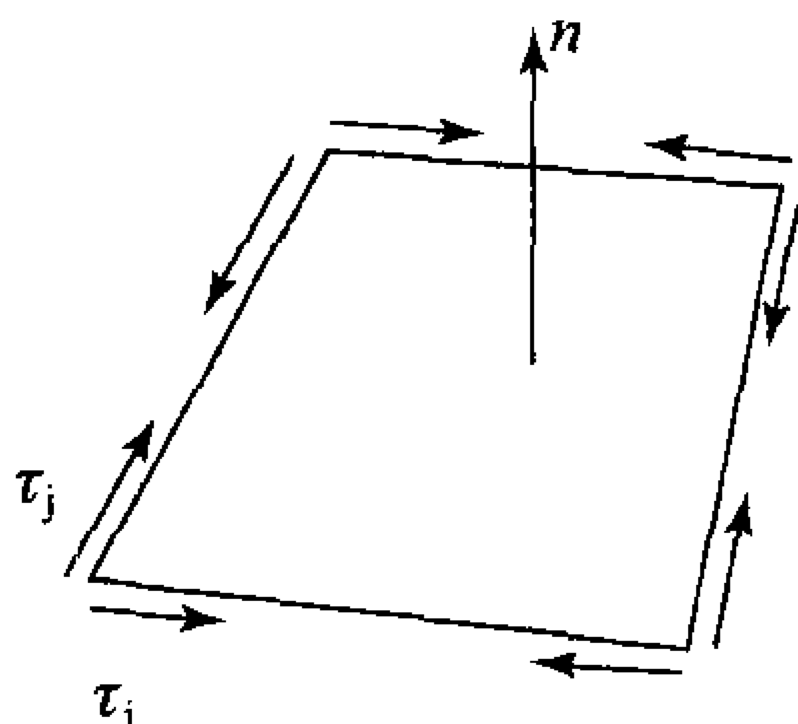


图10-4 网格面及其边棱上的单位矢量

若用$\boldsymbol{\tau}_i$和$\boldsymbol{\tau}_j$表示相交的两个棱边的单位矢量,则可得到以下关系

$$\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{a}_n=-\boldsymbol{H}(\tau_i\times\boldsymbol{\tau}_j)=-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\tau}_i)\boldsymbol{\tau}_j+(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\tau}_j)\boldsymbol{\tau}_i, \tag{10.2.16}$$

于是$\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{H}$也可用计算量表示出来,故积分(10.2.14)和(10.2.15)是可以进行的.这样,式(10.2.11)的各项就都是可以计算的了.

对于磁场的计算格式可利用对偶关系得到,只需在以上关系中把电场与磁场以及原始网格与对偶网格所扮演的角色对调,其具体形式为

$$\frac{\partial(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\tau}^*)}{\partial t}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{a}_n\right)(\boldsymbol{a}_n\cdot\boldsymbol{\tau}^*)+\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_1\right)(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau}^*)+\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_2\right)(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{\tau}^*), \tag{10.2.17}$$

$$\mu|A|\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{a}_n\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\int_A\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{S}=\oint_{\partial A}\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{l}, \tag{10.2.18}$$

以及

$$\mu\mid V\mid\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_1\right)=-\int_{\partial V}(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{v}_1\mathrm{d}S, \tag{10.2.19}$$

$$\mu\mid V\mid\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_2\right)=-\int_{\partial V}(\boldsymbol{a}_n\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{v}_2\mathrm{d}S. \tag{10.2.20}$$

到此为止,以上所给关系均可以构造出有限体积法的全部计算格式.其时间离散方法可以完全遵循时域有限差分法中的原则进行.由于针对具体网格系统的详细计算格式相当繁琐,此处不再细述.

不难发现,如果网格是正交的,则式(10.2.11)和(10.2.17)的右侧只有第一项不为零,电场和磁场的计算格式仅由式(10.2.12)和(10.2.18)产生.这后两个公式正是第一种积分形式的麦克斯韦方程,在正交网格体系中由它们构造出的正是经典的时域有限差分格式.所以,可以把时域有限体积法视为

时域有限差分法的发展，或者说，时域有限差分法是特殊情况下的时域有限体积法.

10.2.2 FDTD/FVTD 混合法

基于正交网格的 FDTD 的最突出优点是编程简单，应用方便；其缺点则是对弯曲几何结构的模拟不够精确. FVTD 法则正好相反，容易构造精确模拟的网格结构，但使得编程工作变得复杂. 所幸的是，正如前面已指出的那样，从原理上讲，FDTD 和 FVTD 两种方法是互通的，存在自然的相互联系和相互转变的机制，使得两种方法很容易形成混合方法，联合使用，以便各自发挥自身特有的优势. 在混合方法中，在几何结构需要精细模拟的部分采用非正交灵活网格，同时使用 FVTD 建立计算格式，而在其余部分则尽量采用正交网格，并使用 FDTD 计算格式. 一种计算飞机时域散射特性使用的混合网格模型的截面图由图 10-5 给出，正是这种网格结构和混合方法的使用比单一网格和单一方法大大节省了存储空间和 CPU 时间[24].

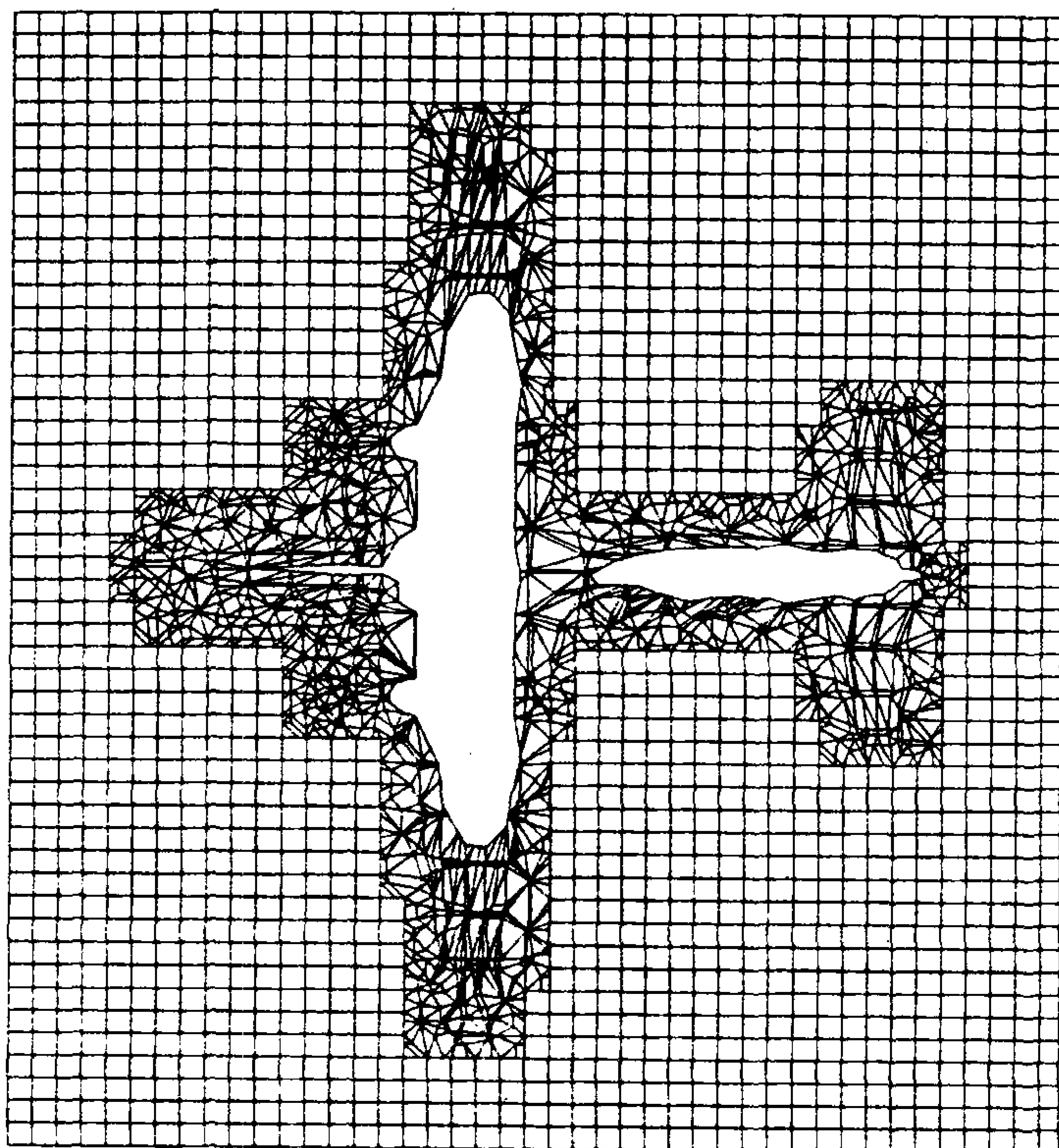


图 10-5 混合网格模型

参 考 文 献

[1] Stratton J A. 电磁理论. 何国瑜译. 北京：北京航空学院出版社，1986.

[2] Weng C C. 非均匀介质中的场与波. 聂在平等译. 北京：电子工业出版社，1992.

[3] Kong J A. 电磁波理论. 吴季等译. 北京：电子工业出版社，2003.

[4] 彭仲秋. 瞬变电磁场. 北京：高等教育出版社，1989.

[5] 汪文秉. 瞬态电磁场. 西安：西安交通大学出版社，1991.

[6] 王长清. 近代解析应用数学基础. 西安：西安电子科技大学出版社，2001.

[7] 王长清. 现代计算电磁学基础. 北京：北京大学出版社，2005.

[8] Hanson G W and Yakovlev A B. Operator Theory for Electromagnetics. New York: Springer, 2002.

[9] 郭敦仁. 数学物理方法. 北京：人民教育出版社，1965.

[10] Brilliouin L. Wave Propagation and Group Velocity. New York: Academic Press, 1960.

[11] Jones D S. Acoustic and Electromagnetic Waves. New York: Oxford University Press, 1986.

[12] 黄席椿. 论波速. 北京：高等教育出版社，1985.

[13] Collin R E. 导波场论. 侯元庆译. 上海：上海科学技术出版社，1966.

[14] Felsen L B. Transient Electromagnetic Fields. New York: Springer Verlag, 1976.

[15] Harrington R F. 正弦电磁场. 孟侃译. 上海：上海科学技术出版社，1964.

[16] Liu F and Wang W B. A Analysis of Transient Field of Linear Antenna. IEEE Trans. Electromagnetic Campat, 1989, 31(4): 404—409.

[17] Wu T T and King R W P. The Cylindrical Antenna with Nonreflecting Resistance Loading. IEEE Trans. Antennas Propagat, 1965, 12: 369—373.

[18] Harrington R F. Field Computation by Moment Method. New York: Macmilan, 1968.

[19] Morita N and et al. Integral Equation Method for Electromagnetics. London: Artech House, 1990.

[20] Peterson A F and et al. Computational Methods for Electromagnetics. New York: IEEE Press, 1998.

[21] Chew W C and et al. Fast and Efficient Algorithm in Computational Electromagnetics. London: Artech House, 2001.

[22] 盛新庆. 计算电磁学要论. 北京：科学出版社，2004.

[23] Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics (Second Edition). New York: John Wiley & Sons Inc, 2002.

[24] Rao S M. Time Domain Electromagnetics. New York: Academic Press, 1999.

[25] Paljak D and Tham C Y. Integral Equation Techniques in Transient Electromagnetics.

Boston: MIT Press, 2003.

[26] Knal J J. Interpolation of Bandlimited Functions Using the Approximate Pralate Series. IEEE Trans. Information Theory, 1979, 25: 717—720.

[27] Bucci O M and Franceschitti G. On the Spatial Bandwidth of Scattered Fields. IEEE Trans Antennas Propagat, 1987, 35: 1445—1455.

[28] Bucci O M and et al. Optimal Interpolation of Radiated Fields over A Sphere. IEEE Trans. Antennas Propagat, 1991, 39: 1633—1643.

[29] Yilmoz Ali E and el al. Time Damain Adaptive Integral Method for Surface Integral Equations. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2004, 52: 2692—2708.

[30] Back Ho Jung and el al. Transient Electromagnetic Scattering From Dielectric Objects Using the Electric Field Integral Equation with Laguerre Polynomials as Temporal Basis Functions. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2004, 52: 2329—2340.

[31] Pisharody G and Weile D S. Electromagnetic Scattering From Homogeneous Dielectric Bodies Using Time Domain Integral Equations. IEEE Trans, Antennas Propagat, 2006, 54: 687—697.

[32] Shanker B and et al. Fast Analysis of Transient Electromagnetic Scattering Phenomena Using The Multilevel Plane Wave Time-Domain Algorithm. IEEE Traus. Antennas Propagat, 2003, 51: 628—641.

[33] Yee K S. Namerical Salution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell Equations in Isotropic Media. IEEE Trans. Antennas propagat, 1966, 14: 302—307.

[34] Kunz K S and Luebbers R J. The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics. Boca Raton, FL, CRC Press, 1993.

[35] 王长清，祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法. 北京：北京大学出版社，1994.

[36] Taflove A. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood: Artech House, 1995.

[37] Taflove A. Advances in Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Norwood: Artech House, 1998.

[38] 葛德彪，闫玉波. 电磁波时域有限差分法(第 2 版). 西安：西安电子科技大学出版社，2005.

[39] Engquist B and Majda A. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Wave. Math. Comput, 1977, 31: 629—651.

[40] Mur G. Absorbing Boundary Condition for the Finite-Difference Appraximation of the Time Domain Electromagnetic Field Equations. IEEE Trans. Electromagn Campal, 1981, 23: 377—382.

[41] Berenger J P. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. J. Comput. Phys, 1994, 114: 185—200.

[42] Gedney S D. An Anisotropic Perfectly Matched Layer Absorbing Media for the Truncation of FD TD Lattices. IEEE Trans. Autennas Propagat, 1996, 44: 1630—1639.

[43] Chew K C and Fusco V. A Parallel Implementation of the FD TD Algorithm. Int. J. Num. Modeling: Electranic Networks,Device and Fields, 1995,8: 293—299.

[44] 余文华等.并行时域有限差分法.北京：中国传媒大学出版社,2005.

[45] Wen hua Yu and et al. A Robust Parallel Conformal Finite-Difference Time-Domain Processing Package Using the MPI/Library. IEEE Antennas Propagat. Magazine, 2005,47: 39—57.

[46] Hadi M F and Piket-May M. A Modified FD TD(2,4)Scheme for Modeling Electrically Large Structures with High-Phase Accuracy. IEEE Frans. Antennas Propagat, 1997, 45: 254—264.

[47] Lan K and et al. A Higher-order(2,4)Scheme for Reducing Dispersion in FD TD Algorithm. IEEE Trans. Electromgn. Compat, 1999,41: 160—165.

[48] Georgakopoulos S V and et al. Higher-Order Finite Difference Scheme for Electromagnetic Radiation, Scattering, and Penetration, Part: Theory. IEEE Antennas Prapagat. Magazine, 2002,44: 134—142.

[49] Sun G and Trueman C W. Optimized Finite-Difference Time-Domain Method Based on the(2, 4) Stencil. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2005, 53: 832—842.

[50] Namiki T. A New FDTD Algorithm Based on Alternating-Direction Implicit Method. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1999,47: 2003—2007.

[51] Namiki T. 3-D ADI-FDTD Method-Unconditionally StableTime-Domain Algorithim for Solving Full Vector Maxwell's Equations. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2000,48: 1743—1748.

[52] Staker S W and et al. Alternating-Direction Implicit(ADI)Formulation of the Finite-Difference Time-Domain(FDTD) Method: Algorithm and Material Dispersion Implementation. IEEE Trans. Electromagn. Compal, 2003,45: 156—166.

[53] Mei Chai and et al. Conformal Method to Eliminate the ADI-FDTD Staircasing Errors. IEEE Trans. Electromagn. Compat, 2006,48: 273—281.

[54] Daubechies I. 小波十讲.李建平，杨万年译.北京：国防工业出版社,2004.

[55] Krumpholz M and Katehi L P B. MRTD: New Time-Domain Schemes Based on Multiresolution Analysis. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1996,44: 555—571.

[56] Fujii M and Hoefer W J R. A Three-Domensional-Haar-Wavelet-Based Multiresolution Analysis Similar to the FDTD Method-Derivation and Application. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1998,46: 2463—2475.

[57] Tentzeris E M and et al. Stability and Dispersion Analysis of Battle-Lemarie-Based MRTD Schemes. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 1999, 47: 1004—1013.

[58] Tentzeris E M and et al. PML Absorbing Boundary Conditions for the Characterization

of Open Microwave Circuit Components Using Multiresolution Time-Domain Techniques(MRTD). IEEE Trans. Antennas Propagal, 1999,47: 1709—1715.

[59] Tentzeris E M and et al. Multiresolution Time Domain(MRTD) Adaptive Schemes Using Arbitrary Resolutions of Wavelets. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2002,50: 501—516.

[60] Dogaru T and Carin L. Application of Haar-Wavelet-Based Multiresolution Time-Domain Schemes to Electromagnetic Scattering Prottems. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002,50: 774—784.

[61] Pan George W. Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling. Hoboken: Wiley-Interscience,2003.

[62] Shlager K L and Schncider J B. Comparison of the Dispersion Properties of Higher Order FDTD Schemes and Equivalent-Sized MRTD Schemes. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2004,52: 1095—1104.

[63] Lee Jin-Fa and et al. Time-Damain Fimte Element Methods. IEEE Trans. Antennas Propagat, 1997,45: 430—441.

[64] Cangellaris A C and et al. Point-Matched Time Domain Finite Element Methods for Electromagnetic Radiation and Scattering. IEEE Trans. Antennas propagat, 1987,35: 1160—1173.

[65] Dan Jiao and Jian-Ming Jin. A General Approach for the Stability Analysis of the Time-Domain Finite-Element Method for Electromagnetic Simulations. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002,50: 1624—1632.

[66] Dan Jiao and et al. A Fast Time-Domain Finite Element-Boundary Integral Method for Electromagnetic Analysis. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2001,49: 1453—1461.

[67] Dan Jiao and et al. A Fast Higher-Order Time-Domain Finite Element-Boundary Integral Method for 3-D Electromagnetic Scattering Analysis. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002,50: 1192—1202.

[68] Dan Jiao and Jian-Ming Jin. An Effective Algorithm for Implementing Perfectly Matched Layers in Time-Domain Finite-Element Simulation of Open-Region EM Problems. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002,50: 1615—1623.

[69] Dan Jiao and et al. Time-Damain Finite-Element Simulation of Three-Dimensional Scattering and Radiation Problems Using Perfectly Matched Layers. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2003,51: 296—305.

[70] Dan Jiao and Jian-Ming Jin. Three Dimensional Orthogonal Vector Basis Function for Time-Domain Finite-Element Solution of Vevtor Wave Equations. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2003,51: 59—66.

[71] Pernet S and et al. High Spatial Order Finite Element Method to Solve Maxwell's Equations in Time Domain. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2005,53: 2889—2899.

[72] Jim-Fa Lee. WETD-A Finite Element Time-Damain Approach for solving Maxwell's

Equations. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1994,4(1): 11—13.

[73] WhiteD A. Orthogonal Vector Basis Functions for Time Domain Finite Element Solution of the Vector Wave Equation. IEEE Trans,Magnetics, 1999,35: 1458—1461.

[74] Madsen N K and Ziolkowski R W. A Three-Dimensional Modified Finite Volume Technique for Maxwell'S Equations. Electromagnetics, 1990,10: 147—161.

[75] Shankar V and et al. A Time-Domain Finite-Volume Treatment for the Maxwell Equations. Electromagnetics, 1990,10: 127—145.

[76] Bonnet P and et al. Numerical Modeling of Scattering Problems Using a Time Domain Finite Volume Method. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 1997,11: 1165—1189.

[77] Yee K S and Chen J S. The Finite-Difference Time-Domain(FDTD)and the Finite-Volume Time-Domain(FVTD)Methods in Solving Maxwell's Equations. IEEE Trans. Antennas propagat, 1997,45: 354—363.

[78] Fumeaux C and et al. A Generalized Local Time-Step Scheme for Efficient FVTD Simulations in Strongly Inhomegeneous Meshes. IEEE Trans Microwave Theory and Techniques, 2004,52: 1067—1076.

[79] Sankaran K and et al. Cell-Centered Finite-Volume-Based Perfectly Matched Layer for Time-Domain Maxwell System. IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, 2006,54: 1269—1276.